

# 情報可視化論 H24 前期 第 08 回

陰山 聡

2012.07.03

## まとめ

- テンソルの話
- 「モノ」と「モノの見方」
  - 物理的実体とは
  - 棒を見て、それが実在するモノだと確信するのはなぜか。
  - 目に映る映像が決まったルールで変わる。回転変換。
  - あるベクトルというひとつの実体をあらわす 3 つの数値 (成分) は、座標系毎に数値が変わる。
  - $v'_i = R_{ij} v_j$ ,  $R$  は直交行列
  - ベクトルの一般化: 直交行列  $R$  によってきまる何らかのルールで成分の数値が変換されるモノ
- 直交行列  $R$  を二つかけて成分が変換されるモノが 2 階のテンソル
- 線形関数としてのテンソル
  - two-vectors-in, one-scalar-out の関数
    - \*  $s = T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
    - \* 座標系を固定すれば必ず  $s = x_i T_{ij} y_j$  の形で書ける
  - one-vector-in, one-vector-out の関数とも言える。
- ベクトルとスカラーが入出力に関係しているモノだから、必然的に座標変換に対してきまったルールがある。
- ベクトルも線形関数
  - $s = A_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$
  - one-vector-in, one-scalar-out の関数
- テンソルの例
  - 単位テンソル (=ベクトルの内積という関数)
  - 射影テンソル
  - 慣性テンソル
  - 歪みテンソル場

## 問題 8.1

ベクトル  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$  と  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$  から 3 行 3 列の行列

$$C = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

を構成するとこの  $C$  は 2 階のテンソルである。なぜなら別のカーテシアン座標系でこの  $C'$  を構成すると、

$$C' = \begin{pmatrix} a'_x b'_x & a'_x b'_y & a'_x b'_z \\ a'_y b'_x & a'_y b'_y & a'_y b'_z \\ a'_z b'_x & a'_z b'_y & a'_z b'_z \end{pmatrix}$$

これは ( $x, y, z$  成分を 1, 2, 3 と書けば)

$$\begin{aligned} C'_{ij} &= a'_i b'_j \\ &= (R_{i\ell} a_\ell)(R_{jm} b_m) \\ &= R_{i\ell} R_{jm} C_{\ell m} \end{aligned}$$

直交行列  $R$  を二つかけて成分が変換されるからこれは確かにテンソル。では、

$$D = \begin{pmatrix} a_y b_z & a_y b_x & a_y b_y \\ a_z b_z & a_z b_x & a_z b_y \\ a_x b_z & a_x b_x & a_x b_y \end{pmatrix}$$

はテンソルだろうか？