情報可視化論 H24 前期 第 04 回

陰山 聡

2012.05.08

まとめ

- 空間の関数＝場
- $f : D \to C$
  - $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$
  - D (Domain) の次元 $d = 3$
  - C (Codomain) の次元 $c = 2$
- D の topological dimension s
  - $s = 1$ 曲線上の場
  - $s = 2$ 曲面上の場
  - $s = 3$ 空間中に広がる場
- 連続
  - C^k 級の連続
- 離散データから連続関数を推測する
  - Sampled data (x_i, f_i)
  - 真の連続関数 $f(x)$
  - 推測した (reconstructed) 関数 $\tilde{f}(x)$
- 正規直交系
  - 線形和: $\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j\, e_j(x)$
  - 内積: $\langle e_i(x) | e_j(x) \rangle = \delta_{ij}$

- 上の二つと内積の線形性より: $a_i = \left\langle e_i(x) \middle| \tilde{f}(x) \right\rangle$

- Sampled data $(x_i, f_i) \quad i = 1, \ldots, N$
  - よい近似関数 $\tilde{f}(x)$ とは何だろうか？
  - 「サンプルデータをピッタリ通る」というのは一つの案：$f_i = \tilde{f}(x_i)$
  - すると重み (あるいは座標)a_i は、連立一次方程式を解けば求まる: $f_i = \sum_{j=1}^{N} e_{ij}\, a_j, \quad e_{ij} \equiv e_j(x_i)$
  - これを解くのは通常大変だが、$e_i(x)$ が三角関数の場合は速いアルゴリズムがある (FFT, Fast Fourier Transform)。

- 内積の定義が鍵
  - $\langle e_i(x)|e_j(x)\rangle = e_i(x_j) = \delta_{ij}$ としてみる。
  - この時 $a_i = \left\langle e_i(x) \middle| \tilde{f}(x) \right\rangle = f_i$ となる。つまり観測値=重み。
  - 基底関数 $e_i(x)$ は、点 x_i 上で 1 になり、それ以外の点 $x_j \quad (j \neq i)$ では 0。
  - $e_i(x)$ として、一番簡単なのは x_i の近くだけで定数（$= 1$）となる不連続な関数 $\rightarrow$ このときの $\tilde{f}(x)$ は階段状の関数。
  - $e_i(x)$ として、次に簡単なのは x_i 上で 1、それ以外の x_j でゼロとなる三角形状の関数 $\rightarrow$ このときの $\tilde{f}(x)$ は区分的線形関数。
  - グラフを見ると grid と cell (あるいは element) に注目するのがよさそう。

- grid と cell に注目してみる。
  - 格子点 x_i と x_{i+1} で挟まれた区間の区分的線形関数 $\tilde{f}(x)$.
  - $\tilde{f}(x)$ は、二つの点 $\tilde{f}(x_i) = f_i$, $\tilde{f}(x_{i+1}) = f_{i+1}$ を結んだ直線
  - $\tilde{f}(x) = f_i\, \Phi_1(x) + f_{i+1}\, \Phi_2(x)$ と書ける。
  - $\Phi_i(x)$ は区分的線形関数（直角三角形型）:
    * $\Phi_1(x_i) = 1, \quad \Phi_1(x_{i+1}) = 0,$
    * $\Phi_2(x_i) = 0, \quad \Phi_2(x_{i+1}) = 1.$
  - この方法は 2 次元や 3 次元に応用できる。

- 正方形セル内の bilinear 補間
  - 2 次元の座標 (r, s) をとる。$0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$

- 4 つの頂点に番号をつける。1 : $(r=0, s=0)$,　2 : $(r=1, s=0)$,　3 : $(r=1, s=1)$,　4 : $(r=0, s=1)$
- ４つの頂点上の sampled data f_1, f_2, f_3, f_4 が既知とする。
- 正方形内部の近似関数 $\tilde{f}(r,s)$ をどう作るか？
- 1 次元の場合と同様に、$\tilde{f}(r,s) = \sum_{i=1}^{4} f_i \, \Phi_i(x)$ という形にするには、以下のように定義すればよい。bilinear 補間。
  * $\Phi_1(r,s) = (1-r)(1-s)$
  * $\Phi_2(r,s) = r\,(1-s)$
  * $\Phi_3(r,s) = rs$
  * $\Phi_4(r,s) = (1-r)\,s$
- 正方形ではなく、一般的な四角形に応用するにはどうしたらいいであろうか？（次回）

問題 4.1

半径 1 の円上に分布する関数 $f(x)$, $(-\pi \le x < \pi)$ を考える。基底関数 $e_i(x)$ を

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (i=0), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin\left(\frac{i+1}{2}x\right) & (i=1,3,5,\ldots), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\cos\left(\frac{i}{2}x\right) & (i=2,4,6,\ldots), \end{cases}$$

その内積を

$$\langle e_i(x) | e_j(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e_i(x)\, e_j(x)\, dx,$$

と定義したとき、これが正規直交系、つまり

$$\langle e_i(x) | e_j(x) \rangle = \delta_{ij},$$

となっていることを示せ (フーリエ展開)。

問題 4.2

正方形セル内部の bilinear 補間で用いる関数 $\Phi_i(r,s)$ のグラフ（height plot）は平面ではないことを示せ。ヒント：平面 $\leftrightarrow$ normal vector が一定。あるいは、空間中の平面は 3 つの点で決まること。