

地球ダイナモ

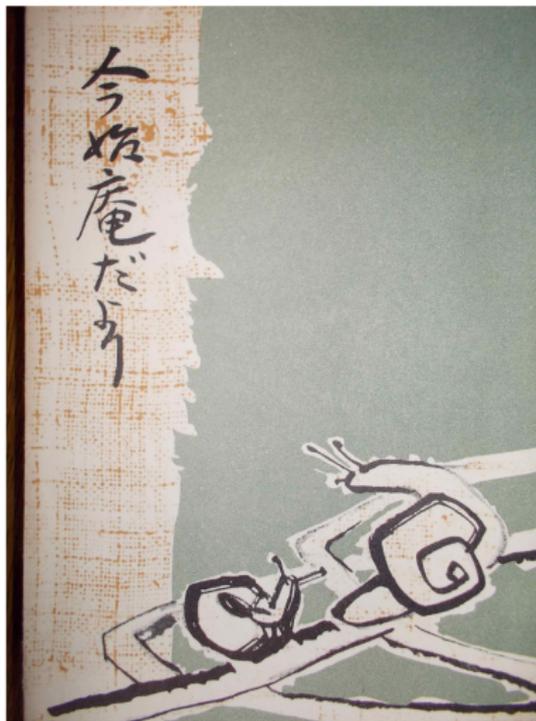
基本方程式と計算機シミュレーション

陰山 聡

神戸大学 システム情報学研究科 計算科学専攻

平成 25 年度前期 先端融合科学特論 (博士後期課程対象)
2013.07.31

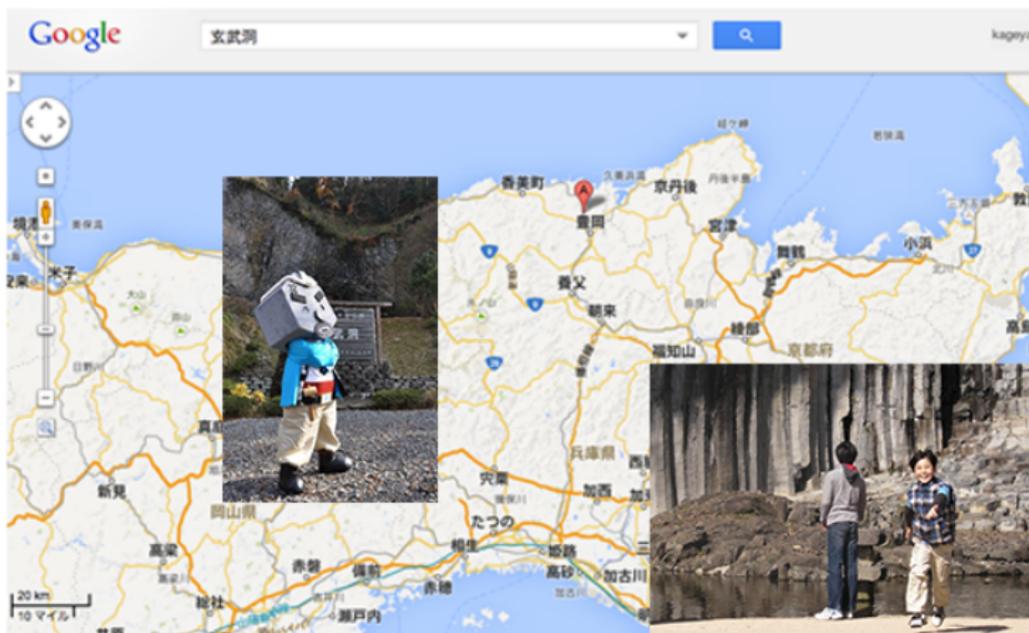
松山 基範 (まつやま もとのり) 1884 - 1958



私は兩三年前から此事を研究して居て、既に本州、九州等の内地は申すに及ばず、朝鮮及滿洲方面からも玄武岩を集めて、其磁性を測定して居るが、其結果として意外な事実を發見したのである。それは例へば此頃スキーの練習場となつて居る丹波夜久野の玄武岩の磁性の方向は、其北が真の北より十度余東に偏つて居る。此石は地質年代でいへば第三紀か又は其以後に噴出したものであるが、此外九州方面で明らかに第三紀以後に噴出した玄武岩があつて、之等は大概皆東十度乃至十五度位偏つた方向に磁性を受ける居る。更に有名な信馬の玄武岩の岩石を検査して見ると、これは殆ど反対であつて、其磁石の北極は南少し西に偏つた方向を指して居る。此玄武岩

