

球面調和関数

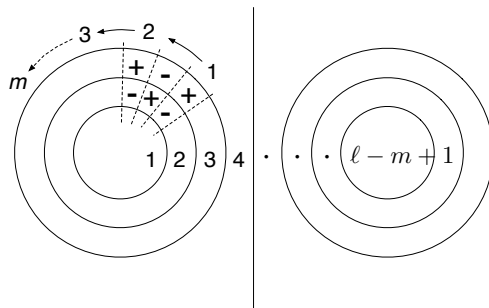
その形と使い方

陰山 聡

神戸大学 システム情報学研究科 計算科学専攻

講義資料： 計算科学概論 H25 年度前期（修士） 2013.05.27

ヤン投影での $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ のパターン



背景と目標

例題設定

球面調和関数とは

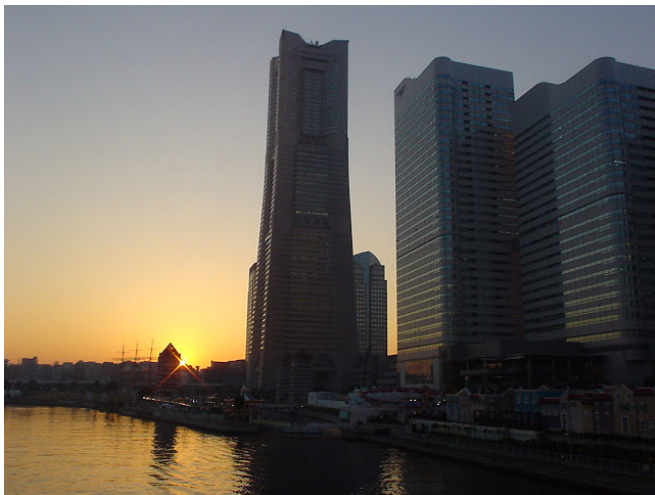
球面調和関数の形

球面調和関数の使い方

最後に

背景と目標

JPEG ファイル

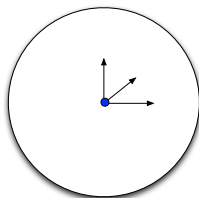


JPEG 圧縮

- フーリエ変換 ←
- 短波長成分破棄
- ハフマン符号化（出現頻度依存の符号化）

問題

- 全天 (4π 立体角) のパノラマ画像
- 球面上に分布する画像データ*
- このデータをどう圧縮するか？



*画像に限らず球面上に分布する数値データ。

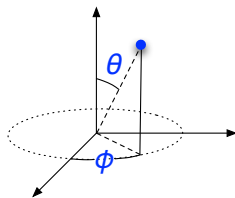
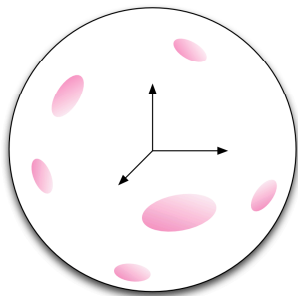
目標

- 球面上でのフーリエ変換に相当するものを考えよう。
- その関数はどんな形をしているであろうか？
- その関数はどういう性質を持っているであろうか？
- その関数を使ってどんな計算ができるであろうか？

例題設定

球面上の熱伝導

- 薄い金属で球面を作る
- 球面上を熱が伝わる
- 時刻 t における温度分布 $T(\theta, \phi; t)$



定式化

フーリエ則：熱流束ベクトル \mathbf{q}_h 、温度 T の勾配、熱伝導率 κ

$$\mathbf{q}_h = -\kappa \nabla T$$

エネルギー保存則[†]：

$$\frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_h$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

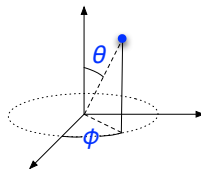
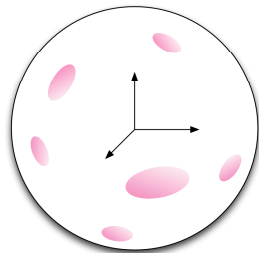
[†]簡単のため球面の単位体積あたりの比熱を 1 とした

定式化：球面上の方程式

$$\frac{\partial T(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [\kappa(\theta, \phi) \nabla T(\theta, \phi, t)]$$

単位球面上の微分演算子

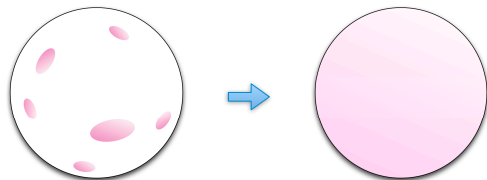
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \quad \nabla A = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$



初期条件 $T(\theta, \phi, t = 0) = f(\theta, \phi)$. 解 $T(\theta, \phi, t)$ を求めよ。

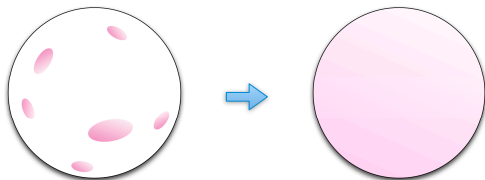
予想

- 高温部分は冷めていくであろう。
- 低温部分は暖まるであろう。
- 最後には球全体が一定の温度に落ち着くであろう。



不明な点

- 最終的な一定温度の値は？
- どれくらいの時間で最終状態に落ち着く？
- 落ち着く前はどんな温度パターンが見えるのか？



解のおおざっぱな見積

$$\frac{\partial T(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [\kappa(\theta, \phi) \nabla T(\theta, \phi, t)]$$

