

# 数値計算のための解析力学

陰山 聡 (神戸大学システム情報学研究科 計算科学専攻)

平成 25 年度 後期 『解析力学 B』  
(工学部情報知能工学科 2 回生対象)  
講義資料  
ver.140129a

これは古いものです。最新 (H28 年度) の講義資料は

[http:](http://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/lectures/H28_latter>Analytical_Mechanics/index.ja.html)

[//www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/  
lectures/H28\\_latter>Analytical\\_Mechanics/index.ja.html](http://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/lectures/H28_latter>Analytical_Mechanics/index.ja.html)  
にあります。

これは神戸大学工学部情報知能工学科2回生向けの講義『解析力学 B』(平成25年度後期)用の資料です<sup>1</sup>。講義の進捗にあわせてこの資料も加筆・修正していきます。従って、この資料は今のところ荒削りであるだけでなく、内容にも誤りが含まれているかもしれません。わかりにくい記述や、不正確な表現、間違いに気がいたら講義の際、あるいはメールで指摘してください。

---

<sup>1</sup>昨年度よりも数値計算に重点をおいた内容です。

---

## 改訂記録

- 13.08.13** ver.130813 公開
- 13.10.03** ver.131003 導入部修正
- 13.10.10** 講義第 01 回
- 13.10.03** ver.131003b 式ラベル追加 (入江君の指摘)
- 13.10.09** article から book へ。自由度について追記。
- 13.10.10** 2 章 (ラグランジアン) 追記
- 13.10.10** ver.131010a 公開。講義第 02 回
- 13.10.10** 式修正 (立花君の指摘)
- 13.10.10** 式 7 カ所、語句 5 カ所修正、重複した章削除 (大羽君の指摘)
- 13.10.10** ver.131010b 公開
- 13.10.15** 式 1 カ所修正 (三好君の指摘)
- 13.10.17** 3 章 (「いくつかの準備」) 追記。
- 13.10.17** ver.131017a 公開。講義第 03 回
- 13.10.17** ver.131017b。微修正。公開。
- 13.10.21** ver.131021a。ベクトル変数のボールド体の修正 (入江君の指摘)
- 13.10.24** ver.131024a。未講義箇所削除。講義第 04 回。
- 13.10.24** ver.131024b。微修正。
- 13.10.31** ver.131031a。公開。第 05 回講義。
- 13.10.31** ver.131031b。吉永君、山本君、丹羽君、大羽君の演習問題解答掲載。一部問題修正 (重地君の指摘)。公開。
- 13.11.05** ver.131105a。演習問題解答修正 (大羽君の指摘による)。
- 13.11.07** ver.131107b。第 6 章「ラグランジアンからわかること」加筆。第 06 回講義。公開。
- 13.11.14** ver.131114a。第 6 章改名。第 7 章「対称性と保存則」加筆。二つの円の間の振り子の問題条件追記 ( $\theta \geq 0$ )。公開。第 07 回講義。
- 13.11.14** ver.131114b。微小な改訂。公開。
- 13.11.21** ver.131121a。第 8 章「運動方程式の数値的解法」作成。第 08 回講義。公開。

- 
- 13.11.28** ver.131128b。第 8 章一部注意事項追記 (重地君の指摘)。第 9 章「ハミルトン形式の力学」作成。第 09 回講義。公開。
- 13.12.05** ver.131205a。第 10 章「ハミルトン形式の力学 (2)」作成。第 10 回講義。
- 13.12.05** ver.131205b。演習問題の解 (寺本君、山本君、三好君による) 追記。公開。
- 13.12.06** ver.131206a。第 9.1 章改訂。ラグランジュ形式の数値計算上の不便さの部分。公開
- 13.12.12** ver.131210a。第 11 章「正準変換」作成。第 11 回講義
- 13.12.13** ver.131212a。正準変換の合成関数が正準変換であることの証明追記。公開
- 13.12.18** ver.131213a。運動が正準変換であることの証明、ポアソン括弧の正準変換不変性の証明、ヤコビ恒等式の証明追記。第 12 章「シンプレクティック形式とポアソン括弧」作成。
- 13.12.19** ver.131219a。微小な改訂。第 12 回講義。公開。
- 13.12.24** ver.131219b。12 章式 2 カ所誤記修正。玉水君の指摘による。
- 13.12.24** ver.131224a。第 13 章。作成。
- 13.01.09** ver.140108a。第 13 章「シンプレクティック積分法」。第 13 回講義。公開。
- 14.01.15** ver.140116a。第 14 章「ハミルトンの原理」作成。第 14 回講義。Appendix A「剛体の運動」と Appendix B「オイラー＝ラグランジュ方程式」作成。
- 14.01.20** ver.140117a。語句の修正。公開。
- 14.01.20** ver.140117b。p.92 の式修正 (脚注参照。2 乗が抜けていた)。入江君の指摘。
- 14.01.21** ver.140121a。p.79 の式修正 (脚注参照。d/dt が抜けていた)。式 (12.44) の符号修正。どちらも玉水君の指摘。
- 14.01.21** ver.140121b。p.76 微修正 (脚注 2 参照)。
- 14.01.29** ver.140129a。p.61 入江君の指摘により修正。その他、語句の微小な修正。

## はじめに

ニュートン力学と解析力学の違いについてまず簡単に述べておきます。

高校までの力学における基本的な概念は「力」でした。しかし、解析力学ではもはや「力」は中心的な概念ではありません。それに変わる基本的な存在がラグランジアンとハミルトニアンという関数です。この講義を通じてみなさんは、これらの関数の使い方を学びます。ラグランジアンやハミルトニアンは解析力学から生まれたものですが、力学の範疇を超えて、制御理論や経済学などにも登場する基礎的なものです。

ニュートン力学における基本方程式はニュートンの運動方程式という一つだけでした。解析力学には運動方程式がたくさん登場します。これらの式は見た目が驚くほど違うのですが、同じ力学問題に対しては当然のことながら同じ解を導きます。もちろんその解はニュートンの運動方程式を解いて得られるものと同じです。

どうせ同じ解になるのであれば、ニュートン運動方程式で十分ではないかと思うかもしれませんが、ニュートンの運動方程式はとても使いにくい方程式です。その使いにくさの原因の一つは、取り得る座標系が限定されているという点にあります。一方、解析力学の運動方程式は、座標系を大変自由にとることができます。その自由さ、おおらかさのおかげで解析力学はとても便利なものになっているのです。

解析力学で登場する運動方程式は、外見はかなり異なるとはいえ、時間に関する微分方程式であるという点ではニュートンの運動方程式と同じです。微分方程式とは、「ある時刻におけるその系の状態が、その時刻における系の時間変化（時間微分）を規定する」という式ですから、その系と共に時間発展していく、つまり年をとっていく我々人間が、その系を記述するには自然な記述の方法です。

ところが、解析力学には微分方程式とは全く異なる見方による運動の記述の仕方が出てきます。それは変分原理と呼ばれます。今、この瞬間の力学の系の状態がこれから来る未来を規定している、といった微分方程式的世界観とは待った異なる変分原理的な世界の見方、いわば時空を超越した視点からの世界の見方を是非味わっていただきたいと思います。変分原理で記述された運動の法則は極めて単純で、美しいとさえ表現できるようなものです。変分原理による力学の理解、その美しさを味わうためだけでも解析力学を学ぶ価値は十分にあると思います。

歴史的にも学問体系としてみても、解析力学は量子力学の基礎部分に位置づけられます。量子力学は現在の科学や技術の基盤ですから、解析力学の講義が、量子力学を学ぶための準備として位置づけられている理工系学部も多いようです。

神戸大学情報知能工学科においても、将来、量子コンピュータや量子化学計算などに関する研究や開発の道に進む諸君にとっては、量子力学の深い理解のために解析力学をしっかりと学ぶことは不可欠と言えるでしょう。しかしそれ以外の、むしろ多数の情報知能工学科の学生にとっては、そもそも量子力学を深く学ぶべき強い動機が少なくとも現在のところあまりないようです。解析力学はロボティクスなどで必要となる古典的な静力学や動力学の計算にも不可欠な知識なのですが、それでもやはり情報知能工学科の学生全体を考慮するとそこだけに重点を置いた講義をするのは問題があるようです。

このような状況の下、情報知能工学科の学生に解析力学をどのようにして教

えるべきか、私は過去数年間試行錯誤を重ねてました<sup>2</sup>。その結果、解析力学の数値計算への応用に重点を置いた教え方こそが最適であると思うようになりました。特に注目したのはシンプレクティック法と呼ばれる数値積分法です。シンプレクティック積分法とは、様々な分野において近年注目を集めている簡単でありながら強力な数値積分法です。数値積分はいうまでもなく情報知能工学科の諸君にとって不可欠と言えるものであり、実際、複数の講義においてルンゲ＝クッタ法に代表される様々な数値積分について基礎的なところから応用的なところまで学ぶことになっています。しかしながら、ルンゲ＝クッタ法などの数値積分法では不得意なある種の問題で威力を発揮するシンプレクティック法については、その簡単な紹介はあるにしても理論的な背景については詳しく学ぶ機会がありません。それは無理もない話で、シンプレクティック法の理論的背景というのはまさに解析力学そのものだからです。

そこでこの講義では、『量子力学を学ぶための解析力学』ではなく、『シンプレクティック積分法を学ぶための解析力学』を目指して講義を行うことにします。ただし、そのために学ぶべき事は実のところ伝統的な、『量子力学を学ぶための解析力学』的な講義とそれほど内容が異なるわけではありません。しかしながら講義の中でとりあげる様々な例や練習問題などには特徴が出ています。最終目標が数値計算なので、最終的な答えを得るために計算機を用いることを避けることはせず、むしろ積極的に数値計算（あるいは計算機シミュレーション）を行うことを前提とできるからです。

普通、解析力学の教科書に出てくる例題や練習問題は、似通っているものが多く、あまりバリエーションがあるようには見えません。これは解析力学で解ける問題の種類が限定されているというわけでは決してありません。むしろ逆です。

解析力学が提供するもの、つまりこの講義で学ぶことは、結局のところ方程式を立てるためのアルゴリズムです。与えられた特定の力学の問題に対して、適切な座標を設定すれば、解析力学の機械的な手続きに従って微分方程式（＝運動方程式）を立てることができます。ここまでが解析力学の仕事で、その微分方程式を解くことは別の問題です。

ところが、多くの力学問題に対しては、そうして立てた微分方程式を解析的に、つまり計算機なしで解けるような場合はむしろ例外です。解析力学の教科書で採用される例題が似通っている理由はここにあります。「この力学の系を解くための方程式はこうだが、この方程式の解を計算することはできない。」という例題ばかりではまずいので、解析的に解ける形の微分方程式に定式化されるような力学の問題が集められる傾向にあるわけです。もちろん、実際には方程式の一般解を解く必要はなく、ある種の近似の適用すると解析的に解ける微分方程式が導かれるような力学の例題は多数ありますし、実際、多くの教科書に載せられています。しかしながらそのような近似はほとんどの場合、「平衡状態からのずれが微小」という近似で、そのような近似から得られるのは後に述べる調和振動子系（バネと質点の系）に問題と等価なものばかりとなりがちです。従ってやはり似通った問題ばかりになってしまうわけです。

ところが、最初から計算機を使う覚悟でいけば、そのような遠慮はいりません。具体的な例を挙げてみましょう。二つの質点（質量  $m$ ）がバネ（自然長  $l_0$ ）でつながれ、それぞれ放物線  $y = x^2 + 1$ （上側）と  $y = -x^2 - 1$ （下側）上に拘束されているとします。この二つの質点はどう運動するのでしょうか？力学の問題設

<sup>2</sup>2009 年以来

定としては極めて単純です。高校生にも分かる内容ですし、時間をかければこの問題に対するニュートンの運動方程式を立てることができるかもしれません。でもその解を求めることはきっと難しいでしょう。

この講義で解析力学を学べば、実際にはこの程度の問題であれば、この講義の最初の数回を聞くだけで、この問題に答えるためのニュートンの運動方程式ではない別のもっと簡単な運動方程式の立て方、その機械的手続き、アルゴリズムを知ることができます。そのアルゴリズムに従って運動方程式を立てることは極めて自動的で、簡単な微分計算に慣れていけば、ほとんど頭を使わないほどです。ところができあがった方程式は解析的には解けそうもない微分方程式です。だからこそ、このような例題が解析力学の教科書にはあまり載っていないのでしょう。

しかし、いくら長くて複雑な微分方程式でも、それを計算機を使って積分すれば解けます。これを数値積分といいます。ですから遠慮する必要はありません。この講義ではこのような問題、「単純で興味深いが、解析的に解けそうもない運動方程式になる力学の問題」を例題としてどんどん採用します。その一部は実際に数値積分を行って数値解を求めます。数値的に解いた解は映像にしてその振る舞いを直感的に分かりやすく表現することもあります。これをデータ可視化といいます。問題の定式化、数値計算による求解、そして計算結果の可視化という一連のプロセスは、計算機シミュレーションそのものです。ですからこの講義は計算機シミュレーションによる解析力学入門とも言えるかもしれません。

ただし、解析的に解くことを軽視するわけでは決してありません。紙とペンで解けることが明かな問題に対して、それと気付かずに数値計算して解こうとすることは恥ずかしいことです。計算機に頼らずに解けるはずの簡単な微分方程式を、きちんと自分の手で解けるようになることは理工系学生としては解析力学以前の教養と言えます。ですからこの講義はそのような簡単な微分方程式を解く訓練にもなるようにします。



# Contents

0.1	はじめに . . . . .	14
0.1.1	事務連絡 . . . . .	14
0.1.2	成績について . . . . .	14
0.1.3	レポートについて . . . . .	14
0.1.4	前提知識 . . . . .	14
<b>1</b>	<b>解析力学とは</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	まずは簡単な力学の問題を考えてみる . . . . .	17
1.1.1	例 1 . . . . .	17
1.1.2	例 2 . . . . .	18
1.1.3	例 3 . . . . .	20
1.1.4	数値解 . . . . .	21
<b>2</b>	<b>ラグランジアン (Lagrangian)</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1	座標と自由度 . . . . .	25
2.1.1	座標の表示と自由度 . . . . .	25
2.1.2	速度 . . . . .	27
2.1.3	ベクトルとその成分 . . . . .	28
2.2	ラグランジアン . . . . .	28
2.2.1	質点の投げ上げ問題 . . . . .	29
2.2.2	直線上の線形バネ . . . . .	29
2.2.3	平面上の線形バネ . . . . .	30
2.2.4	万有引力 . . . . .	31
2.2.5	バネが二つある場合 . . . . .	32
2.2.6	ラグランジアンの比較 . . . . .	33
2.3	課題 . . . . .	33
2.3.1	課題 1 . . . . .	33
2.3.2	課題 2 . . . . .	33
2.3.3	課題 3 . . . . .	34
<b>3</b>	<b>いくつかの準備</b> . . . . .	<b>35</b>
3.1	前回の復習 . . . . .	35
3.2	前回の課題の解答例 . . . . .	36
3.2.1	課題 1 の解答 . . . . .	36
3.2.2	課題 2 の解答 . . . . .	36

3.3	多自由度系のラグランジアン	37
3.4	いくつかの準備	38
3.4.1	万有引力と重力加速度	38
3.4.2	便利な近似式	39
3.4.3	エベレストの頂上はどれくらい重力が弱い？	40
3.4.4	扇型の円弧の長さ	40
3.4.5	合成関数の微分	40
3.4.6	偏微分	41
3.4.7	合成関数の時間微分	42
<b>4</b>	<b>ラグランジュの運動方程式</b>	<b>43</b>
4.1	ラグランジュの運動方程式の例	43
4.1.1	質点の投げ上げ	43
4.1.2	調和振動子系	44
4.1.3	直線に拘束された質点	45
4.1.4	滑りながら倒れる棒	46
4.1.5	2自由度の問題	48
4.1.6	バネ=質点2自由度系	48
4.2	問題	49
<b>5</b>	<b>ラグランジュの運動方程式：演習</b>	<b>51</b>
5.1	円とバネ	51
5.1.1	問題	51
5.1.2	解答（吉永君と山本君による）	52
5.2	双曲線滑り台	53
5.2.1	問題	53
5.2.2	解答（丹羽君による）	54
5.3	螺旋階段	56
5.3.1	問題	56
5.4	自転車	57
5.4.1	問題	57
5.4.2	解答（大羽君による）	57
5.5	ハーフパイプ	59
5.5.1	問題	59
5.6	円に挟まれた振り子	60
5.6.1	問題	60
5.6.2	解答	60
<b>6</b>	<b>運動方程式の共変性</b>	<b>63</b>
6.1	ラグランジアンの変換	63
6.1.1	定数分の変換	63
6.1.2	例	64
6.1.3	もう少し一般的な変換	65
6.2	電磁場中の荷電粒子	66
6.2.1	電磁場中の荷電粒子のラグランジアン	66
6.2.2	練習問題	67