昭和三年十二月十六日

玄武洞



目標

地球発電機

定式化

基礎過程

回転系

計算手法

結果

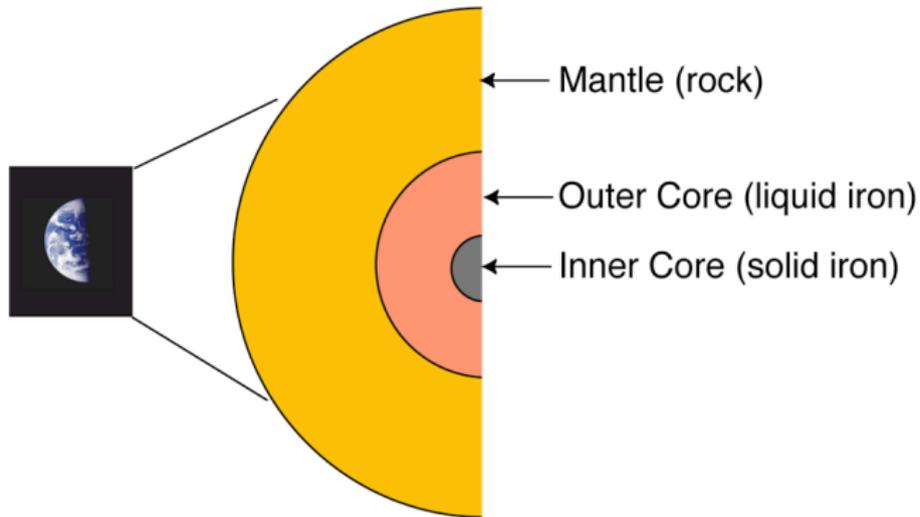
まとめ

この講義の目標

- 地磁気の起源を探る研究の紹介
- 単なる「お話」ではなく、各自の研究に役に立つものを。
- 普遍的なもの 方法と技術
 - 数理モデル
 - 計算手法

地球発電機

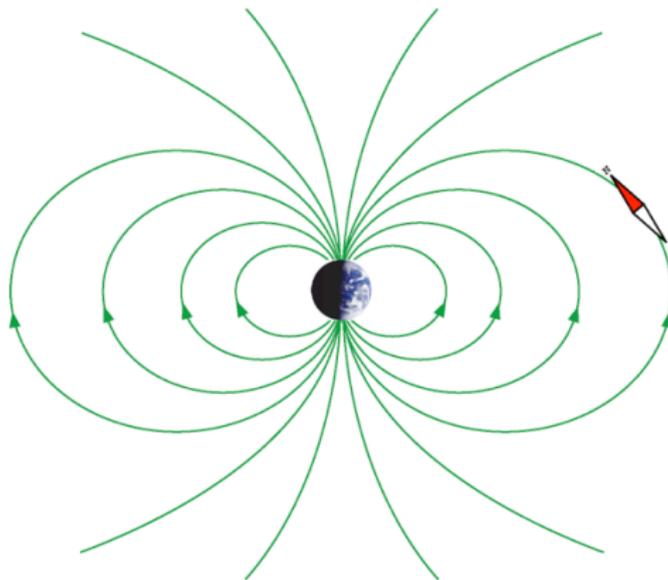
地球の構造



地球半径： 6370 km、 外核半径： 3480 km、 内核半径： 1220 km

地磁気 (地球磁場)

双極子磁場



地磁気の起源

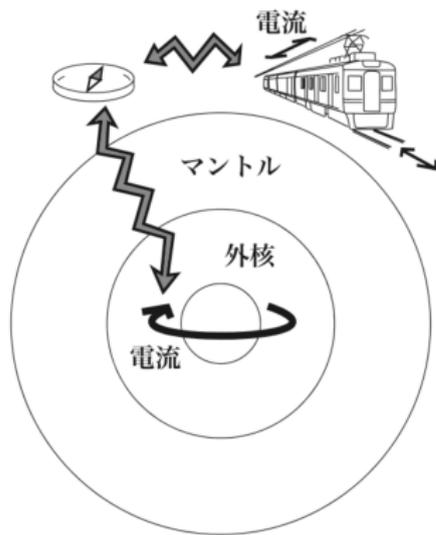
永久磁石ではない。 \therefore 核の温度 $>$ Fe のキュリー温度 ($\sim 1000K$)

\therefore 電磁石

双極子磁場 \iff リング状電流

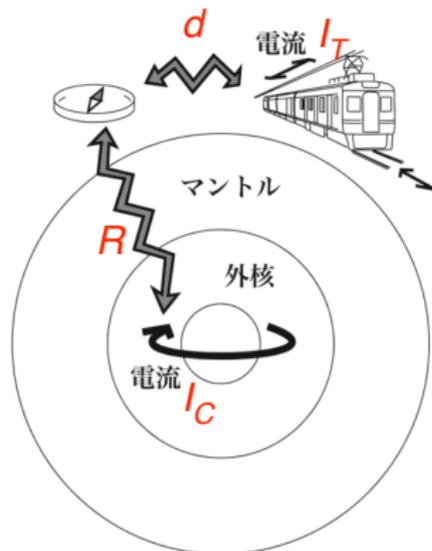
核内電流の評価

- 駅のホームでコンパスを見ると（私はいつもコンパスを持ち歩いている）針がフラフラと揺れるのに気付いた。⇒ 二種類の磁場強度が拮抗している。
- $|B_C| \sim |B_T|$
- B_C = 外核中のリング電流による磁場
- B_T = 電車の架線電流による磁場



核内電流の評価

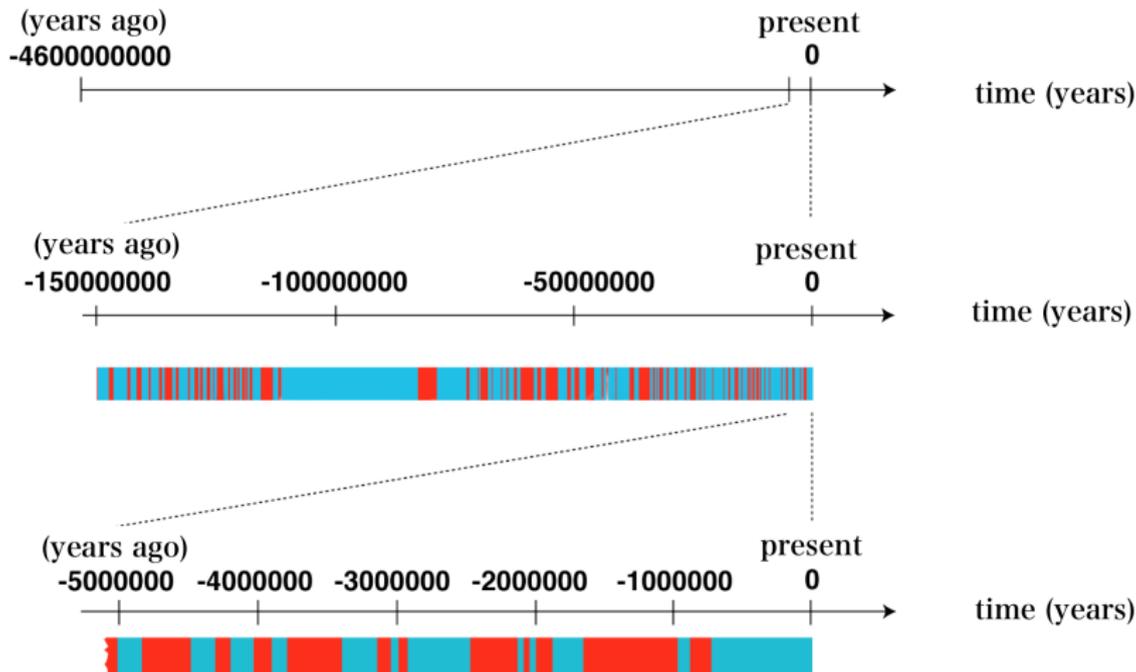
- 電車の架線電流による磁場
 $B_T \sim I_T/d/\mu_0$
- コア中のリング電流による磁場
 $B_C \sim I_C/R/\mu_0$
- $\therefore I_C = (R/d)I_T$
- $d \sim 5 \text{ m}$, $R \sim 5000 \text{ km}$,
 $I_T = O(10^3) \text{ A}$ とすると
- コア電流 $I_C \sim O(10^9) \text{ A}$
(10 億アンペア)