これをそのまま解くのは難しそう。

とりあえず κ が球面上で一定の場合を考えてみよう。

$$\frac{\partial T(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\theta, \phi, t)$$

これは拡散方程式。

球面上の拡散方程式

$$\frac{\partial T(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\theta, \phi, t)$$

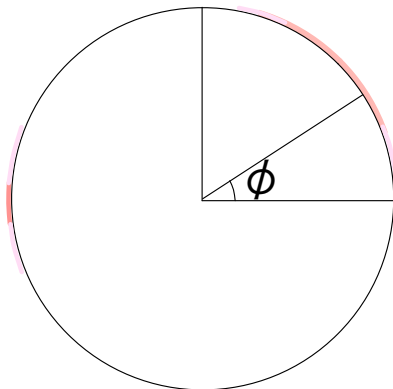
単位球面上のラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

球の代わりに円の場合を考えるとヒントになる。

単位円上の拡散方程式

$$\frac{\partial T(\phi, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(\phi, t)}{\partial \phi^2}$$



$$\text{円上の方程式： } \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} T$$

もしも 温度分布 T が、 λ を定数として、時刻 t で

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} T_\lambda(\phi, t) = \lambda T_\lambda(\phi, t)$$

という関係を満たしていたら、解くべき式は

$$\frac{\partial T_\lambda(\phi, t)}{\partial t} = \kappa \lambda T_\lambda(\phi, t)$$

これは簡単に解ける。

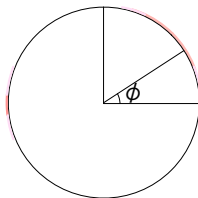
$$T_\lambda(\phi, t) = T_\lambda(\phi, 0) e^{\kappa \lambda t}$$

つまり一定の成長率 ($= \kappa \lambda$) で成長 (あるいは減衰) する解。

固有値問題

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} T_\lambda(\phi) = \lambda T_\lambda(\phi)$$

- これは固有値問題
- λ は固有値
- T_λ は $\partial^2/\partial\phi^2$ (= 円上のラプラシアン) の固有関数



固有値問題

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} T_\lambda(\phi) = \lambda T_\lambda(\phi)$$

- 固有関数 $e^{im\phi}$ (フーリエ関数)
- 固有値 $\lambda = -m^2$
- $m \in \mathbb{Z}$

拡散方程式の解が無数に見つかった

$$T_m(\phi, t) \propto e^{im\phi} e^{-\kappa m^2 t}$$

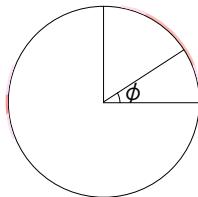
完全正規直交系

$$\phi \in [-\pi, \pi], m \in \mathbb{Z}$$

$$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(\phi) \psi_{m'}^{\dagger}(\phi) d\phi = \delta_{mm'} \quad (\text{正規直交性})$$

$$\forall f(\phi), \exists a_m \in \mathbb{C}, \quad f(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\phi} \quad (\text{完全性})$$

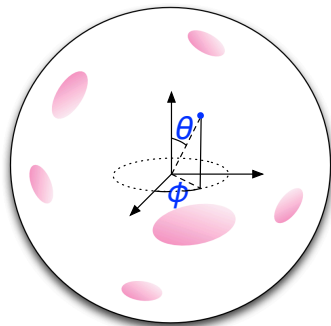


球面上の方程式： $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$

にもどろう。

$$\frac{\partial T(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\theta, \phi, t)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$



$$\text{球面上の方程式： } \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

もしも 温度分布 T が、

$$\nabla^2 T_\lambda(\theta, \phi, t) = \lambda T_\lambda(\theta, \phi, t)$$

という関係を満たしていたら、解くべき式は

$$\frac{\partial T_\lambda(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \lambda T_\lambda(\theta, \phi, t)$$

解は

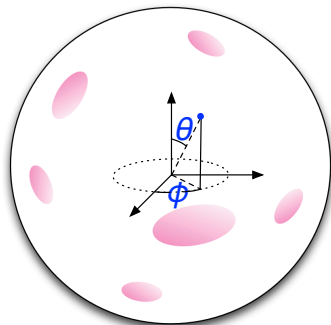
$$T_\lambda(\theta, \phi, t) = T_\lambda(\theta, \phi, 0) e^{\kappa \lambda t}$$

つまり、一定の成長率 ($= \kappa \lambda$) で成長 (あるいは減衰) する解。

球面上の固有値問題

$$\nabla^2 T_\lambda(\theta, \phi) = \lambda T_\lambda(\theta, \phi)$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- T_λ : 固有関数
- λ : 固有値

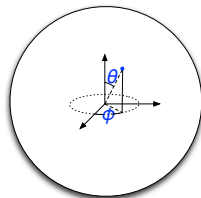


球面調和関数とは

球面調和関数

$$Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

- $\ell, m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \ell, \quad -\ell \leq m \leq \ell$
- 単位球面上でのラプラシアン固有関数
- 固有値は $-\ell(\ell + 1)$
- 球面上での完全正規直交系



∇^2 の固有関数は直交する

$$\lambda \psi_\lambda(\theta, \phi) = \nabla^2 \psi_\lambda(\theta, \phi)$$

$$\lambda' \psi_{\lambda'}(\theta, \phi) = \nabla^2 \psi_{\lambda'}(\theta, \phi)$$