6.2.3	ゲージ変換	68
6.3	ラグランジュの運動方程式の共変性	70
6.3.1	時間に依存しない点変換	70
6.3.2	時間に依存する点変換	72
<b>7</b>	<b>対称性と保存則</b>	<b>73</b>
7.1	循環座標と保存則	73
7.1.1	例 1	73
7.1.2	例 2	74
7.1.3	例 3	75
7.2	エネルギーの保存	77
7.3	空間の一様性と運動量の保存	78
7.4	ネーターの定理	79
<b>8</b>	<b>運動方程式の数値的解法</b>	<b>81</b>
8.1	数値積分	81
8.1.1	陽的一次オイラー法	82
8.1.2	2次ルンゲ=クッタ法	83
8.1.3	4次ルンゲ=クッタ法	84
8.1.4	連立微分方程式系	86
8.2	ラグランジュの運動方程式の数値積分	86
8.2.1	2階微分方程式系の一階微分方程式系への変換	86
8.2.2	実例	87
8.2.3	練習問題	91
<b>9</b>	<b>ハミルトン形式の力学 (1)</b>	<b>97</b>
9.1	ラグランジュ形式の不便さ	97
9.2	ルジャンドル変換	98
9.3	ハミルトニアン	100
9.4	正準方程式	101
9.5	ルジャンドル変換としての $L$ と $H$	101
9.6	例 1	102
9.7	ハミルトニアンとエネルギー	103
<b>10</b>	<b>ハミルトン形式の力学 (2)</b>	<b>105</b>
10.1	1自由度系の正準方程式の練習問題	105
10.1.1	問題 1	105
10.1.2	解	106
10.1.3	問題 2	107
10.1.4	解答	108
10.2	練習問題	109
10.2.1	問題 1	109
10.2.2	解答	109
10.2.3	問題 2	111
10.2.4	解答	111
10.3	多自由度系の場合	113

10.4	2自由度系の例	113
10.5	プログラム例	115
10.6	相空間	115
10.7	正準方程式のイメージ	117
10.8	リウヴィルの定理	118
<b>11</b>	<b>正準変換</b>	<b>121</b>
11.1	座標変換の必要性	121
11.2	正準変換の直接条件	125
11.3	正準変換の合成	127
11.4	正準変換の例	127
11.5	母関数	128
11.5.1	$W(q, Q)$ 型の母関数	128
11.5.2	例題：同心円のバネ=質点系	130
11.6	数値計算の限界	133
<b>12</b>	<b>シンプレクティック形式とポアッソン括弧</b>	<b>135</b>
12.1	シンプレクティック条件	135
12.2	ポアッソン括弧	137
12.3	ポアッソン括弧を使った運動方程式	139
12.4	ポアッソン括弧の正準不変性	140
12.5	正準変換としての運動	141
12.6	数値積分と正準変換	142
<b>13</b>	<b>シンプレクティック積分法</b>	<b>145</b>
13.1	シンプレクティック積分法とは	145
13.2	1次陽的シンプレクティック法	146
13.3	シンプレクティック性の由来	150
13.3.1	正準方程式の形式的厳密解	150
13.3.2	時間推進演算子が解ける例	151
13.3.3	シンプレクティック積分法の演算子による表現	153
13.3.4	合成変換による厳密解の近似	155
13.4	エネルギーの誤差	157
13.5	レポート課題	160
13.6	高精度化	160
<b>14</b>	<b>ハミルトンの原理</b>	<b>163</b>
14.1	汎関数と変分	163
14.1.1	例1：ライフガード問題	163
14.1.2	例2：最速降下線	163
14.1.3	例3：極小曲面	165
14.1.4	変分法	166
14.2	ハミルトンの原理	167
14.2.1	例（質点の投げ上げ）	167
14.3	ラグランジュの運動方程式	168
14.3.1	ハミルトンの原理の意味	170

---

14.4	変分原理からの正準方程式の導出 . . . . .	170
14.5	変分原理からのシンプレクティック積分法の導出 . . . . .	173
<b>A</b>	<b>剛体の運動</b> . . . . .	<b>177</b>
A.1	角速度 . . . . .	177
A.2	慣性モーメントテンソル . . . . .	178
A.2.1	円柱の慣性モーメント . . . . .	181
A.3	角運動量 . . . . .	182
A.4	練習問題 . . . . .	183
A.4.1	解答 . . . . .	184
<b>B</b>	<b>オイラー＝ラグランジュ方程式</b> . . . . .	<b>187</b>

## 0.1 はじめに

### 0.1.1 事務連絡

- 講師名：陰山 聡（かげやま あきら）
- 所属：システム情報学研究科 計算科学専攻
- 質問歓迎。随時受け付け。ただし、メールで確認してから研究室にくること。
- メールアドレス：echo pj.ca.u-ebok.sc@egak | rev
- 研究室の場所：自然研究棟 4 号館 8 階
- この講義のウェブページ：URL: <http://tinyurl.com/kageyama2013a>
- 教科書：名著がたくさんある。特に指定しないので図書館などでいろいろ見てみることに。

### 0.1.2 成績について

- 以下の重みでつける予定。定期試験：レポート：その他<sup>3</sup> = 6 : 3 : 1
- ただし、定期試験が高得点（目安として 9 割）の場合は無条件に S（秀）とする。

### 0.1.3 レポートについて

- レポートは原則、次回の講義時に紙で提出。毎回採点して返却する。
- 明らかに友人・知人のレポートを写したとわかる場合は、写した方も写させた方も減点する<sup>4</sup>。

### 0.1.4 前提知識

この講義では、これまでの物理や数学の講義で習ったはずの以下の言葉、概念は既知とする。

- 物理
  - 質点
  - 線形バネ
  - ニュートンの運動方程式
  - 慣性系
  - 運動エネルギー

<sup>3</sup>講義中の小テストや演習課題など。また講義やこの講義資料の間違い、あるいは分かりづらいところなどを指摘してくれた学生には加点します。

<sup>4</sup>だっどどちらがオリジナルか分かりませんからね。

- ポテンシャル
- 数学
  - テーラー展開
  - 合成関数の微分法

とはいえ、忘れている人もいるであろうから、講義の最初のところでこれらについて簡単な復習をする



# Chapter 1

## 解析力学とは

### 1.1 まずは簡単な力学の問題を考えてみる

バネ=質点系を考える。質点の質量は  $m$ 、バネ定数は  $k$ 、自然長  $l_0$  とする。

#### 1.1.1 例 1

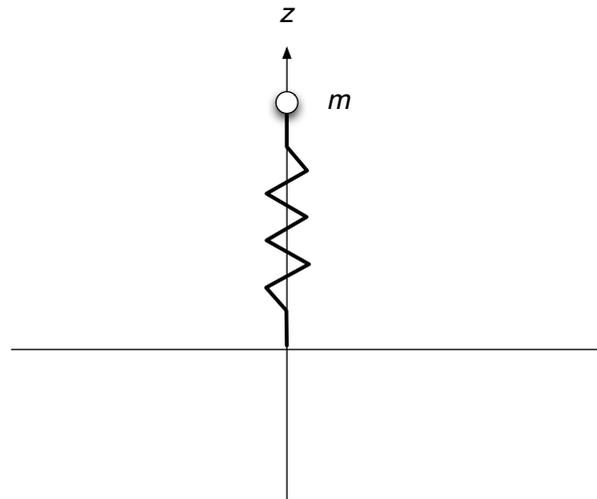


図 1.1: 直線 ( $z$  軸) 上の質点の運動。バネの一端は原点に、他端が質点に固定されている。

この質点の運動方程式を書いて、それを解いてみよう。  
まずはニュートンの運動方程式を思い出そう。

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$z$  軸上の位置を  $z$  とすると、 $z$  方向の速度は  $\frac{dz}{dt}$ 、 $z$  方向の加速度は  $\frac{d^2z}{dt^2}$  である。また、 $z$  方向の力は  $F = -k(z - \ell_0)$  である。

運動方程式に代入して  $z$  に対する微分方程式

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -k(z - \ell_0)$$

を得る。

この微分方程式を解いてみよう。座標を変換し

$$q := z - \ell_0$$

とすると上の微分方程式は

$$m \frac{d^2q}{dt^2} = -kq$$

となる。定数  $\omega$  を

$$\omega^2 := \frac{k}{m}$$

と定義すると解くべき微分方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

と簡単になり、すぐに解ける。つまり、 $c_1, c_2$  などを定数とすると

$$q(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2),$$

あるいは

$$q(t) = c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t)$$

である。つまり

$$z(t) = \ell_0 + c_1 \cos(\omega t + c_2).$$

が解である。

### 1.1.2 例 2

次に上の問題設定を少しだけ変えてみよう。

同じ質点とバネを今度は  $z = \ell_0$  (ちょうど自然長の位置) の直線上に置き、質点はこの直線上を滑らかに (摩擦なしで) 動くとする。バネの一端は原点に固定されている。

運動方程式を書いてそれを解いてみよう。

質点の  $x$  座標を  $x$ 、 $x$  方向の速度を  $\frac{dx}{dt}$ 、加速度を  $\frac{d^2x}{dt^2}$  とする。質点が原点方向に引かれる力を  $F_0$  とすると

$$F_0 = -k(\ell - \ell_0)$$

$$\ell = \sqrt{\ell_0^2 + x^2}$$

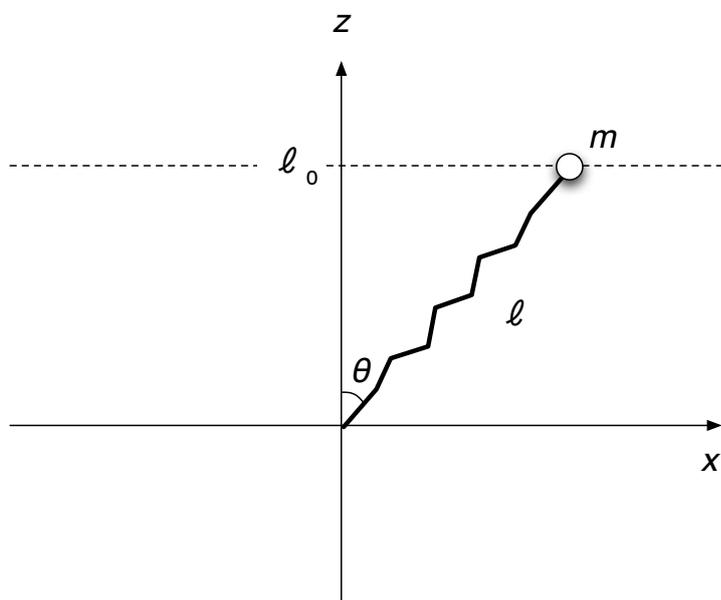


図 1.2: 質点は直線  $z = l_0$  上を滑らかに動く。

である。したがって  $x$  方向の力  $F$  は

$$\begin{aligned} F &= F_0 \sin \theta \\ &= F_0 \frac{x}{\ell} \\ &= -k(\ell - l_0) \frac{x}{\ell} \\ &= -kx \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + x^2}} \right) \end{aligned}$$

運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

に代入すると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + x^2}} \right) \quad (1.1)$$

これを解けと言われても、今度は簡単には解けない。仕方がないので

$$|x| \ll l_0$$

という近似を試みる。つまり  $z$  軸の近くで微小な振幅で振動するような解を探

すわけである。するとこのときには

$$\frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} \sim 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\ell_0} \right)^2$$

となるので<sup>1</sup>、運動方程式はこの近似の下で

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\ell_0} \right)^2 \right) \right\} = -\frac{kx^3}{2\ell_0^2}$$

となる。定数

$$\omega := \frac{k}{2m\ell_0^2}$$

を定義すると、この微分方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega x^3$$

という（見た目は）簡単な式になる。この微分方程式の解はワイエルシュトラスの楕円関数で書ける。

### 1.1.3 例3

上の二つの例では、ニュートン力学を知ってさえいれば簡単に運動方程式を立てることができた。ところが、簡単なバネ=質点系に限ったとしても、いつもこれほど簡単というわけではない。具体的に考えてみよう。図 1.3 で示すように、二つの放物線

$$y = x^2 + 1 \quad (\text{上側})$$

と

$$y = -x^2 - 1 \quad (\text{下側})$$

に二つの質点（質量  $m$ ）がそれぞれ放物線上に拘束されて動くとする。質点同士はバネ（バネ定数  $k$ 、自然長  $\ell_0$ ）で結ばれている。摩擦は無視する。この質点の運動を求めよ。

実際に解く前に解の様子をおおざっぱに予測してできるであろうか？二つの質点が自然長  $\ell_0$  よりも近い位置にあると反発力が働いて互いに遠ざかるように動く。逆に二つの質点が離れていたなら互いに近づこうとする。だが、距離だけで運動が決まるわけでは無論ない。質点の慣性があることを忘れてはいけない。二つの放物線の間隔は2だから、自然長  $\ell_0$  が2よりも大きいか小さいかで、二つの質点の運動の仕方はかなり変わりそうである。いろいろ予測が付かない中で、一つ確かなことは、「全エネルギーは保存する」ということである。つまりバネの持つエネルギーと二つの質点を持つ運動エネルギーの和は常に一定である。

<sup>1</sup>この近似がどうして成り立つかは講義で説明する

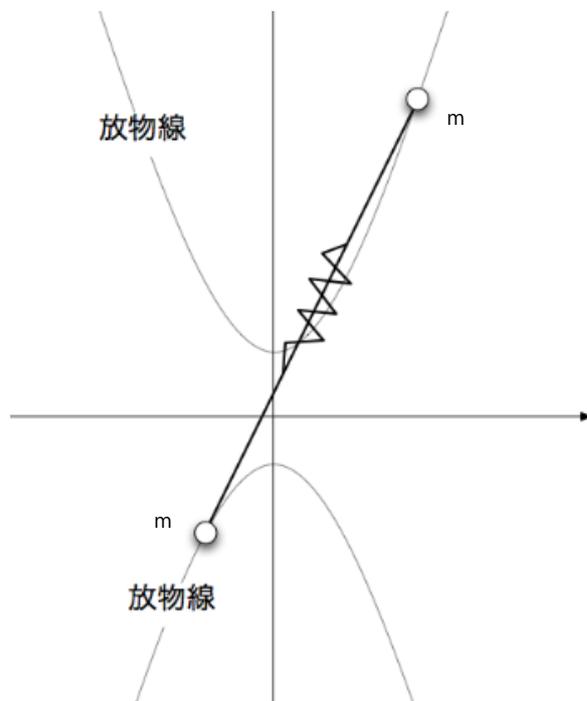


図 1.3: 放物線に拘束された二つの質点の運動。

#### 1.1.4 数値解

これほど簡単な問題であるにもかかわらず解析的な解を得ることは難しい。だが、これは驚くべき事ではない。重力で互いに引き合うわずか3つの質点の運動(三体問題)でさえ解析的には解けないことが知られている。

ここで「解析的に解けない」というのは、解くべき方程式(この場合は微分方程式)が分かっているのに、任意の初期条件の下でその一般解を求めるための数学的手段がない、という意味である。計算機のない時代であれば、それであきらめるしかなかったが、今は計算機を使うことで、その微分方程式の解を得ることができる。それは一般解という意味ではなく、特定の初期条件に対する解のある精度のもとで近似的に得ることができるという意味であるが、実用的にはそれで十分である場合が多い。