電磁石としての地球

1. 双極子磁場
2. 逆転

地磁気の逆転

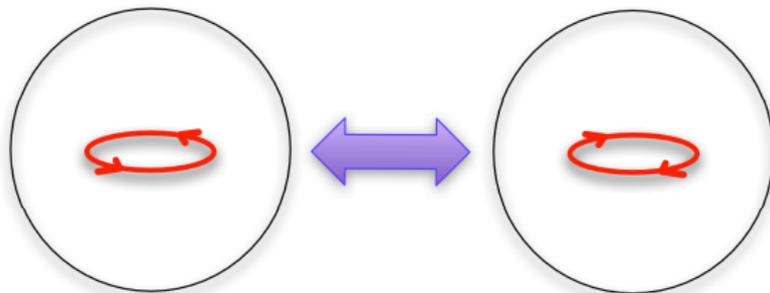


最近の逆転 = 約 78 万年前

最近の逆磁極期 = 「松山期」(Matsuyama Epoch)

地磁気を理解すること = コア電流を理解すること

空間分布（リング状） \iff 双極子磁場
反転 \iff 極性の反転



発電機としての地球

- 地磁気の生成 = コア電流の生成 \implies 発電
- 地球外核の液体鉄の流れ \implies 電流

「赤羽で今電気をたくところをこさえているが、それができるとはや…」こんな事を話している男があった。電気をたくという言葉が面白かった。日本語もこういうぐあいに活用させる人ばかりだったら…

寺田寅彦全集第三巻 p.77

問題の定式化

液体金属の流れによる発電作用

- 液体の流れ \Rightarrow Navier-Stokes eq.
- 電磁場の時間発展 \Rightarrow Maxwell eq.

Navier-Stokes eq.

流体の基本方程式

—
 ρ : 質量密度 p : 圧力 \mathbf{v} : 流れ速度ベクトル

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{G} + \mathbf{F}_\mu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)p + Q$$

—
 \mathbf{G} : 単位体積あたりの外力

\mathbf{F}_μ : 粘性項

Q : 加熱 + 状態方程式依存項

電気伝導性流体

電流密度 j と磁場 B による外力

$$G = j \times B$$

Maxwell's eqs.

誘電率 ϵ と透磁率 μ は一様とする。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu \mathbf{j}$$

—

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \epsilon$$

Pre-Maxwell's eqs.

電磁波を無視できるほどゆっくりとした時間変動に対しては、変位電流は無視できる*。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$0 = \nabla \times \mathbf{B} - \mu \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \epsilon$$

*だからこそ変位電流の存在はすぐには気付かれなかった。

電気伝導性流体中の Pre-Maxwell's eqs.

η : 電気抵抗とし、流体の透磁率は真空の透磁率 μ_0 と同じとする。

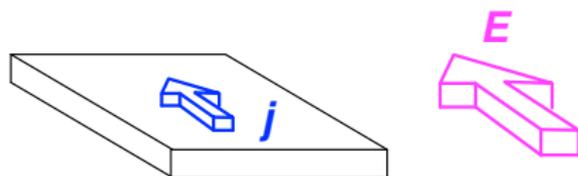
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

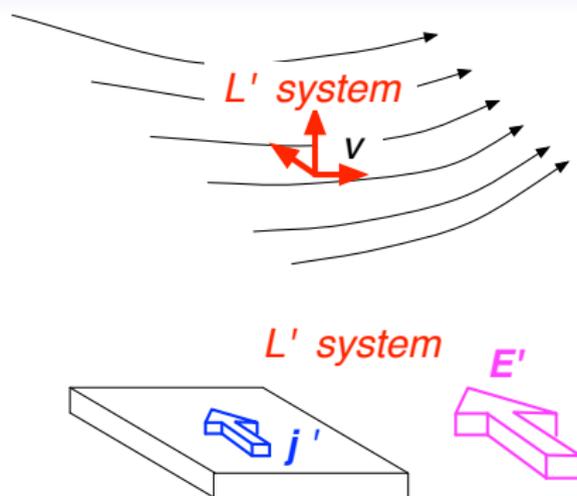
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j}$$

—
最後の式はオームの法則 + 電磁場のガリレイ変換



- 通常のオームの法則 : (電場 $E = \text{電気抵抗 } \eta \times \text{電流 } j$) は、静止した媒質に対する経験則。
- (電気伝導性) 流体であれば、流れのない ($v = 0$) 状態に対して成り立つ式。
- 流れがある流体に対してはどうなるか？



流体中のある領域に注目し、その位置での流れ v と同じ速度で動く局所慣性系 L' でその領域を観測すれば、 L' 系に対しては、通常のオームの法則が成り立つ。

$$E' = \eta j'$$

ガリレイ変換

静止系 L と、 L 系に対して速度 v で動く慣性系 L'

L 系で見た電場 E 、磁場 B 、電流 j

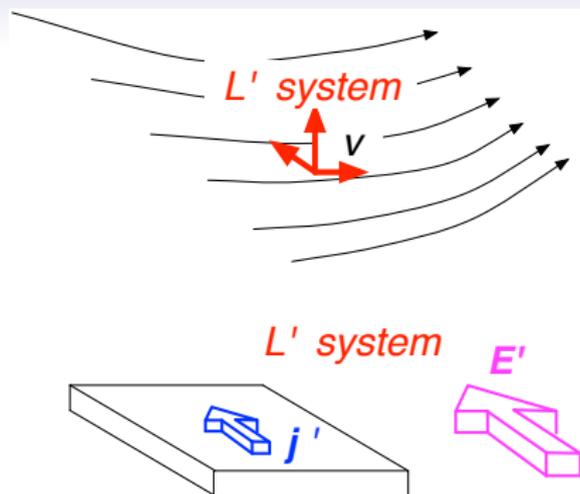
L' 系で見た電場 E' 、磁場 B' 、電流 j'

$$B' = B$$

$$E' = E + v \times B$$

$$j' = j$$

—
証明：ローレンツ変換で $|v| \ll c$ の極限をとる。



流体のそれぞれの場所で

$$E' = \eta j'$$

従って静止系 L から見ると

$$E = -v \times B + \eta j$$

MHD 方程式

電流による外力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ を考慮した Navier-Stokes eq.