上の式に $\psi_{\lambda'}$ を、下の式に ψ_λ をかけて、両式を引く

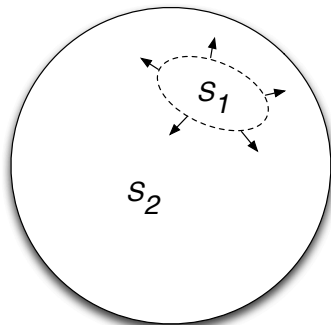
$$(\lambda - \lambda') \psi_\lambda \psi_{\lambda'} = \psi_{\lambda'} \nabla^2 \psi_\lambda - \psi_\lambda \nabla^2 \psi_{\lambda'}$$

これを球面 S 全体で積分する。 $\int_S dS = \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^\pi d\phi$ と書くと

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \int_S \psi_\lambda \psi_{\lambda'} dS &= \int_S \{ \psi_{\lambda'} \nabla^2 \psi_\lambda - \psi_\lambda \nabla^2 \psi_{\lambda'} \} dS \\ &= \int_S \nabla \cdot \{ \psi_{\lambda'} \nabla \psi_\lambda - \psi_\lambda \nabla \psi_{\lambda'} \} dS \\ &= 0 \quad (\because \text{次ページ}) \end{aligned}$$

球面上 $\nabla \mathbf{A}(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \cdot \mathbf{A}(\theta, \phi) dS &= \int_{S_1} \nabla \cdot \mathbf{A} dS + \int_{S_2} \nabla \cdot \mathbf{A} dS \\ &= \int_{\partial S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\partial S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\partial S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= 0 \end{aligned}$$



結局、

$$(\lambda - \lambda') \int_S \psi_\lambda \psi_{\lambda'} dS = 0$$

$$\therefore \lambda \neq \lambda' \implies \int_S \psi_\lambda \psi_{\lambda'} dS = 0$$

球面上の実関数 $f(\theta, \phi), g(\theta, \phi)$ に対し

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_S f(\theta, \phi) g(\theta, \phi) dS = 0$$

のとき直交。固有値の異なる固有関数は直交する：

複素球面調和関数 $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ に関して

$$\int_S Y_\ell^m Y_{\ell'}^{m'\dagger} dS = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{正規直交性})$$

$$\forall f(\theta, \phi), \exists a_\ell^m \in \mathbb{C} \quad f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{完全性})$$

- リング上の任意関数 $f(\phi)$ はフーリエ関数展開
- 球面上の任意関数 $f(\theta, \phi)$ は球面調和関数展開

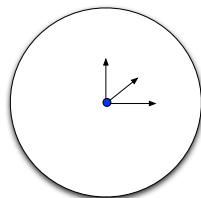
$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

展開係数 a_{ℓ}^m の求め方 : (球面調和関数変換)

$$a_{\ell}^m = \int_S f(\theta, \phi) Y_{\ell}^{m\dagger}(\theta, \phi) dS$$

問題（再掲）

- 全天 (4π 立体角) のパノラマ画像
- 球面上に分布する画像データ
- このデータをどう圧縮するか？ \implies 球面調和関数展開



球面調和関数の具合的な形

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = C_\ell^m P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

C_ℓ^m は規格化定数: $C_\ell^m = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$

$P_\ell^m(\cos \theta)$ はルジャンドル倍関数

$$P_\ell^{-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m$$

経度 ϕ 方向は普通のフーリエ関数

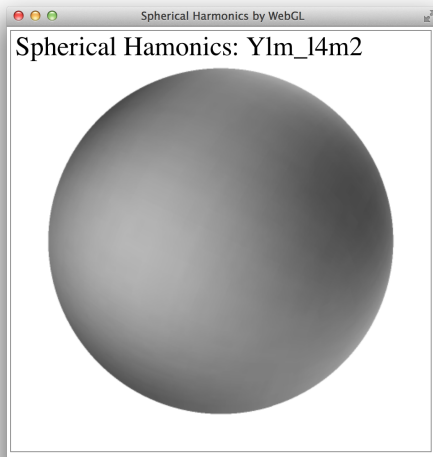
$$P_0^0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$$

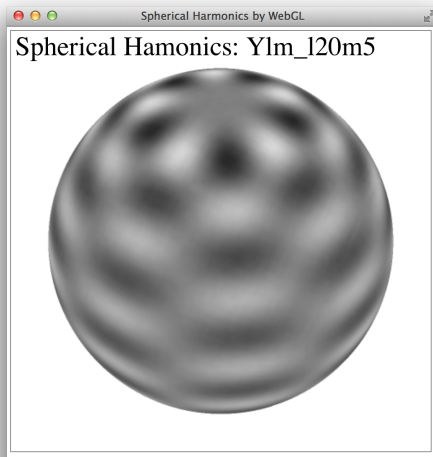
$$P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad P_2^1(\cos \theta) = -3 \cos \theta \sin \theta \quad P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$$

球面調和関数の形

$$Y_4^2$$



$$Y_{20}^5$$



Y_ℓ^m はどんなパターンの図形か？

$m = 0$ の時は軸対称[‡]というのはわかる。それ以外の特徴は？

$Y_\ell^m(\theta, \phi)$ はどんな模様なのか？

[‡] $Y_\ell^m \propto P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$

球面上の模様を把握するための投影図法

形と面積のゆがみが少ない方法がよい。

- メルカトル図法
- モルワイデ図法
- ...