ではその解くべき方程式を導くのは簡単かと言えば、そうではないことはこの問題をニュートン力学の範囲で解こうとがんばった諸君は身にしみて感じているのではないかと思う。不可能というわけでは無論ない。それぞれの質点にかかる力のベクトルを考え、そのベクトルを放物線の接線方向とそれに垂直な方向に分解し、云々といった複雑な手続きを経れば二つの質点に対するニュートンの運動方程式を立てることはできる。

だが解析力学を学べば、そのような複雑な手順が一切不要となる。あるアルゴリズム(ラグランジュの運動方程式)に従って自動的に次のような方程式が得られる。

$$(1 + 4x_0^2)\ddot{x}_0 = -4x_0\dot{x}_0^2 - \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s - l_0}{s}\right) (\Delta x + 2x_0\Delta y) \quad (1.2)$$

$$(1 + 4x_1^2)\ddot{x}_1 = -4x_1\dot{x}_1^2 - \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s - l_0}{s}\right) (-\Delta x + 2x_1\Delta y) \quad (1.3)$$

ここで  $x_0$  と  $x_1$  はそれぞれの質点の  $x$  座標である。また式を短くするために以下の変数を導入しているが、本質的ではない。

$$\Delta x = x_0 - x_1$$

$$\Delta y = x_0^2 + x_1^2 + 2$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

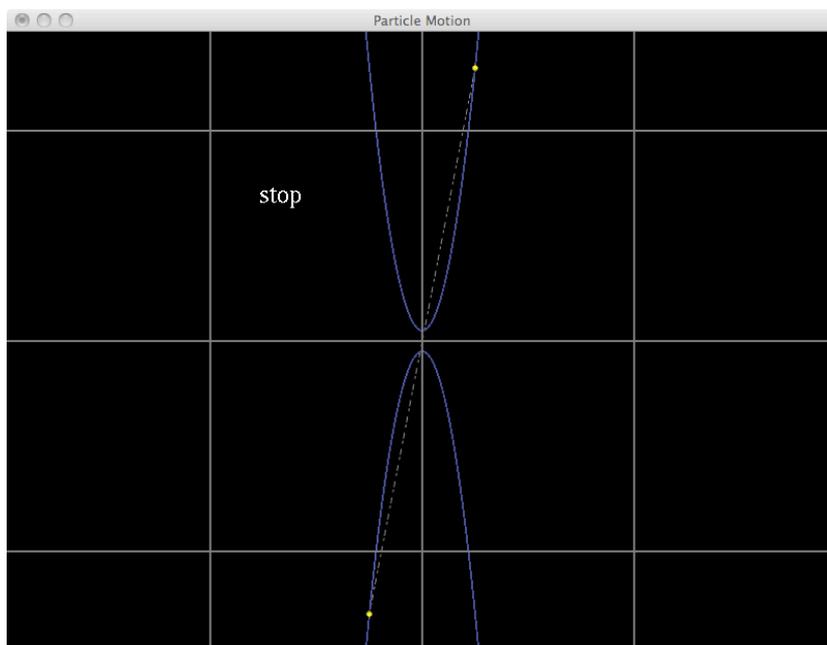
このラグランジュの運動方程式を導くアルゴリズムは極めて単純で、微分計算さえ間違わなければほとんど自動的に得られるものである。そのアルゴリズムがどのようなものであるかはこれからの講義のお楽しみとして、今はこの方程式をいかにして解くかという問題について考えてみよう。

上の二つの式 (1.2) と (1.3) は変数  $x_0$  と  $x_1$  に対する微分方程式系である。これを解析的に解くことはとてもできそうにないので、数値解を求めよう。微分方程式を解く操作を積分というのと同様、微分方程式を四則演算の問題に変換して数値的に近似解を得る操作を数値積分という。通常我々は時間  $t$  は実数であると考えている。数値積分では、稠密に分布する全ての時刻  $t$  での解を得ることを諦めて、有限の時間間隔  $\Delta t$  ごとの「飛び飛びの」時刻、 $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots$  ごとの解を求める方法である。この飛び飛びの時刻での解も厳密解ではなく、近似解である。

数値積分にはさまざまな方法があり、それぞれ一長一短がある。どのような問題でもそうであるが、方程式の近似解を計算機を使って求める場合、ある程度の誤差は常に存在する。誤差が小さい方法が望ましいのはもちろんであるが、 $\Delta t$  の時間刻み幅での数値積分をなんども繰り返しているうちに誤差が蓄積して「とんでもない」答えが得られるようでは困る。「とんでもない答え」とはたとえば今の場合、系の全エネルギー（バネのエネルギーと質点の運動エネルギーの和）が、数値積分を重ねているうちに大きく変わってってしまうような答えである。従って、エネルギーが厳密に保存することはできないにせよ、長時間数値積分してもエネルギーの値が大きくずれていくことはない数値積分法が望ましい。そのような方法は実際にあって、それはシンプレクティック積分法と呼ばれる。

シンプレクティック積分法に基づいて上の式 (1.2) と (1.3) を「四則演算化」する方法は、この講義の最後の方で紹介する。この講義を最後まできけば、その理論的な根拠を理解することができるであろう。

数値積分の計算結果は数字なので、それを目に見えるようにすることも重要である。（可視化という。）講義では、コンピュータグラフィックスの標準ライブラリ OpenGL を使って可視化する機能も含めた C++ コードを紹介し、実際にノートパソコンでそのプログラムを実行してみせる予定である。





## Chapter 2

# ラグランジアン (Lagrangian)

### 2.1 座標と自由度

#### 2.1.1 座標の表示と自由度

3次元空間のカーテシアン座標は

$$(x, y, z)$$

と書いたり、

$$(x_1, x_2, x_3)$$

と書いたりする。添字を使って

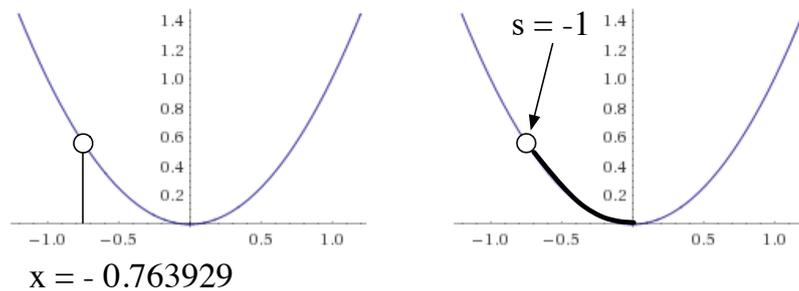
$$x_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

と書くこともある。

解析力学で使う座標系はカーテシアン座標系とは限らない。それぞれの問題に応じて便利な座標系を自由にとることができる。もちろん球座標や、円筒座標というカーテシアン以外の「普通の」座標系でもいいが、もっと自由で便利な座標をとってよい。

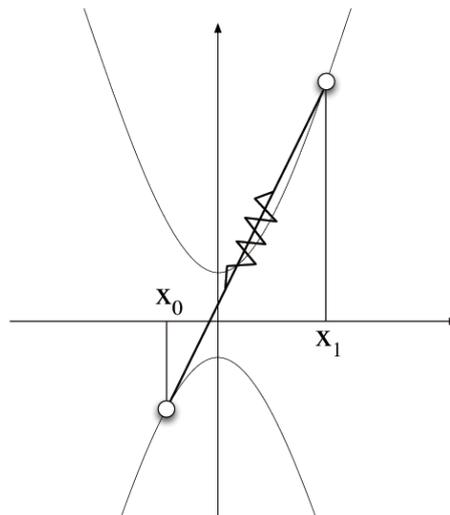
たとえば、一つの質点の運動を考えている場合、その質点の位置が指定できるなら、どんな座標をとってもいい。 $x$ - $y$  平面上の放物線  $y = x^2$  型のレールの上に拘束された（このレール上を滑って動く）質点を考えて、この質点の運動は  $x$  座標（だけ）を指定すれば一意に決まる。（ $y$  座標では無理だが。）あるいは原点を出発点としてレールに沿った符号付きの長さ  $s$  を座標としても良い。たとえば  $s = -1$  というのは原点から  $x$  軸の負の方向に向かって1だけ滑った位置とする。こうすると  $s$  という実数を一つ指定すれば質点の位置は一意に決まる。このような場合、「この系の自由度は1である」という。自由度が1のこの系の「状態」は  $x$  座標で示してもよい。

一つの質点が3次元空間中を3次元的な力のポテンシャルの下で運動する時、この系の自由度は3である。しかし、この質点が何らかの拘束条件の下で運動する時には、系の自由度は1または2になる。自由度が1の例は、上に書いたよう



に曲線上に拘束されて動く質点であり、自由度が2の系の例はある曲面上に拘束されて動く質点である。

自由度が2の別の例は、先週の講義で例としてあげた二つの放物線に沿って動く二つの質点（その間がバネで結ばれているもの）の系である。この系の空間的な配置を記述する座標の一つの例は図に示した  $(x_0, x_1)$  である。二つの実数を使って二つの質点の位置が一意に指定できるのであればどのような座標を使っても良い。たとえばそれぞれの放物線に沿った（符号付きの）長さを使った  $(s_0, s_1)$  も座標の例である。



二つの質点が3次元空間中を何も拘束されていない条件の下で運動するときの自由度は6である。

要するにその系の状態を記述するのに必要な実数変数の数とその系の自由度である。その系を記述するのに必要な変数を**一般化座標**という。

解析力学が便利なのは、どんな一般化座標系をとっても方程式の形が同じになるからである。上の例で言えば、（これから紹介する）ラグランジュの運動方程式で書くと、質点（質量を  $m$  とする）の運動方程式は、

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad (x \text{ に関する 2 階の微分方程式})$$

と書ける。また、

$$F(s, \dot{s}, \ddot{s}) = 0 \quad (s \text{ に関する 2 階の微分方程式})$$

とも書ける。ここでポイントは、上の二つの  $F = 0$  という微分方程式は、(中に入っている変数は  $x$  と  $s$  で異なっている) 微分方程式の形として全く同じであるということである。ニュートン力学ではこうはいかない。

ある系に対して、ある瞬間のスナップ写真をとった時、その系のその瞬間における「状態」を記述するのにいくつの実数が必要なのかというその数が系の自由度である。だが正確に言えばスナップ写真だけでは、その瞬間のその系その「状態」を完全には記述できない。その瞬間の後、系がどう変化するか (質点の場合にはどの方向にどの速さで動くか) という情報、つまり速度の情報が必要である。

### 2.1.2 速度

1次元空間中に質点  $P$  が時刻  $t$  に位置  $x(t)$  にあるとき、 $P$  の速度は

$$v = \frac{dx}{dt}$$

である。微分の表記を簡潔にするために、これを

$$v = \dot{x}$$

とも書く。同様に表記の簡潔さのために、2階微分

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

は

$$\ddot{x}$$

と書く。3次元空間中の速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v}$$

と書く。速度の成分を

$$v_i = \dot{x}_i$$

と書く。質点  $m$ 、速度  $\boldsymbol{v}$  の質点がつ運動エネルギー  $K$  は、1次元では

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

3次元では

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2$$

と書ける。

### 2.1.3 ベクトルとその成分

上に述べたとおりベクトルの成分は

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

と書いたり、

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

と書いたりする。二つのベクトルの内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j$$

と書ける。このように、総和記号の中で同じ添字（この場合  $j$ ）をもつ二つの変数のかけ算は頻繁に現れるので、このような場合、総和記号を省略して

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_j b_j$$

と書くと便利である。これをアインシュタインの規約と言う。この規約を使うと、上に出てきた運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} m v_j v_j$$

と書ける。

## 2.2 ラグランジアン

この講義では、天降り式にラグランジアンという新しい概念を導入し、そして、やはり何の根拠もなく、「ラグランジュの運動方程式はこういうものである」、と書いて半ば強引に、多数の例題を通じてこれらの概念と使い方に慣れてもらうという方針をとる。いわば習うより慣れろ、というわけである。これまでの講義の経験では、このようなやり方でラグランジュの運動方程式の導出の仕方に十分慣れていく過程で、学生諸君は「どうしてこれが正しい運動方程式になっているのだろう？」という（当然の）疑問が次第に成長していくようである。その後に「最小作用の原理」を知れば、ラグランジュの運動方程式のいわば「根拠」としてある程度得心するようになる。

逆に、最小作用の原理から出発して変分法（オイラー＝ラグランジュの方程式）を介してラグランジュの運動方程式を導出する方が説明の仕方としては綺麗であるが、初学者がすんなり納得できるとは限らないと思う。

というわけで唐突に、ここで「ラグランジアン」というものを導入する。それは、

$$\text{ラグランジアン} = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$$

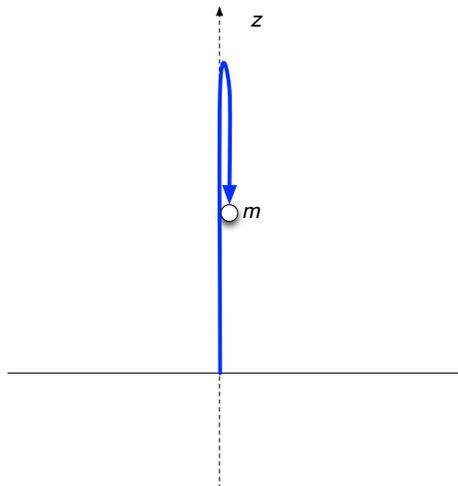
というものである。ラグランジアンを  $L$ 、運動エネルギーを  $K$ 、ポテンシャルを  $U$  と書けば、

$$L = K - U$$

である。

### 2.2.1 質点の投げ上げ問題

ラグランジアンを具体的に計算してみよう。鉛直上向きに  $z$  軸をとる。質量  $m$  の質点を真上に投げ上げたときの運動を考える。時刻  $t$  の質点の位置を  $z = z(t)$  とすると、質点の速度は  $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$  である。従ってこの系の運動エネルギーは



$$K = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

ポテンシャルは、

$$U = mgz$$

である。この系のラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

である。

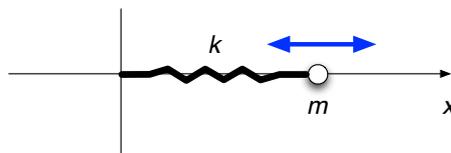
ラグランジアンの次元はエネルギーの次元と同じ (SI 単位系ではジュール (J)) である。ラグランジアンは数値ではなく、関数であることに注意しよう。具体的には、今の場合、 $z$  座標と  $z$  方向の速度  $\dot{z}$  の関数である。

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz \quad (2.1)$$

### 2.2.2 直線上の線形バネ

次に  $x$  上を動く質点の線形バネ (自然長  $\ell_0$ , バネ定数  $k$ ) による振動運動を考えよう。質点の座標を  $x$  とすると速度は  $\dot{x} (= dx/dt)$  である。この系の運動エネルギー (= 質点の運動エネルギー) は

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



である。この系のポテンシャル (=バネのポテンシャル) は

$$U = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

である。従って、この系のラグランジアン  $L$  は

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

である。バネの自然長が 0 なら

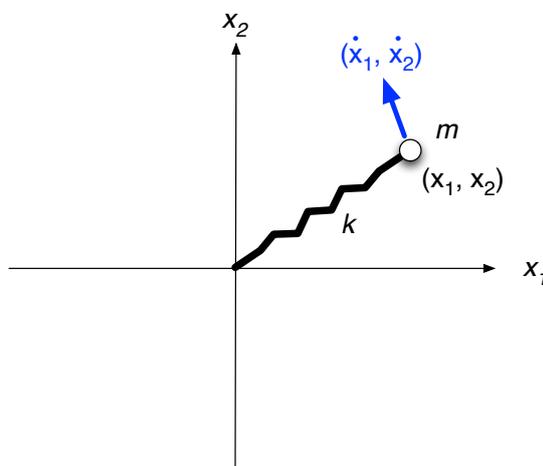
$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

となる。

1次元に限らず、ポテンシャルが原点からの距離の 2 乗に比例する系を、**調和振動子系**と呼ぶ。

### 2.2.3 平面上の線形バネ

次に自由度が 2 の系を考えてみよう。  $x_1$ - $x_2$  平面を考える。バネ定数  $k$ 、自然長  $\ell_0 = 0$  の線形バネの質量  $m$  の質点がつながっており、バネの他端は原点に固定されている。質点の位置座標を  $(x_1, x_2)$  とすると、質点の速度は  $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$