+

pre-Maxwell's eq with Ohm's law

↓

Magnetohydrodynamics (磁気流体力学, MHD) 方程式

MHD eqs.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}' + \mathbf{F}_\mu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)p + Q$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

\mathbf{F}' : 重力等その他外力 \mathbf{F}_μ : 粘性力 Q : 加熱 + 状態方程式依存項

MHD ダイナモの基礎過程

MHD ダイナモ

- dynamo = 発電機
- 電流の生成 \Leftrightarrow 磁場のエネルギー生成
- MHD ダイナモ = 流れのエネルギーから磁気エネルギーへの変換
- 電磁誘導を通じて、運動エネルギーを消費して電流を作る
… 通常の発電機と同じ

磁気エネルギー

η は一様とすると

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

B との内積をとり、運動方程式を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \eta j^2$$

右辺第1項：流れが $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ force に逆らってする仕事

右辺第2項：ポインティングフラックス

右辺第3項：ジュール散逸

$\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ force

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$$

だからベクトル解析の公式より

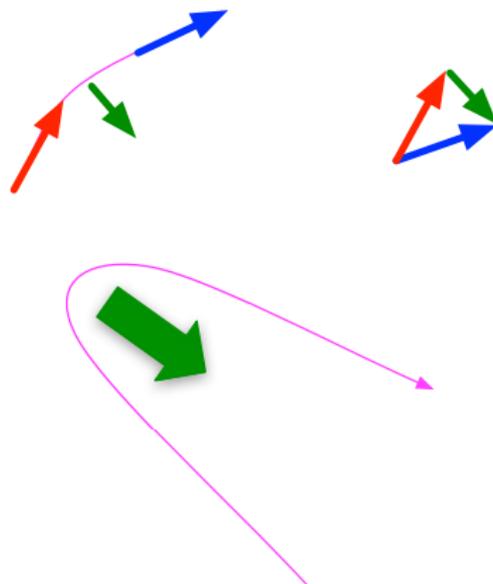
$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0$$

右辺第1項：磁気圧

右辺第2項：磁力線の張力

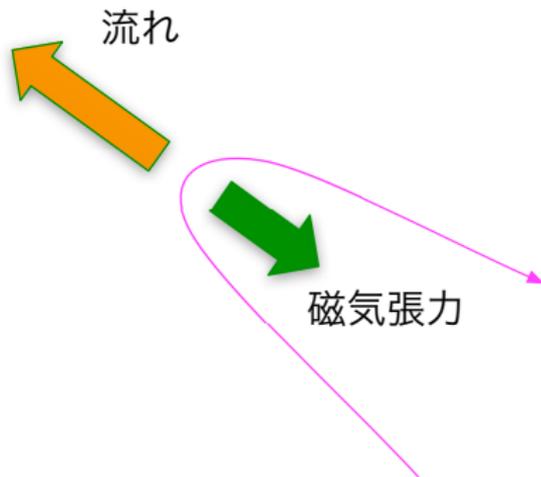
磁力線の張力

$$(B \cdot \nabla)B / \mu_0$$



磁力線の張力とは逆方向の流れがあるとき

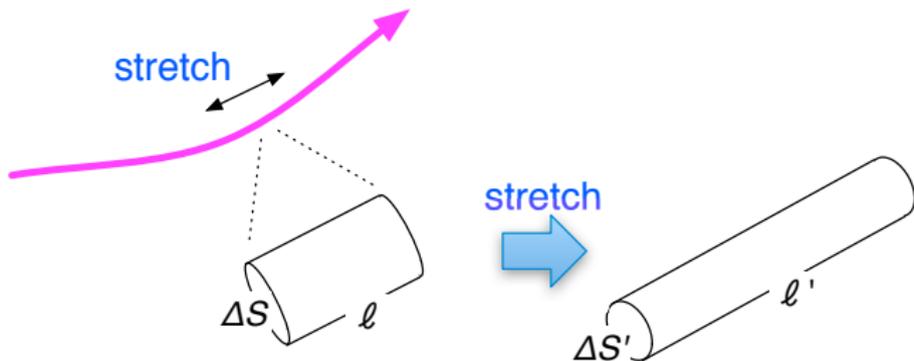
$$-\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0 > 0$$



流れエネルギーから磁気エネルギーへの変換 (MHD ダイナモ！)

磁場のエネルギー生成（もう一つの見方）

磁力線の引き延ばし（stretch）



密度一定 & 非圧縮流体の場合、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ だから、磁力線の線要素を l から $l' = 2l$ に伸ばせば、断面積は ΔS から $\Delta S' = \Delta S/2$ に。磁場 B' （= 磁束密度）は $2B$ に。従って磁気エネルギーは $e = (B^2/2\mu_0) \Delta S l$ から、 $e' = (B'^2/2\mu_0) \Delta S' l' = 4e$ となり、4倍に増加する（MHD ダイナモ！）。

磁力線の“凍り付き”

電気抵抗を無視する ($\eta = 0$)[†]。

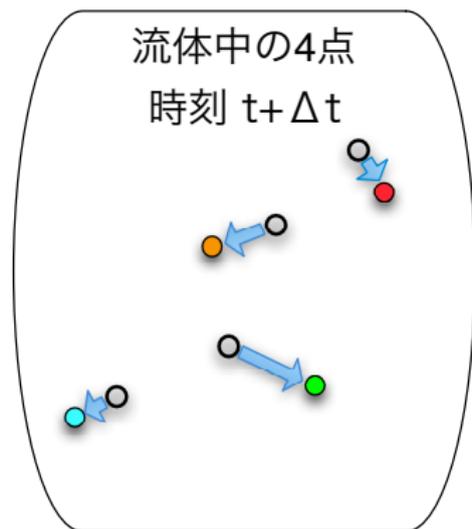
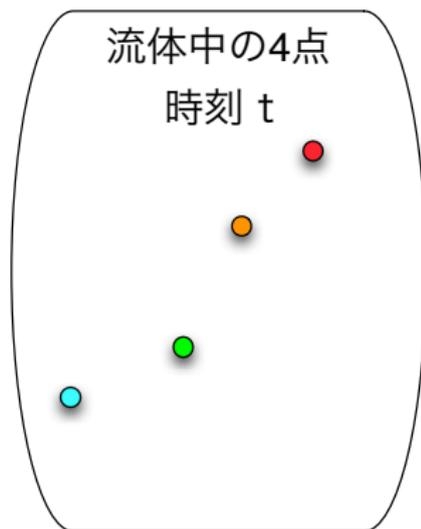
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