Yin-Yang (陰陽、インヤン) 図法

球面を二つの図に分けて投影

- イン 球座標の低緯度領域

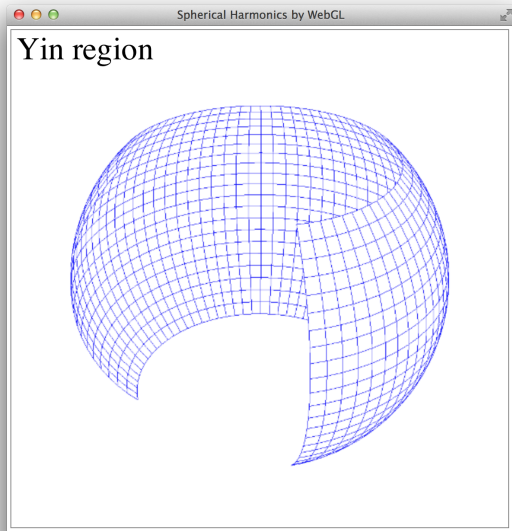
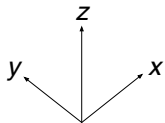
$$(\theta, \phi) = ([\pi/4, 3\pi/4], [-3\pi/4, 3\pi/4])$$

- ヤン

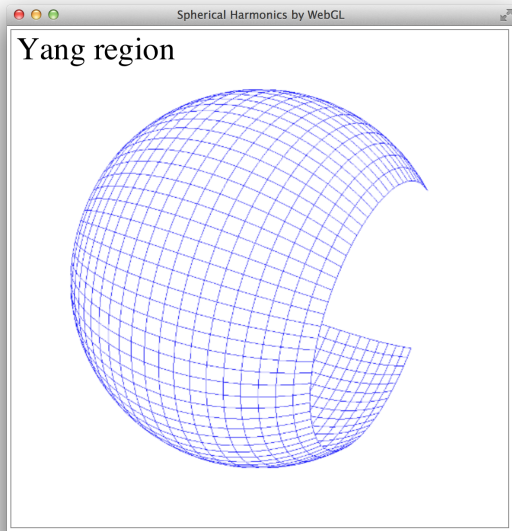
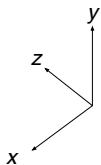
1. x 軸の周りに 90 度回転
2. 新しい y 軸の周りに 180 度回転
3. この新しい球座標の低緯度領域 :