である。系の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

ポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

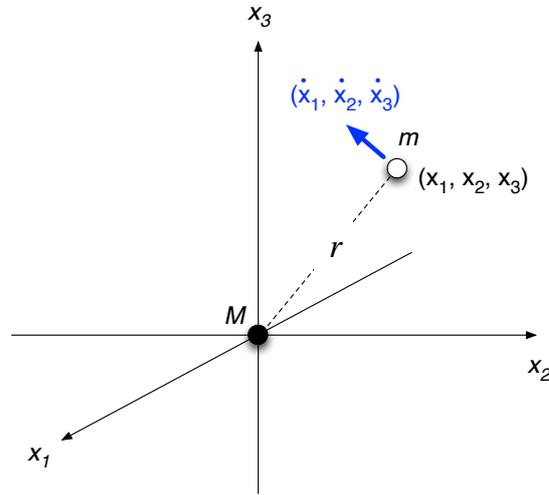
従ってこの系のラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.2)$$

である。

### 2.2.4 万有引力

次に万有引力（逆自乗力）の下での質点の運動を考えよう。原点に質量  $M$  の太陽がある。太陽は動かないとする。太陽の引力の下での質量  $m$  の地球（質点）の運動を考える。カーテシアン座標系  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$  を使って、地球の位置を座標



$(x_1, x_2, x_3)$  と書く。すると速度は  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  である。地球の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \sum_{j=1}^3 \frac{m}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j = \frac{m}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j$$

重力のポテンシャルは

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}$$

である<sup>1</sup>。ここで  $G$  は万有引力定数

$$G = 6.67384 \times 10^{-11} \quad (\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2})$$

<sup>1</sup> $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_{j=1}^3 x_j x_j = x_j x_j$  から  $r = \sqrt{x_j x_j}$  である。

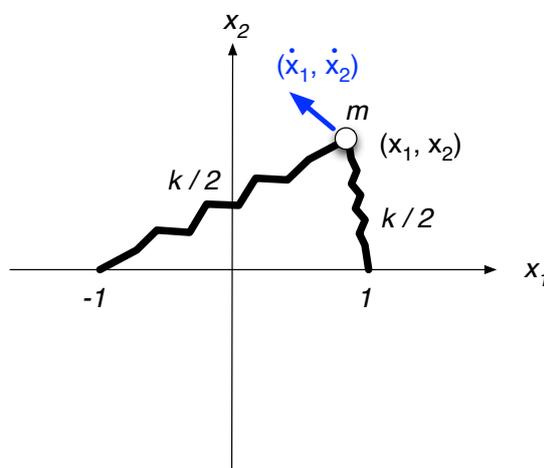
である。従って、この系のラグランジアン  $L$  は

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j + \frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}$$

である。

### 2.2.5 バネが二つある場合

2.2.3章で  $x_1$ - $x_2$  平面上のバネ質点系を考えた。今度は、質点が二つのバネに質点 (質量  $m$ ) がつながれている場合を考えてみよう。バネを二つにするのでバネ定数は半分の  $k/2$  としてみる。自然長  $0$  のままとする。一方のバネの端は  $x_1$  軸上の



点  $(x_1, x_2) = (-1, 0)$  に固定されており、もう一方のバネの端は  $(x_1, x_2) = (+1, 0)$  に固定されているものとする。質点の位置を  $(x_1, x_2)$ 、速度を  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  とすると、系の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

である。これは以前と変わらない。一方、系のポテンシャル  $U$  は、二つのバネのポテンシャル

$$U_1 = \frac{k}{4} \{(x_1 - 1)^2 + x_2^2\}$$

と

$$U_2 = \frac{k}{4} \{(x_1 + 1)^2 + x_2^2\}$$

の和である。従って

$$U = \frac{k}{2} [\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2\} + \{(x_1 + 1)^2 + x_2^2\}]$$

である。従ってこの系のラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{4} [\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2\} + \{(x_1 + 1)^2 + x_2^2\}] \quad (2.3)$$

である。

ニュートン力学では、「力ベクトル」とか「加速度ベクトル」というベクトル量が基本的な役割を果たす。そのために力（ポテンシャル）の源が複数ある時には解法が複雑になることが多い。ベクトル量が基本だと、ベクトルの成分を分解して考える必要があり、そのために計算が煩雑になることが多い。一方、解析力学では、ラグランジアンというスカラー関数が基本的な役割を果たす。ラグランジアンの構成に必要なポテンシャルは、複数の源があってもそれを単に足せばいいだけなので、計算は簡単である。

### 2.2.6 ラグランジアンの比較

一つだけのバネが原点につながれたときのラグランジアン (2.2) と、上のラグランジアン (2.3) を比べてみよう。見やすいようにここにもう一度書くと、一つのバネだけの時のラグランジアンは

$$L_a(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.4)$$

であった。バネが二つの時のラグランジアン (2.3) を整理すると、

$$L_b(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{k}{2} \quad (2.5)$$

である。この二つのラグランジアンは定数  $\frac{k}{2}$  だけの差しかない。これは「二つの系は本質的に同じ」ということを意味する。つまり質点はどちらも同じ運動をする。どうしてそう言えるかというと、次回紹介する「ラグランジュの運動方程式」を見れば自明となる。なぜなら、ラグランジュの運動方程式の中でラグランジアンは常に微分した関数が使われるので、ラグランジアンが定数分だけ変わってもラグランジュの運動方程式には全く影響しないからである。

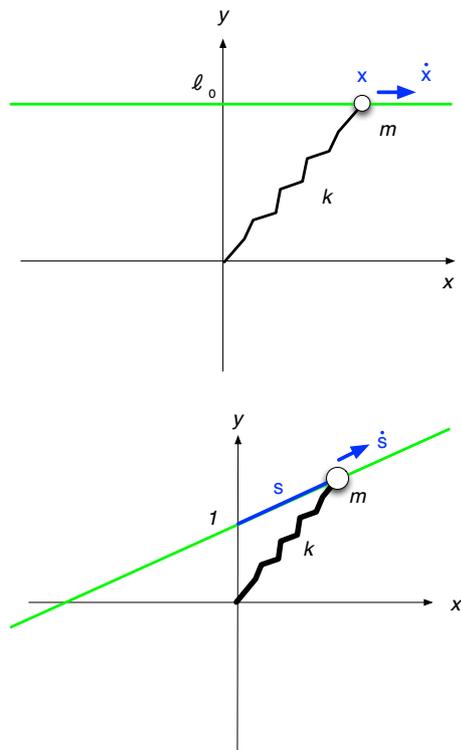
## 2.3 課題

### 2.3.1 課題 1

$x$ - $y$  平面上に  $y = l_0$  の直線がある。質量  $m$  の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数  $k$  で、自然長がちょうど  $l_0$  のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。質点の  $x$  座標と  $x$  方向の速度  $\dot{x}$  を使い、この系のラグランジアン  $L(x, \dot{x})$  を書け。

### 2.3.2 課題 2

$x$ - $y$  平面上の直線  $y = \frac{1}{2}x + 1$  がある。質量  $m$  の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数  $k$  で、自然長  $l_0$  がゼロ ( $l_0 = 0$ ) のバネがあり、そ



の一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。直線と  $y$  軸との交点からの (符号付きの) 距離を  $s$  を座標として質点の位置を表現する。この系のラグランジアン  $L(s, \dot{s})$  を書け。

### 2.3.3 課題 3

今日の講義内容で感じた疑問、分からなかった部分について書け。

【提出方法】 次回の講義にて提出。学籍番号と名前を忘れずに。

## Chapter 3

# いくつかの準備

### 3.1 前回の復習

ラグランジアン  $L$  とは、

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル}) = K - U$$

であった。座標を  $x$  と書くと、 $L$  は  $x$  と  $\dot{x}$  の関数

$$L(x, \dot{x})$$

である。

質量  $m$  の質点の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

である。

鉛直上向きを  $z$  方向とし、 $-z$  方向にかかる一様重力  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  のポテンシャルは

$$U(z) = mgz$$

である。 $z$  軸を  $x_3$  軸と書くことがある。このとき、

$$U(x_3) = mgx_3$$

である。

バネのポテンシャル (=ポテンシャルエネルギー) は

$$U = \frac{k}{2} (\text{バネの伸び})^2 = \frac{k}{2} (\ell - \ell_0)^2$$

である。ここで  $k$  と  $\ell_0$  は、バネのバネ定数と自然長であり、バネの長さを  $\ell$  とした。

## 3.2 前回の課題の解答例

### 3.2.1 課題1の解答

運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

であり、ポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2} (\ell - \ell_0)^2$$

である。ここで

$$\ell = \sqrt{x^2 + \ell_0^2}$$

だから、ラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \left( \sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right)^2$$

である。 $U$ に出てくる2乗の部分を展開しても構わない。

### 3.2.2 課題2の解答

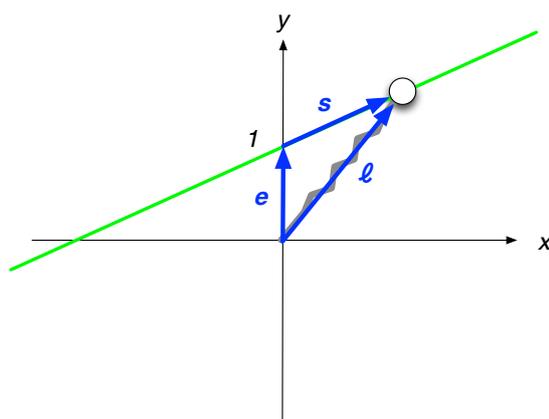
図のようにベクトル  $\ell, e, s$  をとる。質点のカーテシアン座標  $(x, x/2 + 1)$  とすると、これらのベクトルを成分で書けば

$$\ell = (\ell_x, \ell_y) = \left( x, \frac{x}{2} + 1 \right)$$

$$e = (0, 1)$$

$$s = \ell - e = \left( x, \frac{x}{2} \right)$$

である。



運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{s}^2$$

は簡単。自然長はゼロなので、ポテンシャルも簡単で

$$U = \frac{k}{2} \ell^2$$

である。あとはこの  $\ell^2$  を座標  $s$  を使って書くだけである。

$$s^2 = \mathbf{s}^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4} x^2$$

から

$$s = \frac{\sqrt{5}}{2} x$$

であることがわかる。なお、これは符号が正負、どちらでも正しい式である。これを使えば、

$$\ell^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \frac{5}{4} x^2 + x + 1 = s^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} s + 1$$

なので、結局、ラグランジアンは

$$L(s, \dot{s}) = K - U = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{k}{2} \left( s^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} s + 1 \right)$$

である。

### 3.3 多自由度系のラグランジアン

自由度が2以上の系（多自由度系という）のラグランジアンの作り方も、これまでにみた1自由度系と全く同じで

$$L = K - U$$

である。

たとえばビルの屋上からボールを投げる問題を考えよう。水平方向（ボールを投げる方向）に  $x_1$  軸をとり、鉛直上向きに  $x_2$  軸をとる。この系は2自由度系である。運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

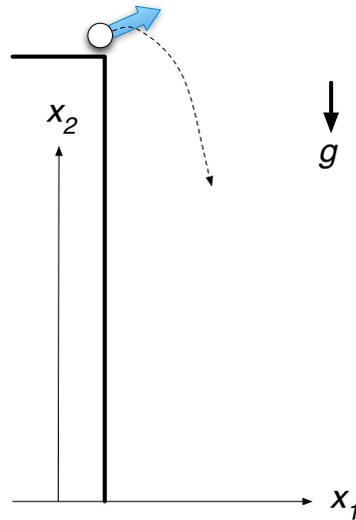
である。ポテンシャルは

$$U = mgx_2$$

なので、ラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2 \quad (3.1)$$

である。



### 3.4 いくつかの準備

#### 3.4.1 万有引力と重力加速度

万有引力は質量をもつ物質全てが持つ引力である。その物質からの距離の $-2$ 乗に比例する（逆自乗力）。地球表面にいる我々が感じる地球重力は、地球内部の物質全体が生み出す万有引力の総和である。その総和は地球の中心の一点に全物質（質量）が集中した時に生み出す質点の作る重力と等しくなる。（これがなぜかは面白い問題であるが、いまは追求しない。）従って、地球中心からの半径を $r$ とすると、その位置の重力の強さは

$$f(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

である。ここで

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

は万有引力定数、

$$M = 5.97 \times 10^{24} \text{kg}$$

は地球の質量である。

地球半径は

$$R = 6.38 \times 10^6 \text{m}$$

である。従って

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{6.67 \times 5.97}{6.38^2} \times 10^1 \sim 9.8 \text{m/s}^2$$

これがこの講義にも頻繁に出てくるおなじみの重力加速度 $g$ である。

### 3.4.2 便利な近似式

自然数  $n$  に対して、二項定理

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \quad (|x| < 1)$$

が成り立つことは既に知っているであろう。 $|x| < 1$  の時、 $\alpha$  が自然数でない実数のときにも

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

という一般二項定理が成り立つ。これはニュートンが見つけたそうである。

一般二項定理や、あるいはテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + O(x^2)$$

を使うと  $|\epsilon| < 1$  の時

$$(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + O(\epsilon^2)$$

という便利な近似式が得られる。これを

$$(1+\epsilon)^\alpha \sim 1 + \alpha\epsilon$$

と書くことにする。

下にいくつか例を挙げる。

$$(1+\epsilon)^2 \sim 1 + 2\epsilon$$

$$(1+\epsilon)^3 \sim 1 + 3\epsilon$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} \sim 1 - \epsilon$$

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2} \sim 1 - 2\epsilon$$

$$\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

### 3.4.3 エベレストの頂上はどれくらい重力が弱い？

エベレストの頂上から地球中心までの距離を  $r$  とすると、

$$r = R + h, \quad h = 8848m$$

である。

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+h)^2} \sim \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

ここで、上の近似法を使った。従って頂上は海水面に比べて

$$\frac{2h}{R} = \frac{2 \times 8.85 \times 10^3}{6.38 \times 10^6} = 2.77 \times 10^{-3} \sim 0.3\%$$

だけ重力が弱い。

### 3.4.4 扇型の円弧の長さ

扇型の角度を  $\theta$  (ラジアン)、半径を  $r$  とすると、円弧の長さは

$$s = r\theta$$

である。いまさら書くまでもない当たり前のことであるが、この講義で何度か使う関係なので、あえて書いておいた。

ちなみによく目にするクイズとして次のようなものがある。赤道を一周ぐるっと取り囲むリボンと、同様に一周地球を取り囲むが、赤道から 1m 上に浮いたりボンの長さの差はいくらか？もう一つ：地球の表面積と、半径が 1m だけ大きい球面の面積の差はいくらか？

### 3.4.5 合成関数の微分

$f$  が  $g$  の関数で  $g$  が  $x$  の関数のとき、つまり

$$f = f(g(x))$$

のとき、

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

である。たとえば

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

は

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

の場合である。

### 3.4.6 偏微分

復習を兼ねて極めて簡単な例から出発する。関数

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

を  $x$  で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3y^2$$

となる。

変数  $x, y, z$  の 3 つの関数

$$\alpha(x, y, z),$$

$$\beta(x, y, z),$$

$$\gamma(x, y, z),$$

があり、 $f$  が  $\alpha, \beta, \gamma$  の関数とする。つまり

$$f = f(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)).$$

このとき  $f$  の  $x, y, z$  に関する偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

である。

$x, y, z$  を使わずに  $x_1, x_2, x_3$  を使うと上の関係はもっと簡単に書ける。変数  $x_1, x_2, x_3$  の関数が 3 つ

$$\alpha_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

があり、 $f$  が  $\alpha_i$  の関数 ( $i = 1, 2, 3$ )

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

とする。このとき  $f$  の偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

である。

変数を一般化すると変数  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) の関数が  $N$  個

$$\alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

あり、 $f$  が  $\alpha_i$  の関数

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

とする。このとき  $f$  の偏微分は以下のように書ける。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