この式と

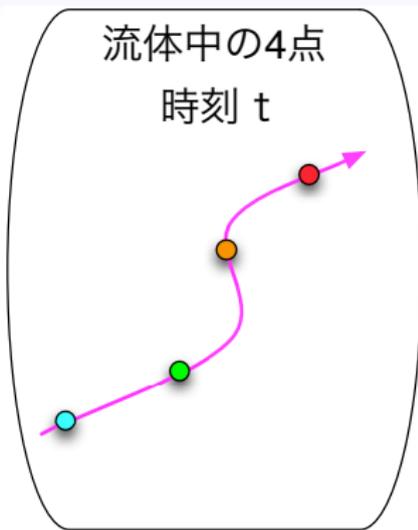
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

から、次の意味での「磁力線の凍り付き」が導かれる。

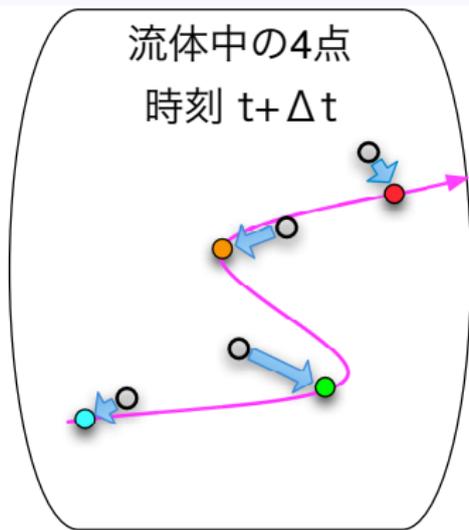
[†]理想 MHD という



流れによって移動した4点



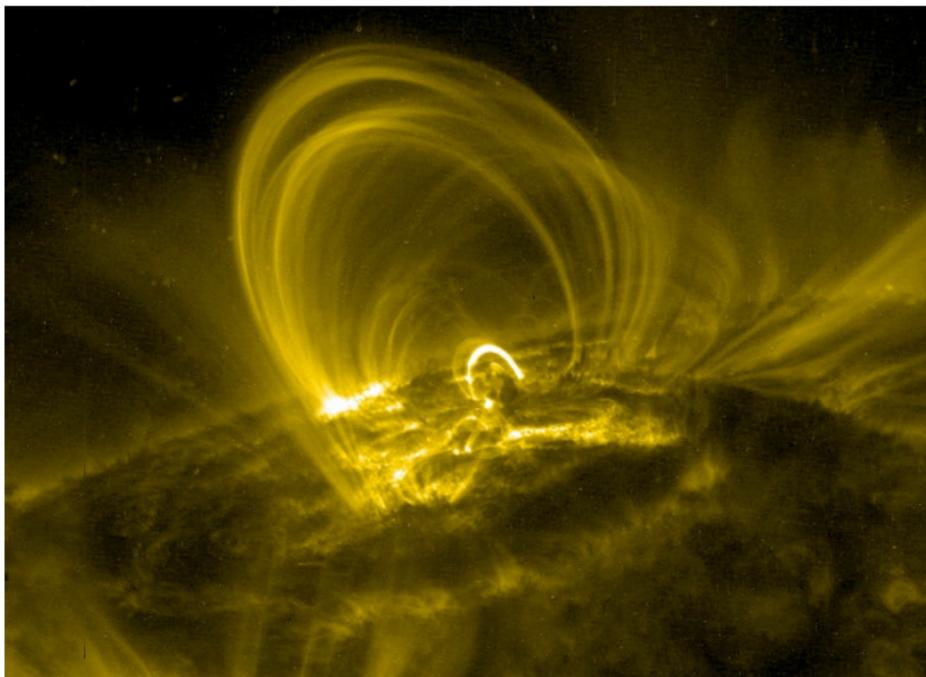
(たまたま) 一本の磁力線に乗っていたとする。



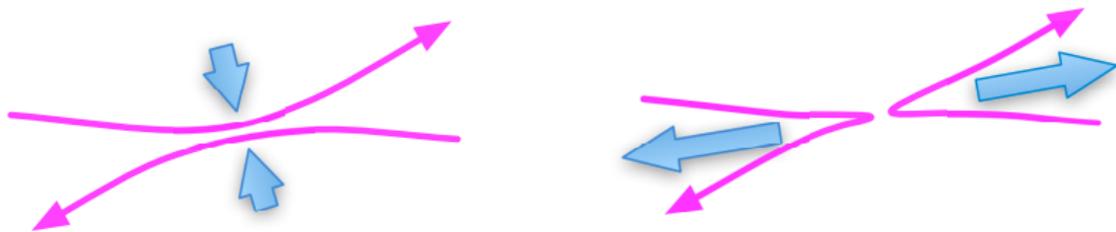
流れによって移動した4点。
やはり一本の磁力線に乗っている。

「同じ」磁力線が流れに乗って動いたと解釈することができる。
これを「磁力線の凍り付き」と言う。

太陽コロナ中の磁力線



磁気リコネクション



反平行の磁力線が押しつけ合う　電流 $j \propto \nabla \times B$ の増大　 ηj が無視できなくなる　凍り付きの前提条件が破綻　磁力線のつながりかえ　磁力線の張力によるジェット状の流れ

磁力線トポロジーの変化（理想 MHD では磁力線のトポロジーは変化しない）。

再掲：MHD eqs.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}' + \mathbf{F}_\mu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)p + Q$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

\mathbf{F}' : 重力等その他外力 \mathbf{F}_μ : 粘性力 Q : 加熱 + 状態方程式依存項

再掲：MHD 方程式

非線形方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}' + \mathbf{F}_\mu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) p + Q$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

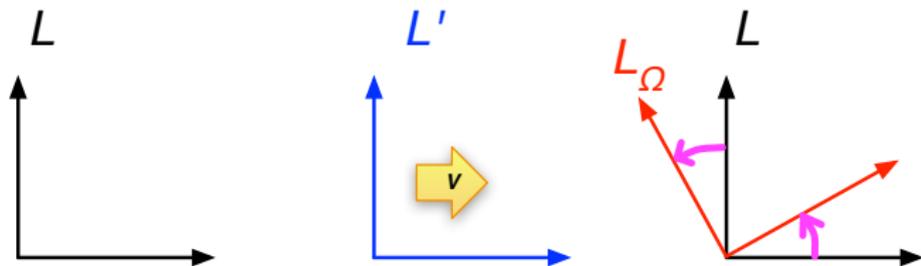
解析解は無理 \implies 数値シミュレーション (MHD シミュレーション)