$$(\theta, \phi) = ([\pi/4, 3\pi/4], [-3\pi/4, 3\pi/4])$$

イン



ヤン



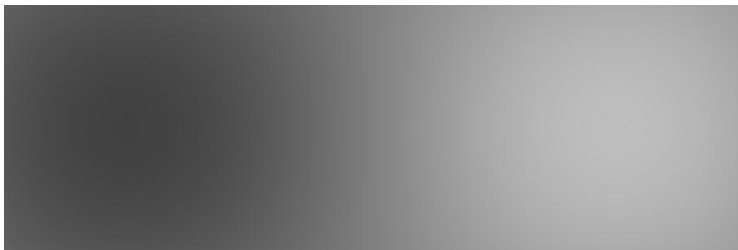
Y_{l0m0} _yang



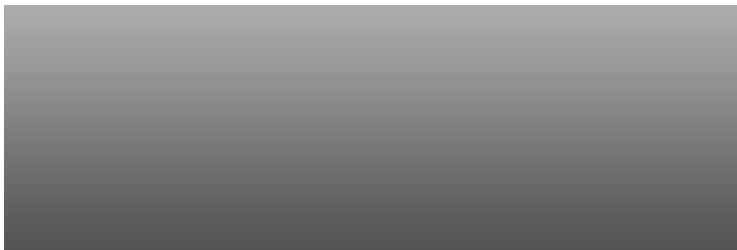
Y_{l0m0}



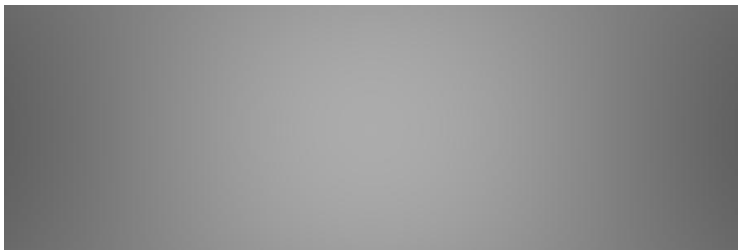
$Y_{lm}|_{l=1,m=0}$ yang

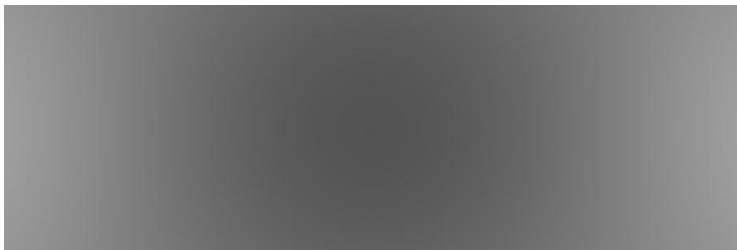


$Y_{lm_l1m0_yin}$

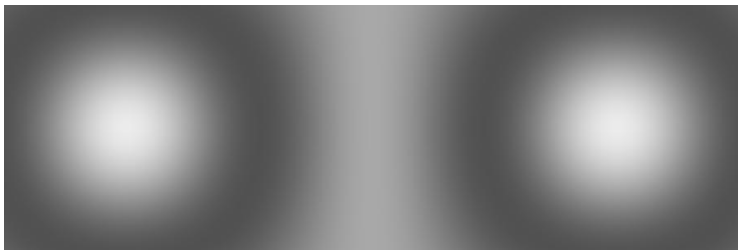


$Y_{lm_l1m1_yang}$



$Y_{lm} = Y_{l1m1}$ 

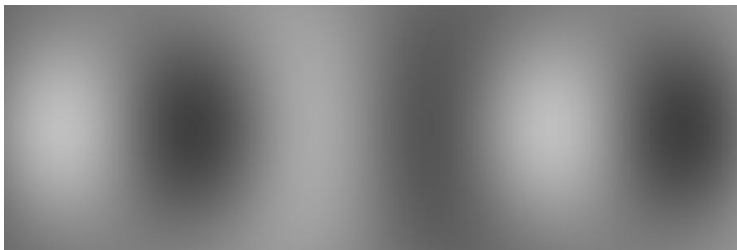
$Y_{lm,l4m0_yang}$



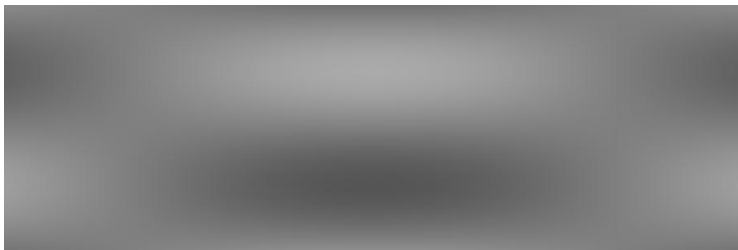
$Y_{lm} |_{l=4, m=0} |_{\text{yin}}$



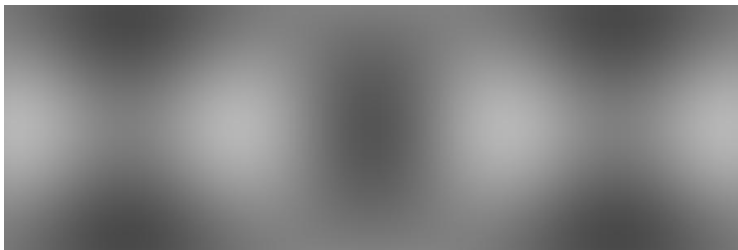
$Y_{lm}|_{l=4,m=1}$ _yang



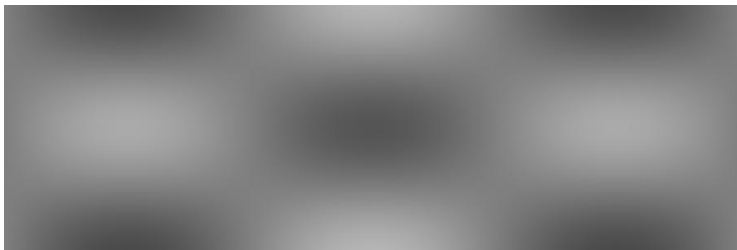
$Y_{lm}|_{l=4,m=1}_{\text{yin}}$



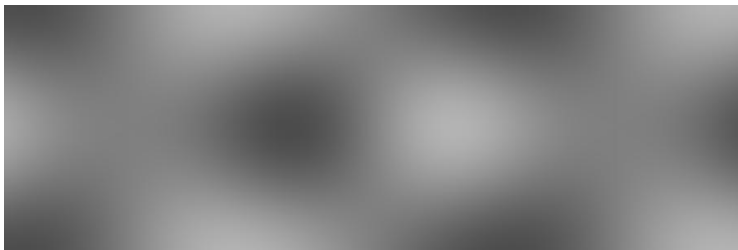
Y_{lm} $l=4$ $m=2$ yang



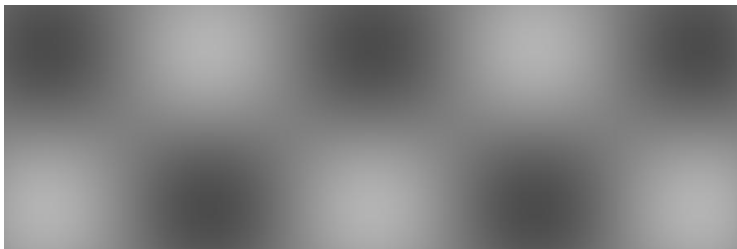
$Y_{lm}|_{l=4,m=2}_{\text{yin}}$



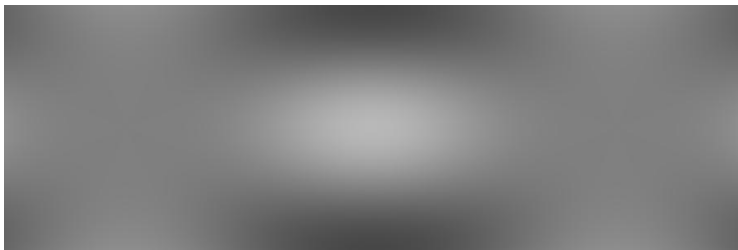