アインシュタインの規約を使うと最初に考えた  $N = 3$  の場合と表式が全く同じになり、簡単である。

アインシュタインの規約で  $\sum$  記号が省略されている時に、いくつまで和をとるのか（上の例で言えば  $j$  は 3 までなのか  $N$  までなのか）は文脈で判断する。心配しなくても誤解するようなことはほとんどないし、誤解されそうときには  $\sum$  記号を書けばいい。

### 3.4.7 合成関数の時間微分

$f$  が  $q_1, q_2, \dots, q_N$  の関数

$$f = f(q_1, q_2, \dots, q_N)$$

で、 $N$  個ある関数  $q_i$  がそれぞれ時間  $t$  の関数

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, \dots, N)$$

であるとき、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

である。

## Chapter 4

# ラグランジュの運動方程式

さあ、いよいよラグランジュの運動方程式を紹介しよう。自由度 1 の系に対し、一般化座標を  $q$  とすればラグランジアンは

$$L(q, \dot{q})$$

と書ける。ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

である。

自由度  $N$  の系に対しは、一般化座標を  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$  とすれば、ラグランジアンは

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

と書ける。ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.1)$$

である。なぜこれが運動方程式なのか？という当然の疑問はしばらくの間我慢して、今は具体的な例を通じてまずこの方程式に慣れていこう。

### 4.1 ラグランジュの運動方程式の例

#### 4.1.1 質点の投げ上げ

質点の投げ上げの問題は 2.2.1 章 (p. 29) で考えた。ラグランジアンは式 (2.1) で与えられている。鉛直上向きの座標を  $q$  としたときのラグランジアンは、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - mgq$$

であった。

ラグランジュの運動方程式を立ててみよう。まず

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

を計算する。次に

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{q}) = m\ddot{q}$$

に計算する。そして

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -mg$$

を計算する。これをラグランジュの運動方程式に代入すると

$$\{m\ddot{q}\} - \{-mg\} = 0$$

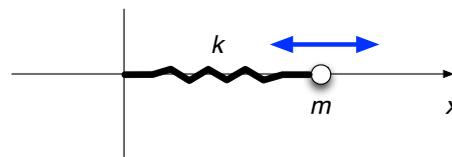
これがラグランジュの運動方程式である。

ちなみに、これはニュートンの運動方程式に一致する：

$$m\ddot{q} = -mg$$

#### 4.1.2 調和振動子系

2.2.2 章 (p. 29) で考えたバネ=質点系の、バネの自然長  $\ell_0 = 0$  の場合、つまり調和振動子系を考えよう。



ラグランジアンは、

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$$

である。ラグランジュの運動方程式を作ってみよう。まずは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

次に

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

も簡単である。そして、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

だから、ラグランジュの運動方程式は

$$\{m\ddot{x}\} - \{-kx\} = 0$$

ここで、 $k/m = \omega^2$  とすると

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

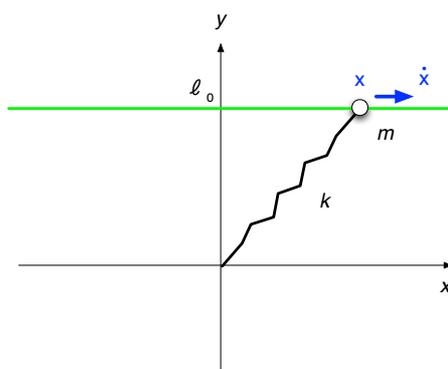
となる。この微分方程式の解はもちろん調和振動子

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2) \quad c_1, c_2 \text{ は定数}$$

である。

### 4.1.3 直線に拘束された質点

$y = \ell_0$  の上を滑らかに滑る質点の問題（第 2.3 章の課題 1 で考えた問題）を考えよう。 $x$ - $y$  平面上に  $y = \ell_0$  の直線がある。質量  $m$  の質点がこの直線上を滑ら



かに（摩擦なしで）動く。バネ定数  $k$  で、自然長がちょうど  $\ell_0$  のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。一般化座標として、質点の  $x$  座標を使うと、この系のラグランジアン  $L(x, \dot{x})$  は

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \left( \sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right)^2$$

であった。

ラグランジュの運動方程式を作ってみよう。まずは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

次に

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

次は、式が少しだけ長くなるが、計算は単純である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -k \left( \sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}} \\ &= -kx \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} \right) \end{aligned}$$

従って、ラグランジュの運動方程式は

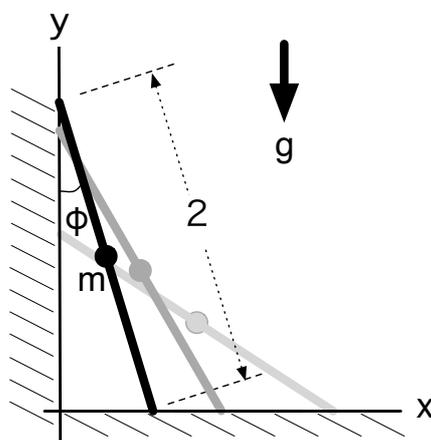
$$\{m\ddot{x}\} - \left\{ -kx \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} \right) \right\} = 0$$

$k/m = \omega^2$  とすると

$$\ddot{x} + \omega^2 x \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} \right) = 0$$

これはニュートンの運動方程式から導いた式 (1.1) と同じである。

#### 4.1.4 滑りながら倒れる棒



**問題** 長さ 2 の重さのない棒の中心に固着した質量  $m$  の質点がある。鉛直下方の一定重力（重力定数  $g$ ）の下、この棒を壁に（斜めに）立て掛けた。床面に沿って  $x$  軸、壁面に沿って  $y$  軸をとる。棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないように（摩擦なしで）滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。棒と壁のなす角度  $\phi$  を座標とする。

(1)  $\phi(t)$  の運動方程式を立てよ。

(2)  $|\phi| \ll 1$  の時の解を求めよ。

**解答** (1) 質点の位置を  $(x, y)$  とすると

$$(x, y) = (\sin \phi, \cos \phi)$$

速度は

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\cos \phi \dot{\phi}, -\sin \phi \dot{\phi})$$

である。棒は質量を持たないので、この系の運動エネルギー  $K$  は、質点だけが持っている。従って、

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2$$

同様に棒はポテンシャルを持たないので、系のポテンシャル  $U$  は、質点の重力ポテンシャル

$$U = mgy = mg \cos \phi$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 - mg \cos \phi$$

である。運動方程式を導こう。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = m\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = mg \sin \phi$$

これらをラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

に代入すると、

$$\{m\ddot{\phi}\} - \{mg \sin \phi\} = 0$$

整理すると

$$\ddot{\phi} - g \sin \phi = 0$$

これが  $\phi$  の満たすべき運動方程式である。

(2)  $|\phi| \ll 1$  の時、 $\sin \phi \sim \phi$  より、運動方程式は

$$\ddot{\phi} = g\phi$$

となる。この微分方程式の一般解は

$$\phi(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t} + c_2 e^{-\sqrt{g}t}$$

である。このうち、自然な（棒が倒れていく）解は  $c_2 = 0$ 、つまり

$$\phi(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t}$$

である。これは棒が倒れるとき、角度が  $\sqrt{g}$  の成長率で指数関数的に増大することを意味する。

### 4.1.5 2自由度の問題

次に自由度が2の場合を考えよう。

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

に対するラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

である。

簡単な場合として、たとえば前の章で考えた、ビルの屋上からボールを投げる問題 (p. 37) の場合、水平方向 (ボールを投げる方向) に  $x_1$  軸をとり、鉛直上向きに  $x_2$  軸をとる一般化座標を使うと、ラグランジアンは (3.1)

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2$$

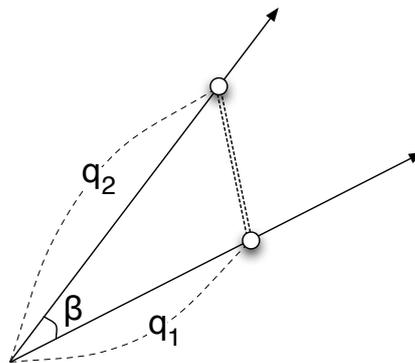
であった。このラグランジアンに対して、ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + mg = 0$$

という二つの式が出ることは容易に確認できる。これはまたニュートン力学と同じである。

### 4.1.6 バネ=質点2自由度系



原点で角度  $\beta$  をもって交差する直線 1 と直線 2 がある。質量  $m$  をもつ質点 1 が直線 1 の上を、同じ質量  $m$  をもつ質点 2 が直線 2 の上を摩擦なしに滑る。質点 1 と質点 2 の間をバネ (ばね定数  $k$ 、自然長 1) がつないでいる。質点 1 の (直線

1 上の) 座標を  $q_1$ 、質点 2 の (直線上 2 上の) 座標を  $q_2$  として、ラグランジュの運動方程式を導こう。

この系の運動エネルギー  $K$  は二つの質点があつ運動エネルギーの和なので

$$K = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

である。系のポテンシャル  $U$  はバネのポテンシャルだから

$$U = \frac{k}{2} \left( \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 \cos \beta} - 1 \right)^2$$

である。従つてラグランジアンは

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2} \{\ell(q_1, q_2) - 1\}^2.$$

ここで、式を短くするため、

$$\ell(q_1, q_2) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 \cos \beta}$$

を定義した。

## 4.2 問題

上の 2 質点系について、ラグランジュの運動方程式を求めよ。

【解答例】

ラグランジアンが求まったので、ラグランジュの運動方程式を求めるのは、例によっていつもの手続きに従つて：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i \quad (i=1,2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = m\ddot{q}_i \quad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -k(\ell - 1) \frac{q_1 - q_2 \cos \beta}{\ell}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -k(\ell - 1) \frac{q_2 - q_1 \cos \beta}{\ell}$$

従つて運動方程式は、

$$\{m\ddot{q}_1\} - \left\{ -k(\ell - 1) \frac{q_1 - q_2 \cos \beta}{\ell} \right\} = 0$$

と

$$\{m\ddot{q}_2\} - \left\{ -k(\ell - 1) \frac{q_2 - q_1 \cos \beta}{\ell} \right\} = 0$$

である。 $\omega^2 = k/m$  を定義すると、

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 \left( 1 - \frac{1}{\ell(q_1, q_2)} \right) (q_1 - q_2 \cos \beta) = 0$$

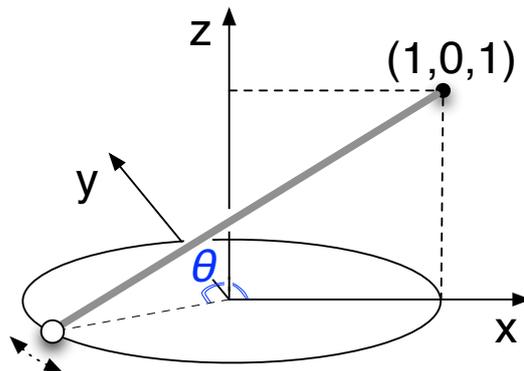
$$\ddot{q}_2 + \omega^2 \left( 1 - \frac{1}{\ell(q_1, q_2)} \right) (q_2 - q_1 \cos \beta) = 0$$

とも書ける。

## Chapter 5

# ラグランジュの運動方程式： 演習

### 5.1 円とバネ



#### 5.1.1 問題

質量  $m$  の質点が、原点を中心とする半径 1 の円 ( $x^2 + y^2 = 1$ ) の上を滑る。この質点が、点  $(x, y, z) = (1, 0, 1)$  とバネでつながれているときの運動を求めよ。重力はなく、摩擦は無視する。バネ定数は  $k$ 、自然長は 0 とする。

- 図のように  $x$  軸との角度  $\theta$  を一般化座標として、この系のラグランジアン  $L(\theta, \dot{\theta})$  を求めよ。
- ラグランジュの運動方程式を書け。
- $|\theta| \ll 1$  の時の解を求めよ。

## 5.1.2 解答 (吉永君 と山本君による)

(a) 運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{\theta}^2$$

質点の座標は  $(x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  なので、バネの長さを  $\ell$  とすると

$$\ell^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta + 1 = 3 - 2 \cos \theta$$

だからポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{k}{2} \ell^2 = \frac{k}{2} (3 - 2 \cos \theta)$$

従ってラグランジアンは

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{k}{2} (3 - 2 \cos \theta)$$

(b) 上のラグランジアンを偏微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \dot{\theta}$$

だから

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \ddot{\theta}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k \sin \theta$$

従ってラグランジュの運動方程式は、

$$\{m \ddot{\theta}\} - \{-k \sin \theta\} = 0$$

つまり

$$m \ddot{\theta} + k \sin \theta = 0$$

である。あるいは

$$\omega^2 := \frac{k}{m}$$

とすると

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

が運動方程式である。

(c)  $|\theta| \ll 1$  のとき  $\sin \theta \sim \theta$  だから、運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

である。この微分方程式の解は

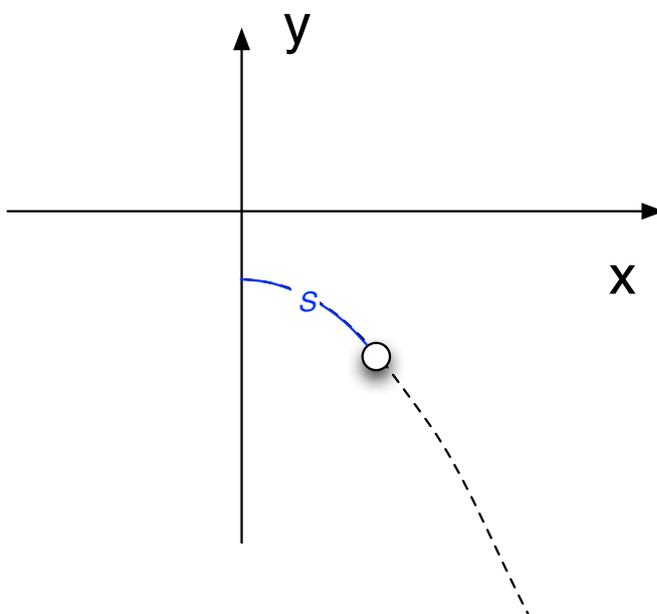
$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

ここで  $c_1$  と  $c_2$  は定数である。あるいは

$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2)$$

といった形でももちろん可。

## 5.2 双曲線滑り台



### 5.2.1 問題

$x$ - $y$  平面内の質点 (質量  $m$ ) の運動を考える。重力は下向き ( $-y$  方向)、重力加速度は  $g$  とする。質点の関数

$$y = -\cosh x = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

に沿って滑り落ちるときの運動を考える。(ジェットコースターのようなものと考えよ。) 摩擦は無視する。

- (a) 初期時刻  $t = 0$  に位置  $(x, y) = (0, -1)$  にいた質点が、この「ジェットコースター」の軌道  $y = -\cosh x$  に沿って長さ  $s$  だけ滑ったときの位置を  $(x, y)$  とする。 $s$  を  $x$  の関数として書け。

- (b)  $y$  を  $s$  の関数として書け。
- (c) この系のポテンシャル  $U(s)$  を書け。ただし、ここでは  $y = 0$  の高さで  $U = 0$  とする。(重地君の指摘により加筆)
- (d) この系のラグランジアン  $L(s, \dot{s})$  を書け。
- (e) ラグランジュの運動方程式を書け。

#### 双曲線関数

ここで双曲線関数の定義と公式を簡単にまとめておく。

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\cosh^2 x := (\cosh x)^2, \quad \sinh^2 x := (\sinh x)^2.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (5.3)$$

#### 5.2.2 解答 (丹羽君による)

(a)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx'}\right)^2} dx' \\ &= \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 x'} dx' \\ &= \int_0^x \cosh x' dx' \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

結局

$$s = \sinh x$$

(b)

$$\begin{aligned} y &= -\cosh x \\ &= -\sqrt{1 + \sinh^2 x} \quad (\text{公式 (5.1) より}) \\ &= -\sqrt{1 + s^2} \quad (\text{上の (a) の結果より}) \end{aligned}$$