地球の自転

- 地球外核の流れの時間スケール (対流の turn over time)
 $\sim O(10^3)$ years
- 地球の自転 = 1 日
- 慣性系で解くよりも地球 (コア) と共に回転する系で解く方が便利。

回転系での時間発展方程式

復習



ある慣性系 L で物理量 ψ の時間発展が $\frac{\partial \psi}{\partial t} = F(\psi)$ で与えられているならば、別の慣性系 L' でも同じ形の時間発展方程式に従う (ガリレイの相対性原理): $\frac{\partial \psi'}{\partial t} = F(\psi')$

しかし、一定角速度 Ω で回転する回転系 L_Ω (\neq 慣性系) では同じ形になる保証はない。

回転系での方程式の導出

ベクトル \mathbf{a} の速度 V の慣性系へのガリレイ変換をオペレータ G^V を使って

$$\mathbf{a} \Rightarrow G^V \mathbf{a},$$

座標軸を角度 θ だけ回転した時のベクトルの成分の変換を行列 R^θ を使って

$$\mathbf{a} \Rightarrow R^\theta \mathbf{a},$$

と書くと、慣性系で見たベクトル場 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ を（原点を共有し）一定の角速度 Ω で回転する回転系 \hat{L} で見たときのベクトル場 $\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ の時間変化は以下の式で書ける[‡]。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{a}}}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}, t) = R^{\Omega t} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\Omega \times \mathbf{x}) \cdot \nabla - \Omega \times \right] G^{\Omega \times \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$$

[‡]詳細は Kageyama & Hyodo, G-cubed, 10.1029/2005GC001132 (2006) を参照。

回転系の Navier-Stokes 方程式

上の変換則を Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

に適用すると、角速度 Ω で回転する系では

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = -(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}} + 2\hat{\mathbf{u}} \times \Omega + (\Omega \times \hat{\mathbf{x}}) \times \Omega$$

を得る。右辺第3項と第4項は「見かけの力」を表す。それぞれコリオリ力と遠心力である。

回転系の Maxwell 方程式

次に、慣性系における誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

に前述の変換則を適用すると、面白いことにいくつかの項がキャンセルして、慣性系と同じ形の式

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\nabla \times \hat{\mathbf{E}}$$

を得る。つまり回転系の誘導方程式には「見かけの誘導項」は存在しない（前述の論文参照）。

地球ダイナモシミュレーションモデル

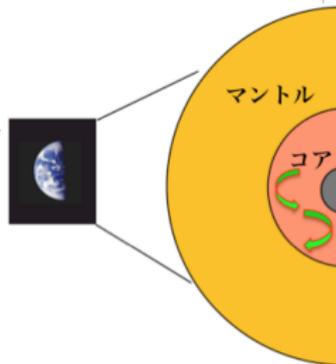
Compressible MHD equations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{f},$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{f}) - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + 2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \mu(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\gamma - 1)K\nabla^2 T + (\gamma - 1)\eta \mathbf{j}^2 + (\gamma - 1)\Phi,$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E},$$

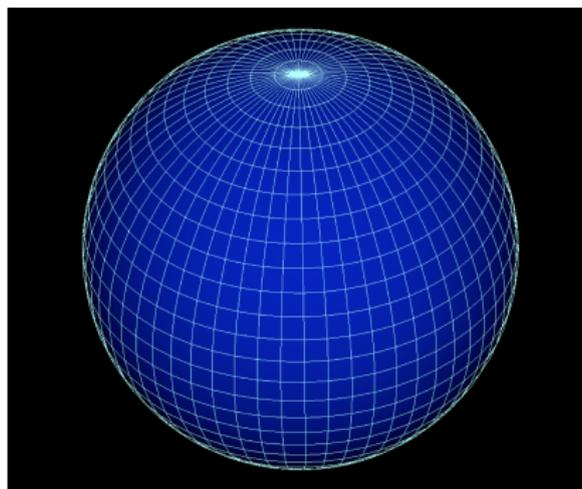


シミュレーション計算手法

球ジオメトリでのMHDシミュレーション手法

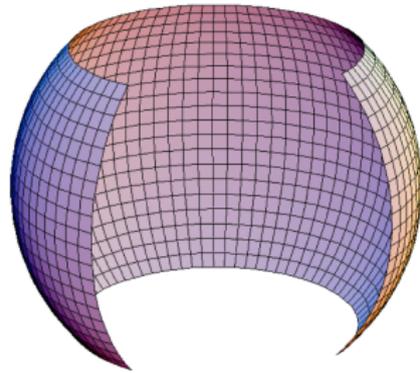
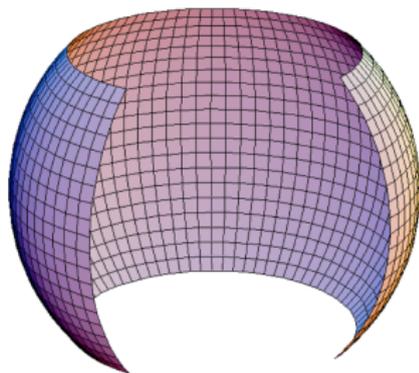
- スペクトル法（球面調和関数展開、ベルトラミ関数展開）
- 有限要素法
- 有限体積法
- 有限差分法
- 二重（緯度・経度）フーリエ法