$Y_{lm_l4m3_yang}$



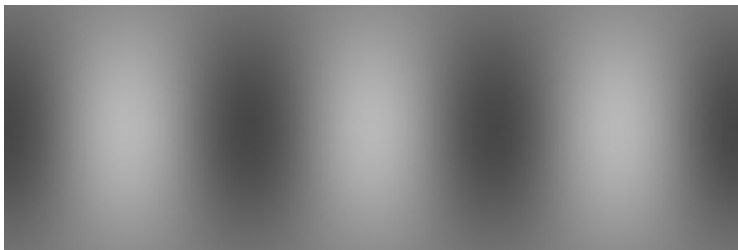
$Y_{lm} |_{l=4, m=3, yin}$



$Y_{lm_l4m4_yang}$



$Y_{lm} |_{l=4, m=4} \text{ _yin}$



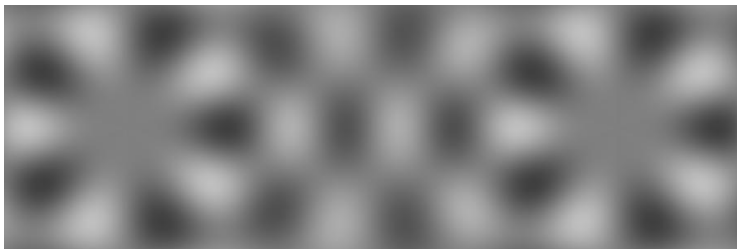
$Y_{lm} |_{l=10, m=0} \text{ yang}$



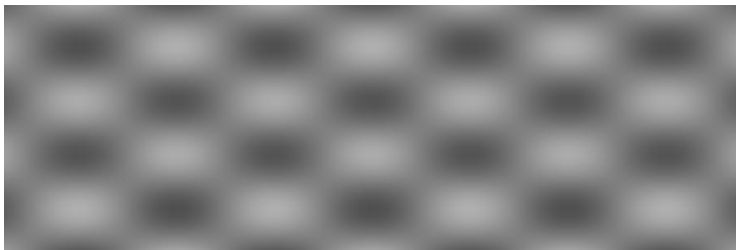
$Y_{lm_l10m0_yin}$



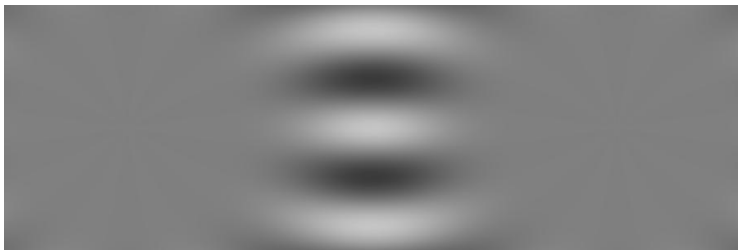
$Y_{lm_l10m5_yang}$



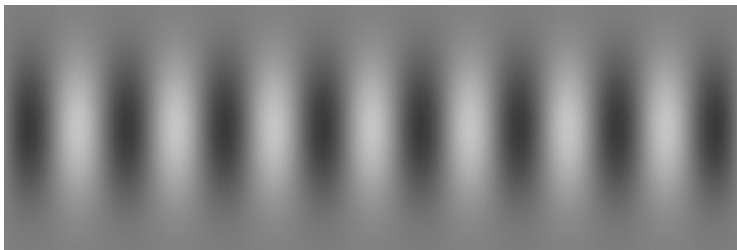
$Y_{lm} |_{l=10, m=5} |_{\text{yin}}$



$Y_{lm}_{l10m10_yang}$



$Y_{lm}|_{l=10, m=10}$



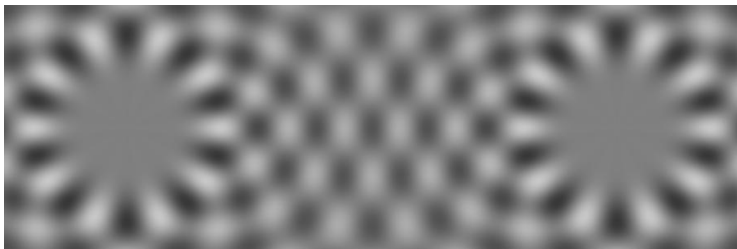
$Y_{lm} |_{l=20, m=0} \text{ yang}$



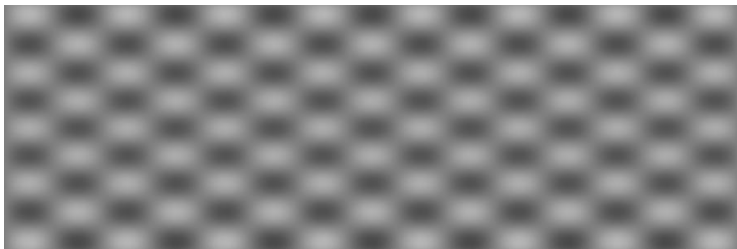
$Y_{lm}|_{l=20, m=0}$ _yin



$Y_{lm_l20m10_yang}$



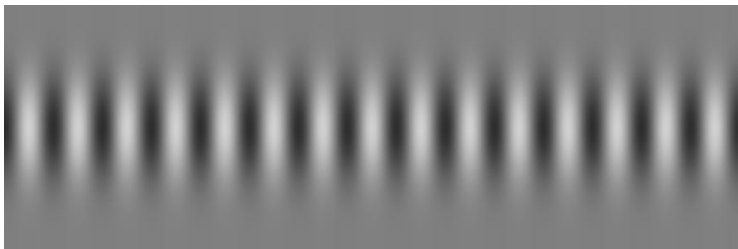
$Y_{lm}|_{l=20, m=10}$ Yin



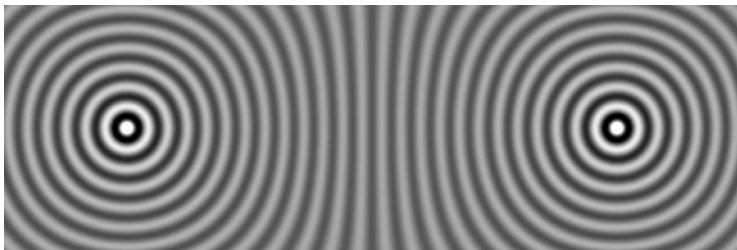
$Y_{lm}_{l=20m=20_yang}$



$Y_{lm}|_{20m20_yin}$