(c) 問題で  $y = 0$  での  $U = 0$  としているので、

$$\begin{aligned} U(s) &= mgy \\ &= -mg\sqrt{1+s^2} \end{aligned}$$

である。

(d) 運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\dot{s}^2$$

だからラグランジアン  $L = K - U$  は

$$L(s, \dot{s}) = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + mg\sqrt{1+s^2}$$

である。

(e) 上のラグランジアンを偏微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

だから

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{s}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial s} = mg \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

従ってラグランジュの運動方程式は、

$$\{m\ddot{s}\} - \left\{ mg \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right\} = 0$$

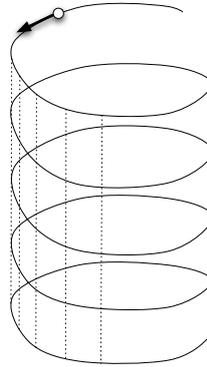
つまり

$$m\ddot{s} - mg \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = 0$$

である。あるいは両辺を  $m$  で割って、

$$\ddot{s} - g \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = 0$$

としてもよい。



## 5.3 螺旋階段

### 5.3.1 問題

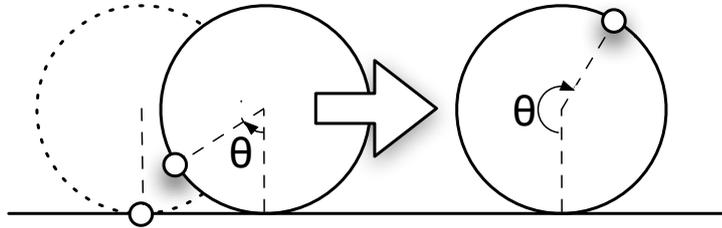
螺旋曲線の上を滑り落ちる質点（質量  $m$ ）の運動を考える。（螺旋階段の手すりを思い浮かべよ。）重力は一様、 $-z$  方向で、重力加速度は  $g$  とする。螺旋曲線の方程式は、定数  $R$  とパラメータ  $q$  を使い

$$\begin{cases} x(q) = R \cos q \\ y(q) = R \sin q \\ z(q) = q \end{cases}$$

と書ける。

- (a) パラメータ  $q$  を一般化座標として、質点の運動エネルギー  $K(q, \dot{q})$  を書け。
- (b) この系のラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  を書け。
- (c) ラグランジュの運動方程式を書け。
- (d) その運動方程式を解け。

## 5.4 自転車



### 5.4.1 問題

半径 1 の円がある。この円が  $x$ - $y$  平面内で  $x$  軸の上を転がっていく。(重さのない自転車の車輪のようなものを考えればよい。) 円が転がる時の摩擦はなく、「スリップ」もしないものとする。また、円は  $x$  軸から離れる (ジャンプする) こともないものとする。以下、重力 (重力加速度  $g$ ) は  $-y$  方向で、 $y = 0$  が地面の高さとする。

この円上のある点に固着した質量  $m$  の質点がある。(自転車の車輪 (チューブ内) に重りがついていると想像せよ。) 初期時刻  $t = 0$  に質点は地面 ( $y = 0$ ) と接触していた。このときの  $x$  座標を原点  $x = 0$  とし、円の中心と質点を結ぶ直線が  $-y$  方向となす角度を  $\theta$  とする。

- 円の中心の  $x$  座標を  $\theta$  で書け。
- 質点の  $x, y$  座標を  $\theta$  で書け。
- 系の運動エネルギー  $K(\theta, \dot{\theta})$  を書け。
- この系のラグランジアン  $L(\theta, \dot{\theta})$  を書け。
- ラグランジュの運動方程式を書け。

### 5.4.2 解答 (大羽君による)

[講義時に大羽君の解答には計算ミスがあるといいましたが、間違っていたのは私の方で、彼のこの答えが正解でした。]

- 円が回転した時にできる円弧の長さだけ円の中心は  $x$  方向に動くから

$$x = \theta$$

- 図から

$$x = \theta - \sin \theta$$

$$y = 1 - \cos \theta$$

(c) 上の  $x$  と  $y$  の式を  $t$  で微分すると

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (1 - \cos \theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \sin \theta \dot{\theta}$$

これから運動エネルギーは

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{m}{2} \{ (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \} \dot{\theta}^2$$

$$= m(1 - \cos \theta) \dot{\theta}^2$$

(d) 地面の高さを  $U = 0$  の基準にとれば、ポテンシャルは  $U = mgy$  だから、ラグランジアン  $L = K - U$  は

$$L(\theta, \dot{\theta}) = m(1 - \cos \theta) \dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos \theta)$$

つまり

$$L(\theta, \dot{\theta}) = m(1 - \cos \theta) (\dot{\theta}^2 - g)$$

である。

(e) **【2013.11.05: 以下の計算で 11/30 のバージョンには間違いがありました。大羽君の指摘により修正。】** 上のラグランジアンを偏微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2m(1 - \cos \theta) \dot{\theta}$$

だから

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} \{ 2m(1 - \cos \theta) \dot{\theta} \}$$

$$= 2m(1 - \cos \theta) \ddot{\theta} + 2m \sin \theta \dot{\theta}^2$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \sin \theta (\dot{\theta}^2 - g)$$

従ってラグランジュの運動方程式は、

$$\left\{ 2m(1 - \cos \theta) \ddot{\theta} + 2m \sin \theta \dot{\theta}^2 \right\} - \left\{ m \sin \theta (\dot{\theta}^2 - g) \right\} = 0$$

つまり

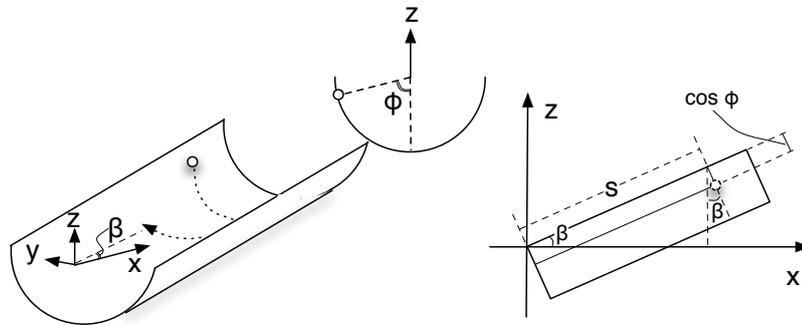
$$2m(1 - \cos \theta) \ddot{\theta} + m \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0$$

である。あるいは少し変形して (両辺を  $m \sin \theta$  で割って)

$$2 \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 + g = 0$$

としても良い。

## 5.5 ハーフパイプ



### 5.5.1 問題

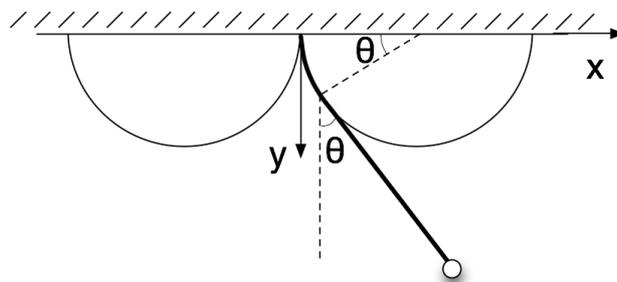
スノーボードのハーフパイプのような系を考える。半径 1 の円筒が水平面  $x-y$  面に対して角度  $\beta$  だけ傾いて置かれている。この円筒面上を滑る質点 (質量  $m$ ) の運動を考える。以下、重力は  $-z$  方向で、重力加速度は  $g$  とする。質点は円筒面上に拘束されていて、この面から離れることはない。摩擦は無視する。

円筒の軸が  $x-z$  面上になるよう  $x$  軸をとり、原点は図のようにとる。(この図には円筒の下半分だけ描いてある。)

( $\phi = 0$  の方向は  $x-z$  面内にとる。)

- 円筒座標  $(\phi, s)$  を使って質点の  $(x, y, z)$  座標を書け。
- 質点の運動エネルギー  $K(\dot{\phi}, \dot{s})$  を書け。
- この系のラグランジアン  $L(\phi, s, \dot{\phi}, \dot{s})$  を書け。
- ラグランジュの運動方程式を書け。

## 5.6 円に挟まれた振り子



### 5.6.1 問題

中心の位置が  $(x, y) = (-1, 0)$  と  $(+1, 0)$  にある半径 1 の二つの半円と、それらに挟まれた振り子を考える。振り子の支点は原点  $(x, y) = (0, 0)$  にあり、長さ  $l$  の糸の先に質量  $m$  の質点がついている。重力（下向き）方向を  $+y$  方向とし、この方向と糸がなす角度を  $\theta$  とする。重力定数は  $g$  とする。いま  $\theta \geq 0$  の間の運動だけを考える<sup>1</sup>。

(a)  $\theta (\geq 0)$  を一般化座標としたラグランジュの運動方程式を導け。

(b)  $\theta$  が小さいとき、 $O(\theta^2)$  と  $O(\dot{\theta}^2)$  を無視して、解を求めよ。

### 5.6.2 解答

(a) 質点の位置を  $(x, y)$  とすると、図より

$$x = 1 - \cos \theta + (l - \theta) \sin \theta$$

$$y = \sin \theta + (l - \theta) \cos \theta$$

なので、速度成分は

$$\dot{x} = \sin \theta \dot{\theta} + (-\dot{\theta}) \sin \theta + (l - \theta) \cos \theta \dot{\theta} = (l - \theta) \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \cos \theta \dot{\theta} + (-\dot{\theta}) \cos \theta - (l - \theta) \sin \theta \dot{\theta} = -(l - \theta) \sin \theta \dot{\theta}$$

である。従って、運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(l - \theta)^2 \dot{\theta}^2$$

である。いま、 $y$  軸は下向きを正にとっているので、ポテンシャルは

$$U = -mgy = -mg \{ \sin \theta + (l - \theta) \cos \theta \}$$

<sup>1</sup>2013.11.14 追記。

である。(ここで  $U = +mgy$  としないように注意しよう。) ラグランジアン  $L = K - U$  は

$$\begin{aligned} L(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{m}{2}(\ell - \theta)^2 \dot{\theta}^2 - \{-mg \{\sin \theta + (\ell - \theta) \cos \theta\}\} \\ &= \frac{m}{2}(\ell - \theta)^2 \dot{\theta}^2 + mg \{\sin \theta + (\ell - \theta) \cos \theta\} \end{aligned}$$

である。微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell - \theta)^2 \dot{\theta}$$

から

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \frac{d}{dt} \{(\ell - \theta)^2 \dot{\theta}\} = -2m(\ell - \theta) \dot{\theta}^2 + m(\ell - \theta)^2 \ddot{\theta}$$

である。また、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m(\ell - \theta) \dot{\theta}^2 + mg \{\cos \theta - \cos \theta - (\ell - \theta) \sin \theta\} = -m(\ell - \theta) \dot{\theta}^2 - mg(\ell - \theta) \sin \theta$$

これらをラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

に代入すると、

$$\{-2m(\ell - \theta) \dot{\theta}^2 + m(\ell - \theta)^2 \ddot{\theta}\} - \{-m(\ell - \theta) \dot{\theta}^2 - mg(\ell - \theta) \sin \theta\} = 0$$

となる。整理して、

$$\ddot{\theta} - \frac{\dot{\theta}^2}{\ell - \theta} + \frac{g \sin \theta}{\ell - \theta} = 0$$

これが求める運動方程式である。

(b)  $O(\theta)^2$  を無視すると、

$$\frac{g \sin \theta}{\ell - \theta} = \frac{g \sin \theta}{\ell(1 - \theta/\ell)} \sim \frac{g}{\ell} \theta \left(1 + \frac{\theta}{\ell}\right) \sim \frac{g}{\ell} \theta$$

と近似できるので<sup>2</sup>、運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta$$

となる。この解は

$$\theta(t) = c_1 \sin(\omega t + c_2)$$

である。ここで  $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ 、 $c_1$  と  $c_2$  は定数<sup>3</sup>。

<sup>2</sup>140129 入江君の指摘により修正。最後の項で  $\theta$  が抜けていた。

<sup>3</sup>140129 これも入江君の指摘により修正。 $\omega \rightarrow \omega^2$ 。

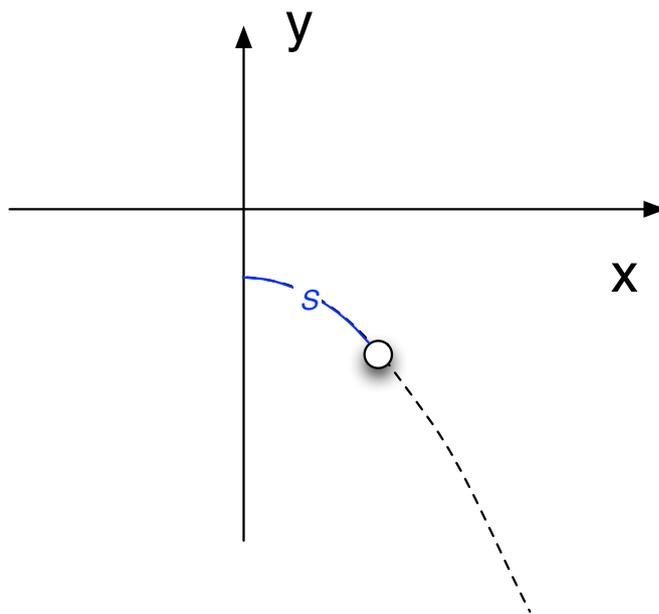


## Chapter 6

# 運動方程式の共変性

### 6.1 ラグランジアンの変換

#### 6.1.1 定数項の変換



第 5.2 章の双曲線滑り台の問題で、ポテンシャル  $U$  の基準点 ( $U(y) = 0$  となる  $y$  の高さ) を  $y = 0$  とした。質点の出発点の高さ  $y = -1$  にとっても良いし、その方が自然と思う人もいるであろう。この問題の場合、基準点が  $H$  だけ異なる場合のポテンシャルの差は

$$\Delta U = mgH$$

という定数である。そもそもポテンシャルとは「微分する (勾配 gradient をとる) と力になるスカラー関数」として定義された量なので、定数分だけ異なるポテンシャルは「同じ」と見なして良い。こういうときポテンシャル  $U$  は定数分だけ「不定」という。

これまでラグランジアン  $L$  を  $L = K - U$  として定義してきたので、ラグランジアンも定数分だけ不定のはずである。これは実際その通りで、一般に自由度  $N$  のある力学の系のラグランジアン

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

に対して、これに定数  $c$  だけ加えた「別の」ラグランジアン

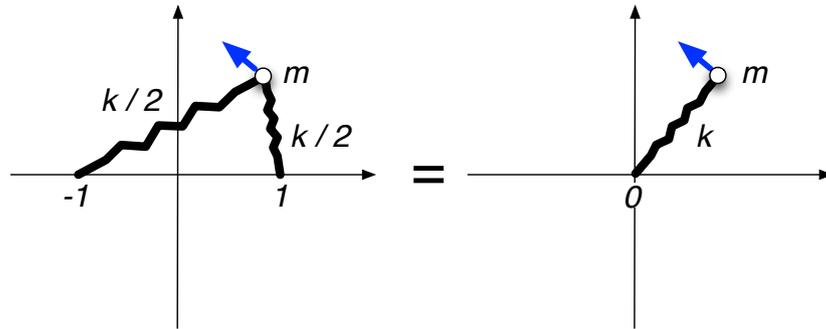
$$L'(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) := L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) + c$$

として作ったとしても、このラグランジアン  $L'$  から作ったラグランジュの運動方程式は元の  $L(q, \dot{q})$  から作った運動方程式と同じである。なぜならラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

には、ラグランジアンの変位だけが関係するからである。つまりラグランジアンは定数分だけ不定である。

### 6.1.2 例



第 2.2.6 章で、一つだけのバネが原点につながれたときのラグランジアン

$$L_a(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

と、バネ定数が半分の二つのバネにつながれたときのラグランジアン

$$L_b(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{k}{2}$$

を比べたところ、この二つのラグランジアンは定数  $\frac{k}{2}$  だけの差しかないことを見た。ラグランジアンは定数分だけ不定なので、この二つの系での質点の運動方程式は同じである。つまり初期条件が同じなら同じ運動をする。ラグランジアンを見ただけで、二つの力学の系が等価であることが分かるのは実に便利である。