緯度経度格子の問題点

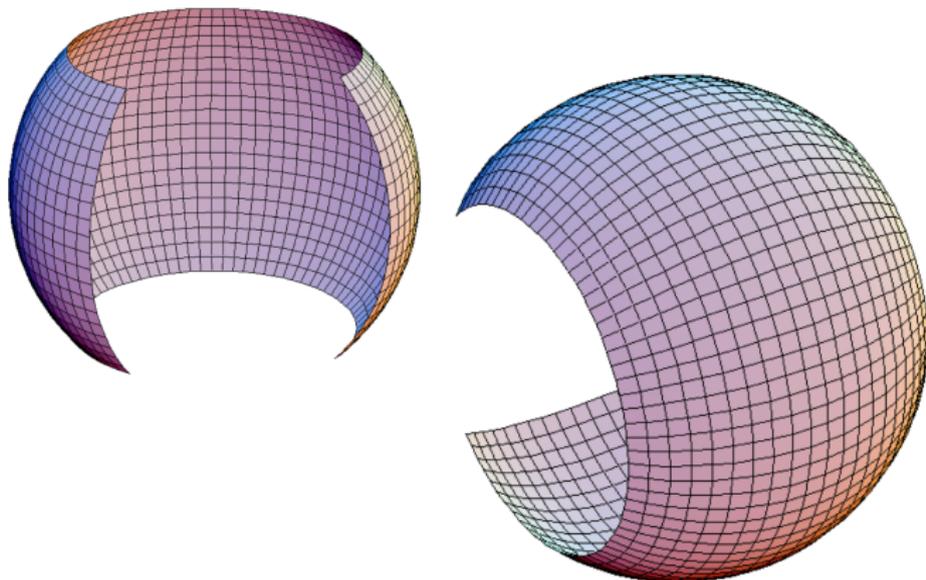


- 極 ($\theta = 0, \pi$) での座標特異点 \Rightarrow ロピタルの定理で解決可能
- 極近くでの経度方向の極端に短い格子間隔 (厳しい CFL 条件) \Rightarrow フィルターで解決可能 (だが遅い)
- 極近くでの格子点の無駄な集中 \Rightarrow 解決不可能 (フィルターと合わせると無駄の自乗)

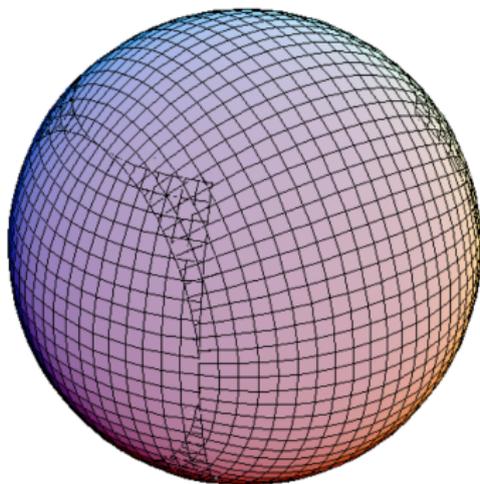
インヤン (Yin-Yang) 格子



インヤン (Yin-Yang) 格子



インヤン (Yin-Yang) 格子

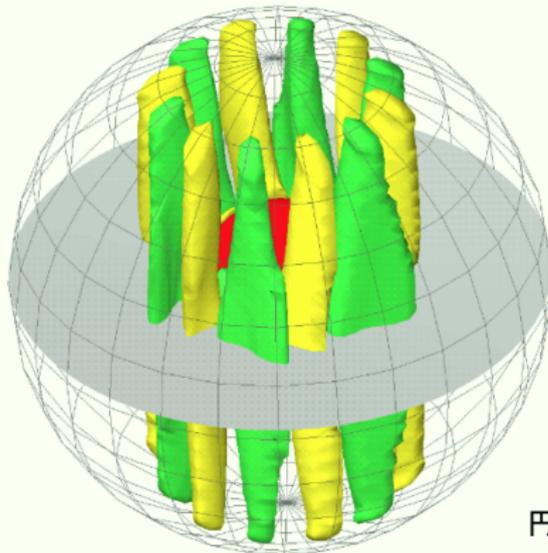


二つの要素格子は相補的

シミュレーション結果

対流構造

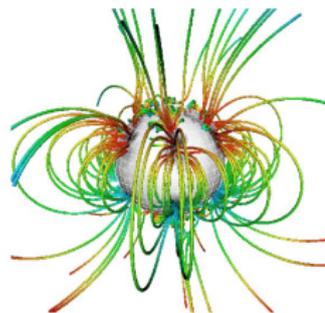
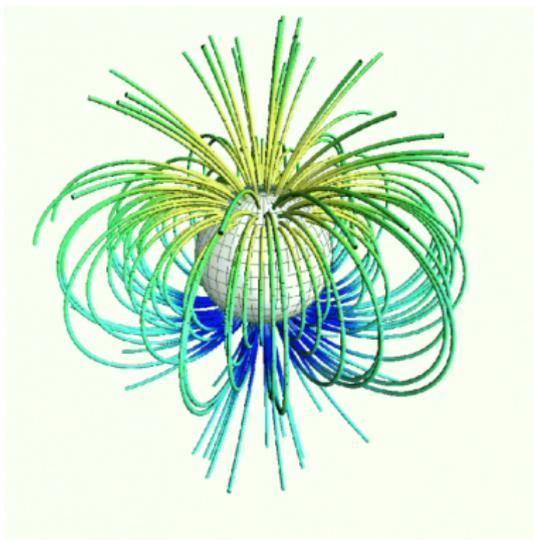
渦度の回転軸方向成分



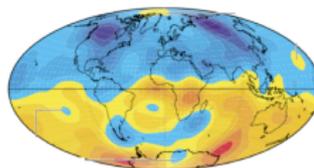
円柱状の対流構造

Kageyama & Sato, Phys. Plasmas, 1993

双極子磁場の生成

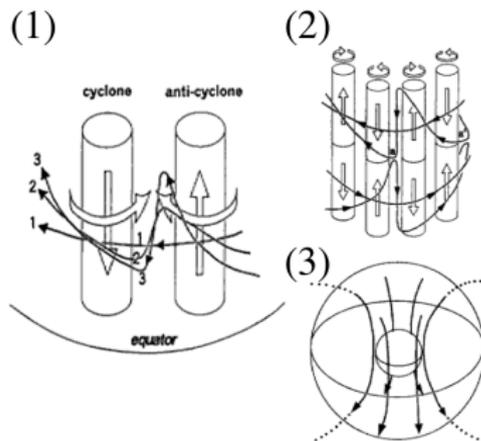
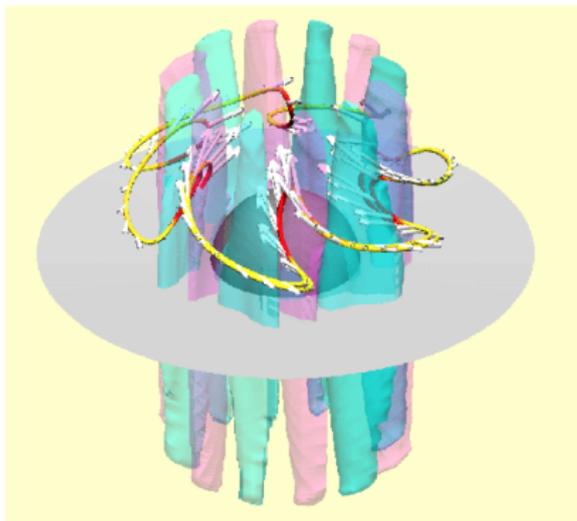