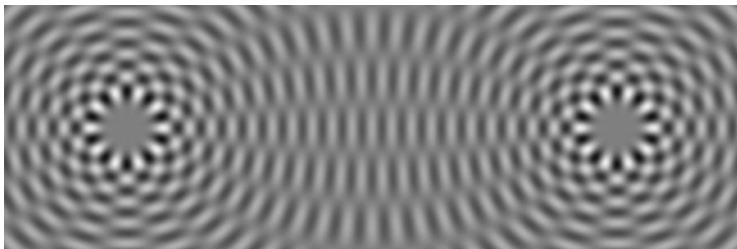
$Y_{lm}|_{50m0_yang}$



$Y_{lm}|_{50m0_yin}$



$Y_{lm}_{l=50m=10_yang}$



$Y_{lm}_{l=50,m=10}_{\text{yin}}$



$Y_{lm}|_{50m20_yang}$



$Y_{lm}_{l=50m=20}_{yin}$



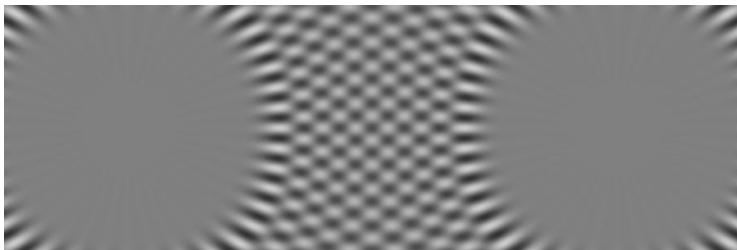
$Y_{lm}|_{50m30_yang}$



$Y_{lm}_{l=50m=30}_{yin}$



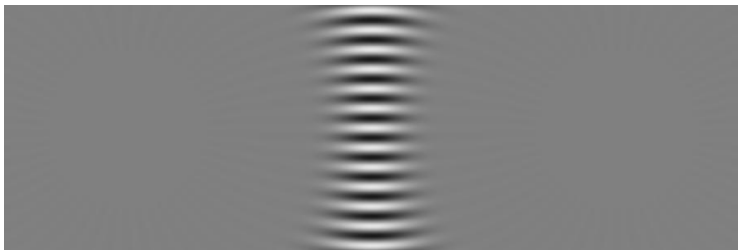
$Y_{lm}_{l=50m=40_yang}$



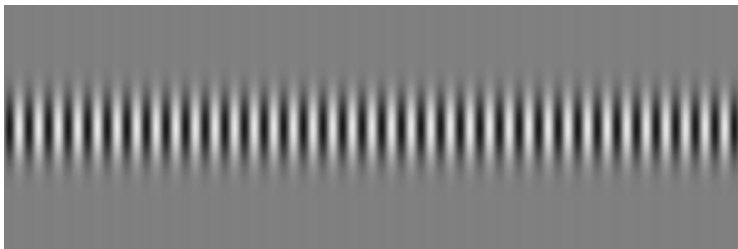
$Y_{lm}_{l=50,m=40}_{\text{yin}}$



$Y_{lm}_{l50m50_yang}$

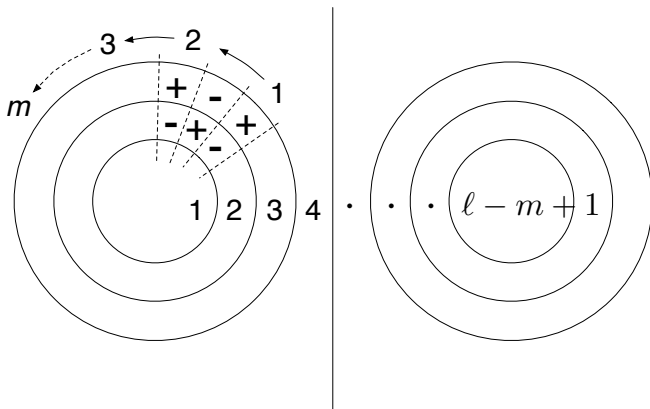


$Y_{lm}_{l=50,m=50}_{\text{in}}$



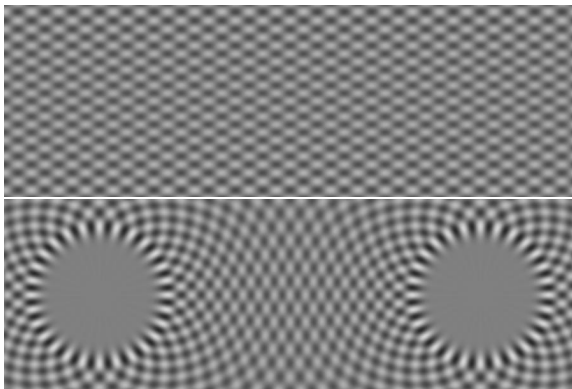
球面調和関数のパターン

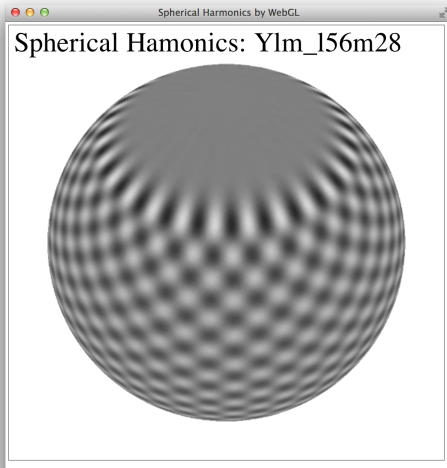
ヤン図で見た $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ の規則性



$$Y_{56}^{28}(\theta, \phi)$$

上：イン 下：ヤン





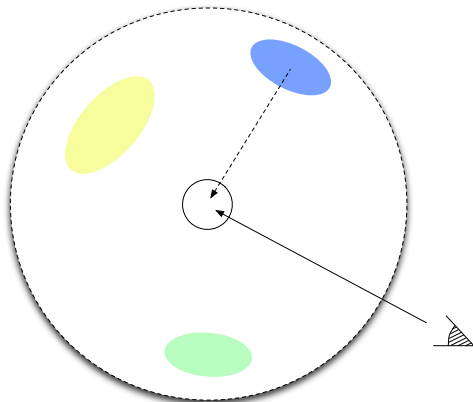
m が大きいとき、極付近はほとんどゼロ。⇒ 球面調和関数による時間発展問題の CFL 条件（の緩さ）の起源。