### 6.1.3 もう少し一般的な不定性

まずは簡単のため自由度 1 の場合を考える。一般化座標  $q$  のラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  が与えられているとき、 $q$  の任意の関数  $W(q)$  の時間微分を加えた別のラグランジアン

$$L'(q, \dot{q}) := L(q, \dot{q}) + \frac{dW(q)}{dt}$$

を考える。

$$\frac{dW(q)}{dt} = \frac{dW(q)}{dq} \dot{q}$$

であることに注意すると、この二つのラグランジアン  $L$  と  $L'$  の差  $dW(q)/dq$  に起因するラグランジュの運動方程式の差は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{dW}{dt} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{dW}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dW(q)}{dq} \right) - \frac{d^2 W(q)}{dq^2} \dot{q} \\ &= \frac{d^2 W(q)}{dq^2} \dot{q} - \frac{d^2 W(q)}{dq^2} \dot{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。つまりラグランジアンは  $q$  の任意関数  $W(q)$  の時間微分  $dW(q)/dt$  分だけ不定である。

多自由度系の場合にも同様である。一般化座標  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$  の任意の関数  $W(q_1, q_2, \dots, q_N)$  を時間で微分した

$$\frac{dW(q_1, q_2, \dots, q_N)}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial W}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

をラグランジアン  $L$  に足しても運動方程式は変わらないことを確認しよう。

$$L^*(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \frac{dW(q_1, \dots, q_N)}{dt}$$

に対して、ラグランジュの運動方程式を導出してみると、

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial W}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W(q_1, \dots, q_N)}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j$$

一方、式 (6.1.3) より、

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j$$

従って  $L^*$  から導かれる運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} = 0$$

は、

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \right\} = 0$$

つまり、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

となる。これは  $L$  から導かれるラグランジュの運動方程式そのものである。

ある系を記述するラグランジアンは一つではない。一般化座標  $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$  の系に対応するラグランジアン  $L$  が既知の時、任意の関数  $W(q_1, q_2, \dots, q_N)$  から

$$L' = L + \frac{dW}{dt} \quad (6.1)$$

として「別の」ラグランジアン  $L'$  を構成すると、この新しい  $L'$  も  $L$  から導かれるものと全く同じ運動方程式を導く。つまりある系のラグランジアンは無数にある。

これまで、この講義では「ラグランジアン  $L$  は、系の運動エネルギー  $K$  からポテンシャル  $U$  を引いたものである」と説明してきたが、実は、正確に言えば、これは「その系の（無数にある）ラグランジアンの中の一つは、そのようにして作ることができる」という意味だったのである。

付け加えると、ラグランジアンは上の  $dW(q)/dt$  というタイプに限られているわけではない。一自由度の質点系でポテンシャルが存在しない系（自由粒子という）のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2$$

であるが、

$$L'(q, \dot{q}) = e^{\sqrt{m}\dot{q}}$$

というラグランジアンも  $L$  と同じ運動方程式を導く。

## 6.2 電磁場中の荷電粒子

### 6.2.1 電磁場中の荷電粒子のラグランジアン

電磁気学で習ったように、電荷  $+e$  をもつ点電荷が  $x$  方向の静電場  $\mathbf{E}(x)$  の中にあるとき、そのポテンシャルエネルギーは、

$$U = e\phi(x)$$

である。ここで

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla\phi(x)$$

という関係がある。この系のラグランジアンは、点電荷の質量を  $m$  とすると

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - e\phi(x)$$

である。

磁場が存在するときの荷電粒子のラグランジアンはどうなるであろうか？電場がなく磁場が一樣であればよく知られているようにこの時、荷電粒子は回転運動（サイクロトロン運動）をする。そのような運動も記述できる電磁場中のラグランジアンを紹介しよう。

時間的にも空間的にも変化する一般的な電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  と磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  があるときの電荷  $+e$ 、質量  $m$  の質点（点電荷）のラグランジアンは、質点の位置を  $\mathbf{x}$ 、速度を  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}}$  とすると

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m}{2} \dot{x}_j \dot{x}_j + e A_j \dot{x}_j - e \phi \quad (6.2)$$

である。あるいはベクトルの形で書けば

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - e \phi \quad (6.3)$$

ここで  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  はベクトルポテンシャルと（スカラー）ポテンシャルと呼ばれるもので、時間と空間の関数である：

$$A_i = A_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

電場、磁場とは

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (6.4)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.5)$$

という関係がある。式 (6.2) のラグランジアンにおいて座標  $x_i$  の依存性は、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが  $x_i$  の関数になっていることから間接的に（合成関数として）入っている。

ラグランジアン (6.2) から、ラグランジュの運動方程式を導出するとよく知られた

$$m \ddot{x}_i = e \{E_i + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i\} \quad (6.6)$$

が得られる。

### 6.2.2 練習問題

式 (6.6) を導出せよ。

**解答：**

まずはラグランジアン (6.2) から運動方程式の  $x_1$  成分を作る。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1 + e A_1$$

から

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m \ddot{x}_1 + e \frac{\partial A_1}{\partial x_j} \dot{x}_j + e \frac{\partial A_1}{\partial t}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = e \frac{\partial A_j}{\partial x_1} \dot{x}_j - e \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

である。したがって、運動方程式の  $x_1$  成分は、

$$\left\{ m\ddot{x}_1 + e \frac{\partial A_1}{\partial x_j} \dot{x}_j + e \frac{\partial A}{\partial t} \right\} - \left\{ e \frac{\partial A_j}{\partial x_1} \dot{x}_j - e \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\} = 0$$

ここで  $j$  について 1 から 3 までの和をとるときに  $j = 1$  では  $\partial A_1 / \partial x_j$  と  $\partial A_j / \partial x_1$  の二つは同じなのでキャンセルして

$$\left\{ m\ddot{x}_1 + e \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + e \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \dot{x}_3 + e \frac{\partial A}{\partial t} \right\} - \left\{ e \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \dot{x}_2 + e \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \dot{x}_3 - e \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\} = 0$$

となる。つまり

$$m\ddot{x}_1 = e \left\{ \dot{x}_2 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \dot{x}_3 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \right\} - e \frac{\partial A}{\partial t} - e \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

ここで

$$(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

と

$$(\nabla \times \mathbf{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

を使うと

$$m\ddot{x}_1 = e \{ \dot{x}_2 (\nabla \times \mathbf{A})_3 - \dot{x}_3 (\nabla \times \mathbf{A})_2 \} - e \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)$$

である。式 (6.4) と (6.5) より、

$$m\ddot{x}_1 = e (\dot{x}_2 B_3 - \dot{x}_3 B_2) + e E_1$$

である。これは

$$m\ddot{x}_1 = e (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_1 + e E_1$$

と書ける。他の成分 ( $x_2$  成分と  $x_3$  成分) についても同様である。こうして式 (6.6) が導かれた。

### 6.2.3 ゲージ変換

ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの定義 (6.4) と (6.5)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

をよく見ると、任意のスカラー場  $\Lambda(\mathbf{x}, t)$  から構成する

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad (6.7)$$

$$\phi \Rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (6.8)$$

という変換で新しいベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}'$  とスカラーポテンシャル  $\phi'$  を作っても、そこから得られる電場と磁場は元と変わらないことが分かる：

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

この (6.7) と (6.8) を電磁場のゲージ変換という。

電磁場中の荷電粒子の運動を記述するラグランジアン (6.3)

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - e\phi$$

がゲージ変換によってどう変わるか見てみよう。

$$\begin{aligned} L \Rightarrow L' &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{A}' \cdot \dot{\mathbf{x}} - e\phi' \\ &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e(\mathbf{A} + \nabla\Lambda) \cdot \dot{\mathbf{x}} - e\left(\phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) \\ &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - e\phi + e\left(\nabla\Lambda \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla\Lambda \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{d\Lambda(\mathbf{x}, t)}{dt}$$

であることに注意すると、

$$L' = L + \frac{d(e\Lambda)}{dt}$$

であることが分かる。これは変換 (6.1) の

$$W = e\Lambda$$

の場合である。つまりゲージ変換を施しても（ラグランジアンの見た目は変わるが）そこから導かれる運動方程式はその形を変えない。一般にある座標変換の下で、方程式の形が変わらないとき、その方程式は考えている座標変換に対して「共変」であるという。ゲージ変換に対して運動方程式は共変である。

## 6.3 ラグランジュの運動方程式の共変性

### 6.3.1 時間に依存しない点変換

座標  $q_i (i = 1, 2, \dots, N)$  で記述された自由度  $N$  の系を考える。この系を別の座標  $Q_i (i = 1, 2, \dots, N)$  で記述するために座標変換

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ Q_2 &= Q_2(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ &\vdots \\ Q_N &= Q_N(q_1, q_2, \dots, q_N) \end{aligned}$$

しよう。もちろん、二つの座標系の全ての点は一対一に対応しているものとする<sup>1</sup>。つまり逆の変換

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \\ q_2 &= q_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \\ &\vdots \\ q_N &= q_N(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \end{aligned}$$

が存在する。このような変換を「点変換」という。

ラグランジュの運動方程式は点変換に対して共変である。これがラグランジュの解析力学が便利な理由の一つである。点変換に対する共変性を確認してみよう。まずは、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \quad (6.9)$$

だから

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \quad (6.10)$$

という関係が成り立つことを確認しよう。この関係はこのあと何度か使う。

ラグランジアン  $L(q_1, q_2, \dots, q_N)$  に対応するラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (6.11)$$

が成り立っているならば、点変換によって、ラグランジアンが  $L(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$  となったとき、このラグランジアンに対応するラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (6.12)$$

も成り立つことを示す。

<sup>1</sup> $Q_i$  での微分もできるとする。

(6.10) を時間微分して

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_j \quad (6.13)$$

式 (6.9) より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} \dot{Q}_j$$

この式と (6.13) を比較して、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \quad (6.14)$$

ここまですべて準備である。いよいよ今から証明に入る。ラグランジュの運動方程式を導出するときにもやるように、ラグランジアン  $L$  を  $\dot{Q}_k$  で偏微分することから始めよう。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \quad (6.15)$$

である。これを時間微分して

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \quad (6.16)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \quad (6.17)$$

次に

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \quad (6.18)$$

式 (6.16) から (6.18) を引いて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} &= \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \end{aligned}$$

従って、(6.11) が成り立つなら (6.12) も成り立つ。

もう一度強調しておこう。ラグランジュの運動方程式は点変換に対して共変である。一般化座標をどのようにとってもラグランジュの運動方程式の形が変わらないというこの共変性のおかげで、ラグランジュの力学では、問題に応じて解きやすい一般化座標を自由にとれる。

### 6.3.2 時間に依存する点変換

上で考えた点変換は時間に依存しない場合を考えた。しかし、時間に陽に依存する点変換

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_1(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), t) \\Q_2 &= Q_2(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), t) \\&\vdots \\Q_N &= Q_N(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), t)\end{aligned}$$

に対してもラグランジュの運動方程式は共変である。例えば回転する座標系をとってもよい。一定角速度で回転する回転系にあらわれる見かけの力（コリオリ力と遠心力）はこの時間に依存する点変換によって自然に導くことができる。

## Chapter 7

# 対称性と保存則

### 7.1 循環座標と保存則

ラグランジアン  $L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$  から定義される

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を一般化座標  $q_i$  に共役（きょうやく）な運動量（あるいは一般化運動量）という。一般化運動量はこの講義の後半で話すハミルトン力学では基本変数になるが、ここではとりあえず言葉の定義だけしておく。

$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$  が  $q_k$  に依存しないとき、 $q_k$  を循環座標という。循環座標に共役な一般化運動量は時間変化しない。つまり保存する。なぜなら、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

より、

$$\frac{d}{dt} (p_k) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

だからである。

#### 7.1.1 例 1

中心力、即ちポテンシャル  $U$  が半径のみの関数となる場合を考える。  
2次元極座標  $\{r, \phi\}$  を用いれば速度の2成分は、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}$$

となる。従って、ラグランジアンは

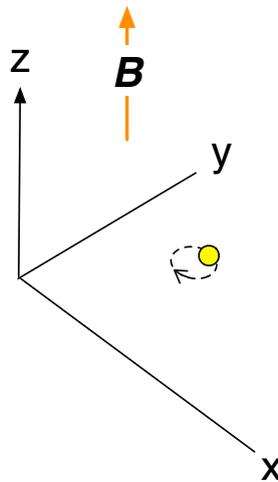
$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

である。このとき、 $\phi$  に共役な一般化運動量

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

は保存量である。これはいわゆる角運動量である。この系では  $\phi$  が循環座標になっているために  $\phi$  に共役な一般化運動量が保存し、それはニュートン力学の意味での角運動量の保存を意味する。

### 7.1.2 例2



一様磁場中の荷電粒子の運動を考えてみよう。カーテンシアン座標をとり、ベクトルポテンシャルを

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, x, 0)$$

とする。このとき、磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, 1)$$

である。つまり  $z$  軸方向の一様磁場を意味する。この磁場の下で運動する荷電粒子（質量  $m$ 、電荷  $e$  とする）を考えよう。（サイクロトン運動をすることは既知であろう。）ラグランジアンは、式 (6.3) より

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + ex\dot{y}$$

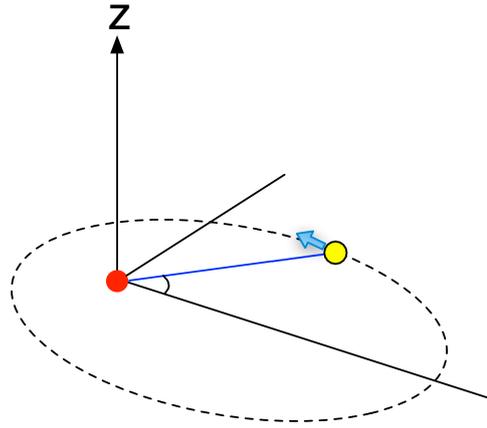
である。 $y$  と  $z$  が循環座標なので、それぞれに共役な一般化運動量

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + ex = m\dot{y} + eA_y \quad (7.1)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (7.2)$$

がそれぞれ保存する。式 (7.2) は  $z$  方向のニュートン力学でいう運動量保存 ( $z$  方向へは一定速度で移動すること) を意味するが、式 (7.1) の一般化運動量はニュートン力学の意味いう  $y$  方向への運動量とは異なる。

### 7.1.3 例 3



上の例 1 で

$$U(r) = -eQ/r \quad (e \text{ は定数})$$

の場合、これは原点に固定された電荷  $-Q$  が作るスカラーポテンシャル

$$\Phi(r) = -\frac{Q}{r}$$

の下での電荷  $e$  のポテンシャルに等しい<sup>1</sup>。この時の運動方程式の解の一つとして楕円軌道が得られることは既知であろう。では、この系にさらに磁場をかけてみよう。

円筒座標  $\{r, \phi, z\}$  を考え、時間的に変化しない次のベクトル  $\mathbf{A}$  を考える。

$$\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = (0, rB_0/2, 0) \quad (B_0 \text{ は定数}) \quad (7.3)$$

ベクトル解析の公式集をみれば分かる通り、一般に円筒座標では

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \quad (7.4)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (7.5)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \quad (7.6)$$

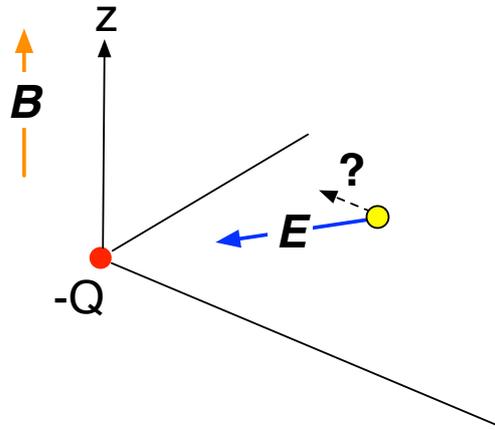
<sup>1</sup>これまでポテンシャルを  $\phi$  と書いてきたが、この後、一般化座標で  $\phi$  の文字を使うのでここでは大文字の  $\Phi$  とした。