コア表面上の磁場分布

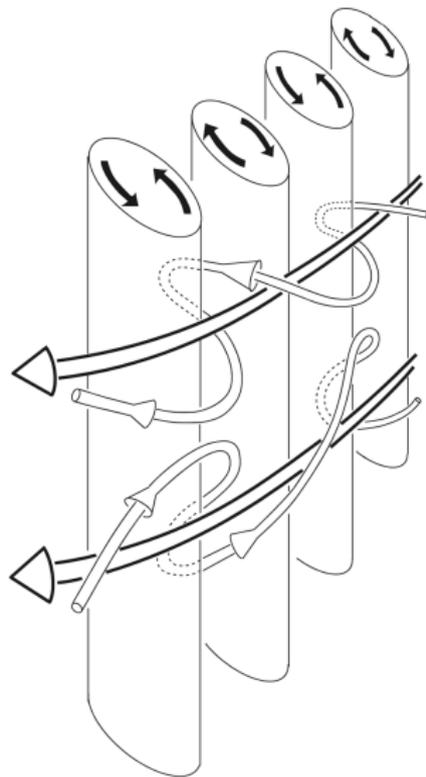


Kageyama and [Sato](#), 1997, [Phys. Rev. E](#)

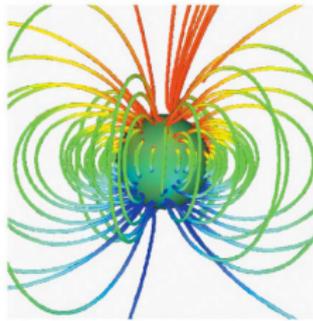
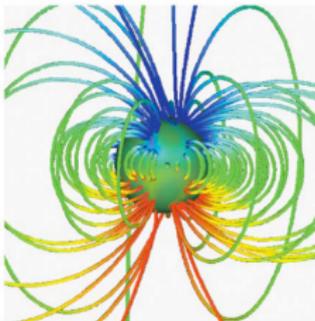
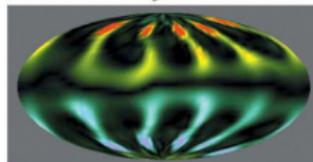
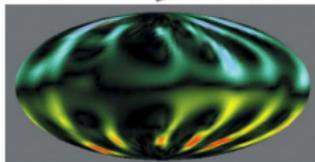
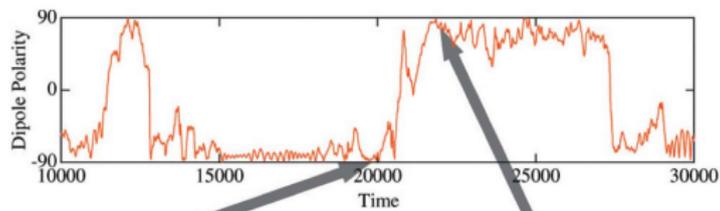
双極子磁場生成機構



双極子磁場生成機構



双極子磁場の逆転



Li, Kageyama, Sato, 2002, Science

高解像度計算

- **Rayleigh number**

- $Ra = 2.0 \times 10^8$ (at top)
 - $= 1.5 \times 10^{10}$ (at bottom)
 - $= 300-1000 \times Ra_c$

- **Prandtl number**

- $Pr = 1$

- **Magnetic Prandtl number**

- $Pm = 1$

- **Ekman number**

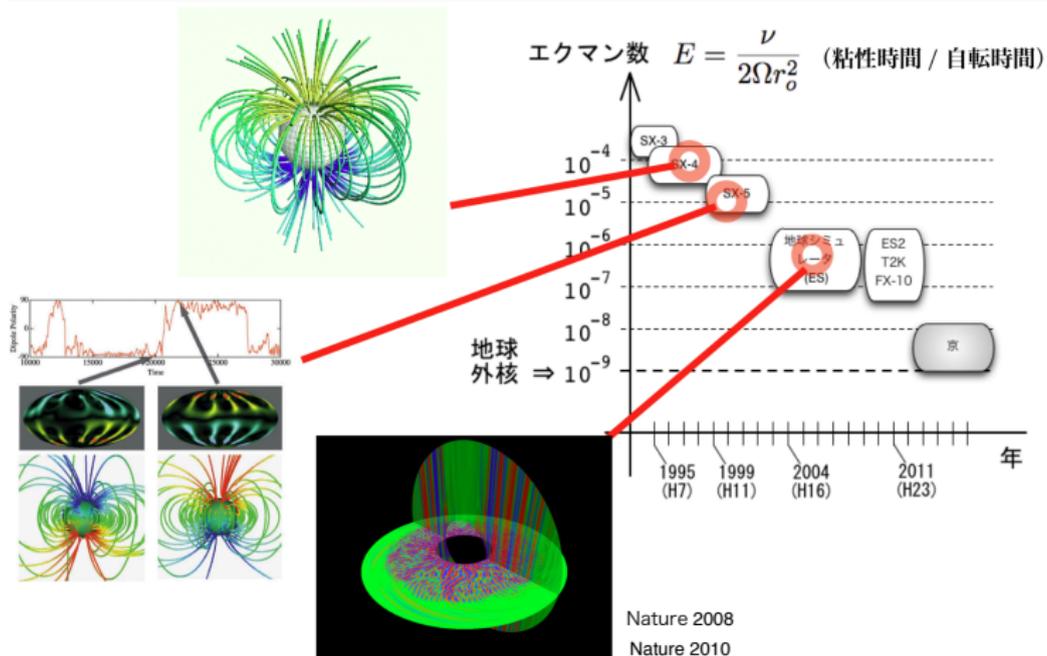
- $E = 2.3 \times 10^{-7}$ [World record]

$$E = \frac{\nu}{2\Omega r_o^2}$$

- 4096 cores of Earth Simulator
- 15 TFLOPS (46% of peak performance)
- Gordon Bell Award (2004)

$$E = O(10^{-15}) \text{ in Earth's core}$$

高解像度計算



まとめ

- 地球は巨大な電磁石であり、巨大な発電機でもある
- 外核には 10 億アンペアの電流がリング状に流れている
- リング電流は数十万年に一度逆転する
- リング電流のダイナミクスは MHD 方程式で記述される。
- 回転系での MHD 方程式をスーパーコンピュータで解く地球ダイナモシミュレーション。
- 研究成果については簡単に紹介。