球面調和関数の使い方

応用 (1): 球面分布データの近似

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-L}^L a_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

コンピュータグラフィックス (照明) での応用



応用 (2): 発展方程式

L : 球面上の線形微分演算子

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\theta, \phi, t) = \mathbf{L}f(\theta, \phi, t)$$

f を展開 $f(\theta, \phi, t) = \sum_{\ell, m} a_{\ell}^m(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ すると、

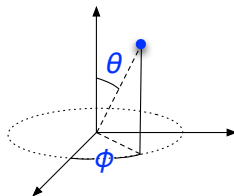
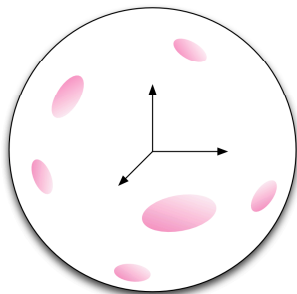
$$\sum_{\ell, m} \frac{d}{dt} a_{\ell}^m(t) Y_{\ell}^m = \sum_{\ell, m} a_{\ell}^m(t) \mathbf{L}Y_{\ell}^m = \sum_{\ell, m} a_{\ell}^m(t) \sum_{\ell', m'} M(\ell, m; \ell', m') Y_{\ell'}^{m'}$$

$M(\ell, m; \ell', m')$ は定数。問題は単なる常微分方程式系に帰着された。

$$\frac{d}{dt} a_{\ell}^m(t) = \sum_{\ell', m'} M(\ell', m'; \ell, m) a_{\ell'}^{m'}(t)$$

球面上の熱伝導問題

$$\frac{\partial f(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 f(\theta, \phi, t)$$



$$\frac{\partial f(\theta, \phi, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 f(\theta, \phi, t)$$

$$f(\theta, \phi, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell}^m(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

と展開すると $\nabla^2 Y_{\ell}^m = -\ell(\ell+1)Y_{\ell}^m$ より、

$$\frac{d}{dt} a_{\ell}^m(t) = -\kappa \ell(\ell+1) a_{\ell}^m(t)$$

これはすぐに解けて

$$a_{\ell}^m(t) = \alpha e^{-\kappa \ell(\ell+1)t}$$

初期温度分布を球面調和関数展開する

$$f(\theta, \phi, 0) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

$t > 0$ の解は

$$f(\theta, \phi, t) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi) e^{-\kappa \ell(\ell+1)t}$$

$t \rightarrow \infty$ での温度分布は

$$f(\theta, \phi) = \alpha_0^0 Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{\alpha_0^0}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\frac{\alpha_0^0}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_S f(\theta, \phi, 0) Y_0^0 \dagger dS = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\theta, \phi) dS = \text{初期平均温度}$$

$$f(\theta, \phi, t) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \phi) e^{-\kappa \ell(\ell+1)t}$$

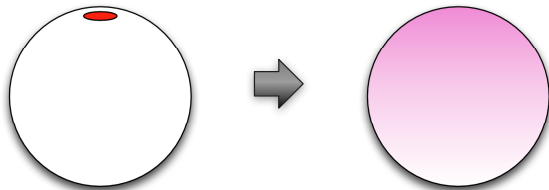
α_0^0 の次に、最も遅く減衰するパターンは $\ell = 1$ 。

$\alpha_1^0, \alpha_1^{-1}, \alpha_1^1$ の3つ。

初期条件で軸対称性があれば、 α_1^0 だけ。

$$f(\theta, \phi, t) \rightarrow \alpha_1^0 P_1^0(\cos \theta) e^{-2\kappa t} = \alpha_1^0 \cos \theta e^{-2\kappa t} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\alpha_1^0 = \int_S f(\theta, \phi, 0) P_1^0(\cos \theta) dS = \int_S f(\theta, \phi, 0) \cos \theta dS$$



球面調和関数の応用

- 量子力学
- 地球科学
 - 大気シミュレーション
 - 地磁気シミュレーション
 - 地球自由振動
- 天文学
- コンピュータグラフィックス
 - 大域照明

最後に

今回話せなかったこと

- Legendre 変換・逆変換の計算方法 (Gauss 積分 v.s. Dilts の方法)
- 高速アルゴリズム (FFT に相当するもの) について
- 球面調和関数ライブラリ
- 計算科学における具体的な応用例の紹介
- 非線形方程式の解法 (convolution、pseudo-spectral 法)

この講義資料について

以下の資料は私のホームページ[§]で公開する予定

- この講義資料 (PDF ファイル)
- 球面調和関数のインヤン展開図作成のための Mathematica コード
- 上の展開図を球面に貼り付けて表示する WebGL コード

[§]<http://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/index.ja.html>

球面調和関数は万能ではない

- Yin-Yang インヤン格子[¶]を使いましょう！

[¶]Yin-Yang Portal: http://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/yin_yang_grid/index.html