

## 4 次ルンゲ=クッタ法の図形的な意味\*

陰山 聡

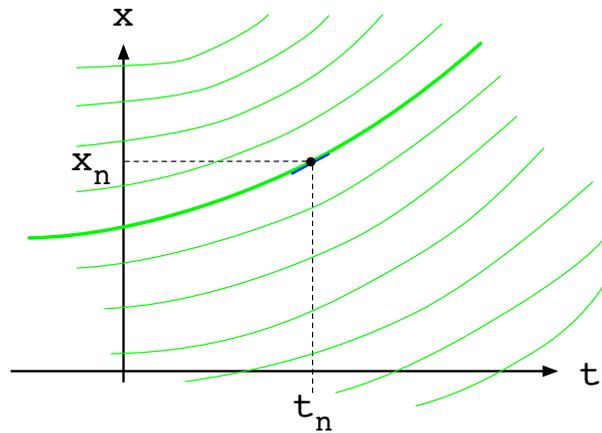
神戸大学 システム情報学研究科 計算科学専攻

2016.11.22

$t$  の関数  $x = x(t)$  の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

を数値的に解く。ある時刻  $t_n$  での解  $x_n$  は既知とする。時間が  $\Delta t$  だけ進んだ未来の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での解  $x_{n+1}$  を求める。



式 (1) の右辺  $f(x, t)$  を 2 次元空間  $x-t$  の場とみなそう。この微分方程式のある初期条件に対する解は、 $t-x$  空間上の曲線  $x = x(t)$  である。これを解曲線という。異なる初期条件は異なる解曲線をもつ。二つの解曲線が交わることはない。したがって、この  $x-t$  空間は (異なる初期条件に対応する) 無数の解曲線でびっしりと埋め尽くされている。各点での関数  $f(x, t)$  の値は、その位置を通る解曲線  $x = x(t)$  の接線の傾きである。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{6}k_1 + \frac{\Delta t}{3}k_2 + \frac{\Delta t}{3}k_3 + \frac{\Delta t}{6}k_4 \quad (2)$$

とするのが 4 次ルンゲ=クッタ法の公式 (の一つ) である。ここで

$$k_1 = f(x_n, t_n) \quad (3)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4)$$

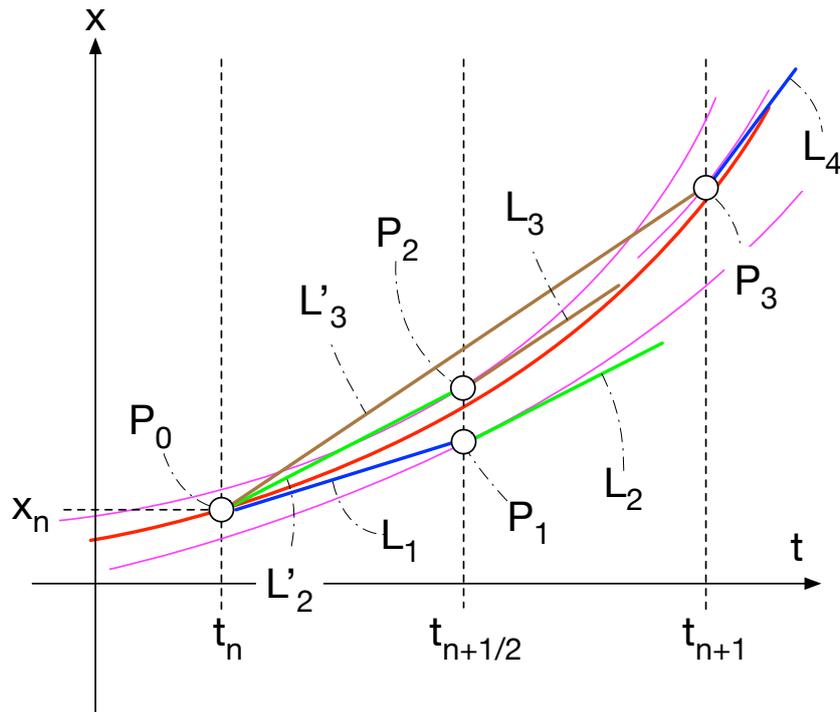
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (5)$$

$$k_4 = f(x_n + \Delta tk_3, t_n + \Delta t) \quad (6)$$

である。

解曲線を見てこの公式の図形的な意味を考えよう。

\*解析力学 (工学部 2 回生向け) の講義資料からの抜粋。



4次ルンゲ=クッタ法の図形的な意味

1.  $t = t_n$  での  $x$  の値を  $x_n$ 、点  $(t_n, x_n)$  を  $P_0$  とする。
2.  $P_0$  での解曲線  $x(t)$  の接線を  $L_1$  とする [式 (3)]。
3.  $t_n + \Delta t/2$  を  $t_{n+1/2}$  とし、 $L_1$  と直線  $t = t_{n+1/2}$  の交点を  $P_1$  とする。
4.  $P_1$  での解曲線の接線を  $L_2$  とする [式 (4)]。
5.  $L_2$  を平行移動し、 $P_0$  を通るようにする。これを  $L'_2$  とする。
6.  $L'_2$  と直線  $t = t_{n+1/2}$  の交点を  $P_2$  とする。
7.  $P_2$  での解曲線の接線を  $L_3$  とする [式 (5)]。
8.  $L_3$  を平行移動して、 $P_0$  を通るようにする。これを直線  $L'_3$  とする。
9.  $L'_3$  と直線  $t = t_{n+1}$  の交点を  $P_3$  とする。
10.  $P_3$  での解曲線の接線を  $L_4$  とする [式 (6)]。
11.  $L_1, L_2, L_3, L_4$  の傾きを 1:2:2:1 の重みで平均した直線を  $P_0$  から伸ばし、 $t = t_n$  との交点の  $x$  を  $x_n$  とする [式 (2)]。

直線  $L_i$  の傾きが  $k_i$  である ( $i = 1, 2, 3, 4$ )。  $P_1$  と  $P_2$  の中点を求める操作は、時間刻み幅を  $\Delta t/2$  としたときの2次ルンゲ=クッタ法に相当する。  $k_2$  と  $k_3$  の平均値を

$$\bar{k} = \frac{k_2 + k_3}{2} \quad (7)$$

とすれば、最後のステップで  $x_n$  から  $x_{n+1}$  への増分  $k$  は

$$k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1}{6} (k_1 + 4\bar{k} + k_4) \quad (8)$$

である。これは (1) の積分にシンプソンの公式である。中点での  $f$  の値は2次ルンゲ=クッタ法による推測値を使った。