である。従って今の場合、磁場  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  は  $z$  成分だけが非ゼロで、

$$\mathbf{B} = (B_r, B_\phi, B_z) = (0, 0, B_0)$$

である。つまり上のベクトルポテンシャル (7.3) は、 $z$  軸方向の一様な磁場のベクトルポテンシャルである。いま  $x$ - $y$  平面内の運動だけに限定し、極座標  $\{r, \phi\}$  を使って考えよう。

磁場の強さ  $B_0$  が極端に弱い極限を考えると、荷電粒子は楕円軌道を描く。一方、 $B_0$  が強い極限では、原点の電荷  $-Q$  からの引力は無視できて、この時はサイクロトロン運動をする。この中間の状況での運動について調べるためにラグランジアンを作ってみよう。



荷電粒子の速度は円筒座標で書けば

$$\dot{\mathbf{x}} = (v_r, v_\phi, v_z) = (\dot{r}, r\dot{\phi}, v_z)$$

である<sup>2</sup>。ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = (0, rB_0/2, 0)$$

なので、この系のラグランジアンは式 (6.3) より

$$L(r, \phi) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{eB_0}{2} r^2 \dot{\phi} + \frac{eQ}{r}$$

である。このラグランジアンを見ると、 $\phi$  は循環座標になっているので、 $\phi$  に共役な一般化運動量

$$p_\phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} + \frac{eB_0}{2} r^2$$

は保存する。通常の意味での角運動量  $mr^2 \dot{\phi}$  は保存しないが、一般化運動量  $p_\phi$  は保存するのである。一般化運動量は

$$p_\phi = mr^2 \dot{\phi} + eA_\phi$$

<sup>2</sup>2014.01.21  $v_z$  のところ 0 と書かれていたのを修正。

とも書ける。

ラグランジュの運動方程式を導いてみよう。まずは  $r$  成分：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 + eB_0r\dot{\phi} - \frac{Qe}{r^2}$$

従って運動方程式は

$$\{m\ddot{r}\} - \left\{ mr\dot{\phi}^2 + eB_0r\dot{\phi} - \frac{Qe}{r^2} \right\} = 0$$

つまり

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - \frac{eB_0}{m}r\dot{\phi} + \frac{eQ}{m} \frac{1}{r^2} = 0$$

である。一方  $\phi$  成分は上で見たように循環座標だから簡単である。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} + \frac{eB_0}{2}r^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} \left( mr^2\dot{\phi} + \frac{eB_0}{2}r^2 \right) = 2mrr\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} + eB_0r\dot{r} = 0$$

少し整理すると

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi} + \frac{eB_0}{m} \frac{\dot{r}}{r} = 0$$

となる。まとめると、運動方程式は

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 + \frac{eB_0}{m}r\dot{\phi} - \frac{eQ}{m} \frac{1}{r^2} \quad (7.7)$$

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi} - \frac{eB_0}{m} \frac{\dot{r}}{r} \quad (7.8)$$

である。この方程式を次章では数値的に解いて解を求める。

## 7.2 エネルギーの保存

これまでずっとラグランジアン  $L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$  が時間に陽には依存しない場合を考えてきた<sup>3</sup>。このような場合、

$$h := p_j \dot{q}_j - L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \quad (7.9)$$

<sup>3</sup>ラグランジアンが時間に陽に依存する場合というのは例えば  $L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q^2 + \cos t$  のようにラグランジアンが時間  $t$  に直接依存する場合である。このような場合でもラグランジュの運動方程式の導出手続きは同じである。この点については後で述べる予定である。

という量は時間変化しない。(保存するという。) なぜなら

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \{p_j \dot{q}_j - L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)\} \\
 &= \dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \quad [\text{第2項と第4項がキャンセル}] \\
 &= \dot{p}_j \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad [\text{定義} \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \text{より}] \\
 &= \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_j \\
 &= 0 \quad (\text{ラグランジュの運動方程式より})
 \end{aligned}$$

上では一般的な(どんな)ラグランジアンについても成り立つ話である。特に

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) = K - U$$

という形に書いて、 $U$ が $\dot{q}_i$ には依存せず、

$$K = \frac{m}{2} \dot{q}_j \dot{q}_j$$

と書ける場合には $h$ の意味が分かりやすくなる。この場合

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i$$

となる。(カーテシアン座標ならこれはよく知られた運動量の定義そのものである。) このとき $h$ は

$$h = m \dot{q}_j \dot{q}_j - (K - U) = m \dot{q}_j \dot{q}_j - \frac{m}{2} \dot{q}_j \dot{q}_j + U = K + U$$

つまり運動エネルギーとポテンシャルの和、全エネルギーを表す。上で確認した $dh/dt = 0$ という式、これはエネルギー保存則を意味する。

### 7.3 空間の一様性と運動量の保存

ラグランジアン $L$ が時間に陽に依存しないとき、エネルギー保存則が成り立つことが分かった。ラグランジアン $L$ が時間に陽に依存しないということは、時間 $t$ の原点をずらし、別の時間座標 $t'$

$$t \Rightarrow t' = t + t_0 \quad (t_0 \text{ は定数})$$

とずらしても $L$ が変わらないということである。

同じようなことが空間をずらす操作についても言える。二つの質点からなる系を考える。この系をカーテシアン座標で記述し、二つの質点の座標を

$$\mathbf{x} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{X} = (X, Y, Z)$$

ラグランジアンを

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$$

とする。

座標軸の原点の取り方を任意にずらしても（座標を任意の方向に任意の距離だけ並行移動しても）現象の記述は変わらないはずである。（別の位置に立つ人が同じ現象を見たら同じように見えるということである。）このようなずらし方を空間並進という。いまそのずらす量を微小とし、 $\delta \mathbf{r}$  と書くと、それぞれの座標はそれぞれ

$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = (x + \delta r_x, y + \delta r_y, z + \delta r_z)$$

$$\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}' = (X + \delta r_x, Y + \delta r_y, Z + \delta r_z)$$

と少しだけ変わるが、ラグランジアンは全く変わらないと期待できる。この座標変換によるラグランジアンの変化は少し丁寧に書くと

$$\begin{aligned} \delta L &= L(\mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}', \mathbf{X}', \dot{\mathbf{X}}') - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} \delta r_x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta r_y + \frac{\partial L}{\partial z} \delta r_z + \frac{\partial L}{\partial X} \delta r_x + \frac{\partial L}{\partial Y} \delta r_y + \frac{\partial L}{\partial Z} \delta r_z \end{aligned}$$

である。 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{X}$  に共役な運動量を  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{P}$  と書けば、この式は、

$$\begin{aligned} \delta L &= \dot{p}_x \delta r_x + \dot{p}_y \delta r_y + \dot{p}_z \delta r_z + \dot{P}_x \delta r_x + \dot{P}_y \delta r_y + \dot{P}_z \delta r_z \\ &= \frac{d}{dt} (p_x + P_x) \delta r_x + \frac{d}{dt} (p_y + P_y) \delta r_y + \frac{d}{dt} (p_z + P_z) \delta r_z \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

任意の微小ベクトル  $\delta \mathbf{r}$  に対して  $\delta L = 0$  とであることから、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{P}) = 0$$

である<sup>4</sup>。これは運動量保存則である。

上では二つの質点の系について運動量保存則を示したが、これが二個ではなく任意の個数の質点系に対しても成り立つことは上の導出を見れば明らかであろう。「ラグランジアンが空間並進に不変なら（これを空間並進に対して対称という）、その系の全運動量が保存する」ということが言える。

## 7.4 ネーターの定理

一般化座標  $q_i$  に対して、ラグランジアンがある無限小変換

$$q_i \Rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i$$

<sup>4</sup>2014.01.21  $p$  の時間微分が抜けていた。玉水君の指摘により修正。

に対して変化しない、つまり

$$L \Rightarrow L' = L$$

のとき

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

は保存量である。空間並進対称性に対応する保存量は運動量、空間回転対称性に対応する保存量は角運動量、時間並進対称性に対応する保存量はエネルギーである。  
上では無限小変換を考えたが、もっと一般にはラグランジアンが変換

$$q_i \Rightarrow q'_i = q_i + \Delta q_i$$

に対して

$$L \Rightarrow L' = L + \frac{dJ}{dt}$$

と変換される時（このとき運動方程式は変わらない）、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - J$$

は保存量であるということが示せる。これをネーターの定理という<sup>5</sup>。

---

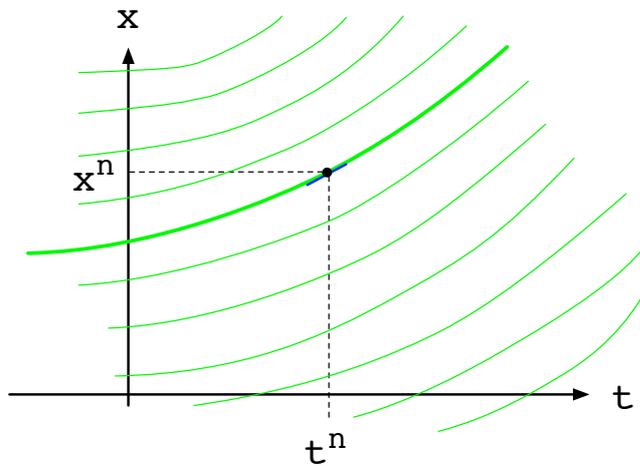
<sup>5</sup>なお、電磁場中のラグランジアン (6.3) では、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは一般化座標ではなく、その関数に過ぎないので、式 (6.7) と (6.8) のゲージ変換はすぐには保存量に結びつかない。このあたりの話は場の量の解析力学で学ぶ。

## Chapter 8

# 運動方程式の数値的解法

ラグランジュの運動方程式は時間の関数としての一般化座標に対する微分方程式である。ここでは数値積分法を使って、その運動方程式を解く方法について学ぶ。

### 8.1 数値積分



まずは数値積分について簡単に復習しよう。 $t$  の関数  $x = x(t)$  に対する常微分方程式を考える。

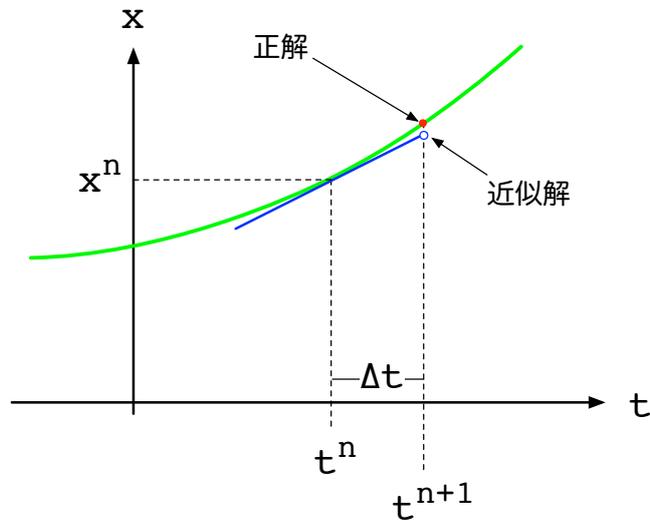
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (8.1)$$

ある時刻  $t^n$  での解  $x^n$  は既知とする。時間が  $\Delta t$  だけ進んだ未来の時刻  $t^{n+1} := t^n + \Delta t$  での解  $x^{n+1}$  を求める。

まず始めに、元の微分方程式 (8.1) のイメージを得ておこう。右辺の  $f(x, t)$  は、2次元  $x-t$  空間の場合である。この微分方程式のある初期条件に対する一つ解は、この空間上のある曲線  $x = x(t)$  である。初期条件が異なれば異なる解をもつ。二つの異なる解の曲線が交わることはない。だから、この  $x-t$  空間は、(異なる初期条件に対応する) 無数の解曲線がびっしりと埋め尽くしている。各点での関数  $f(x, t)$  の値は、その位置を通る解曲線  $x = x(t)$  の接線の傾きを表している。

### 8.1.1 陽的一次オイラー法

さて、この微分方程式 (8.1) を数値的に解く (積分する) ことを考えよう。図



から

$$x^{n+1} = x^n + \left(\frac{dx}{dt}\right)^n \Delta t$$

と近似するのが (陽的) 1次オイラー法である。式 (8.1) より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^n = f(x^n, t^n)$$

だから一次オイラー法は

$$x^{n+1} = x^n + f(x^n, t^n) \Delta t$$

と書ける。

図から明らかに  $x = x(t)$  の曲線がまっすぐ ( $t$  の一次関数) でない限り、一次オイラー法には誤差がある。微分方程式 (8.1) を積分すると

$$[x(t)]_{t^n}^{t^{n+1}} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, \tau) d\tau$$

つまり

$$x^{n+1} = x^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, \tau) d\tau$$

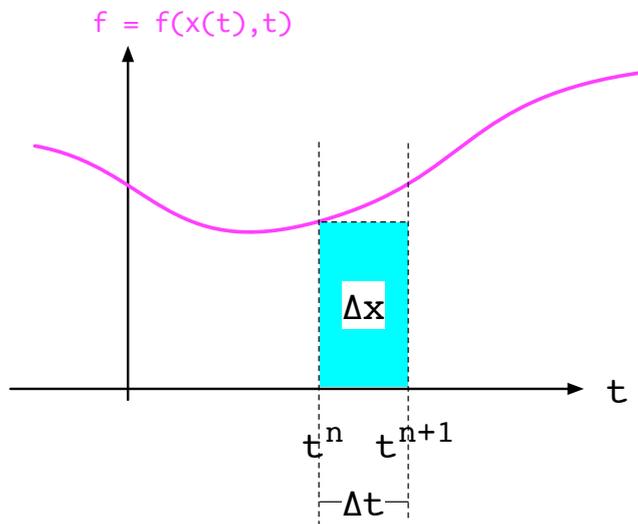
なので、

$$\Delta x := \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, \tau) d\tau$$

を定義すると、一次オイラー法は

$$\Delta x = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, \tau) d\tau \sim f(x^n, t^n) \Delta t$$

と近似していることを意味する。



### 8.1.2 2次ルンゲ=クッタ法

積分

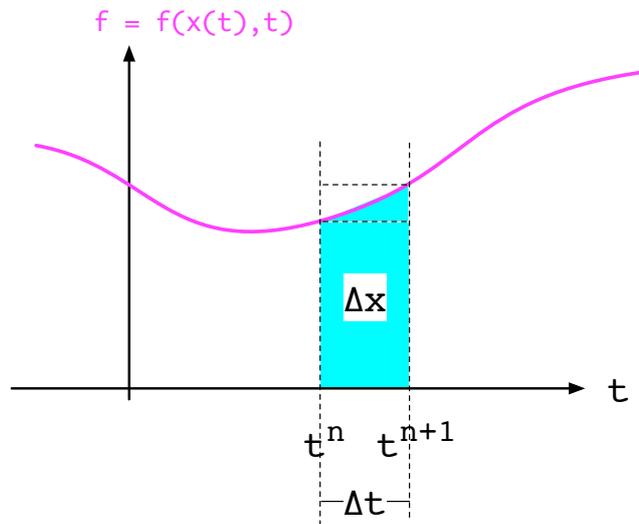
$$\Delta x = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x, \tau) d\tau$$

の精度を上げるためには台形公式

$$\Delta x = \frac{1}{2} \{f(x^n, t^n) \Delta t + f(x^{n+1}, t^{n+1}) \Delta t\}$$

を使えば良い。つまり

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2} \{f(x^n, t^n) \Delta t + f(x^{n+1}, t^{n+1}) \Delta t\}$$



であるが、右辺の最後の項には、今求めようとしている  $x^{n+1}$  が入っているので、このままでは使えない。そこで、右辺の最後の項に出てくる  $x^{n+1}$  を、一次オイラー法を使って近似した値  $x^*$  を使う。

$$x^* = x^n + f(x^n, t^n) \Delta t$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2} \{f(x^n, t^n) \Delta t + f(x^*, t^{n+1}) \Delta t\}$$

これを2次ルンゲ=クッタ法という。

$$\Delta x^{(1)} := f(x^n, t^n) \Delta t$$

$$\Delta x^{(2)} := f(x^*, t^{n+1}) \Delta t$$

と定義すると、

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2} (\Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)})$$

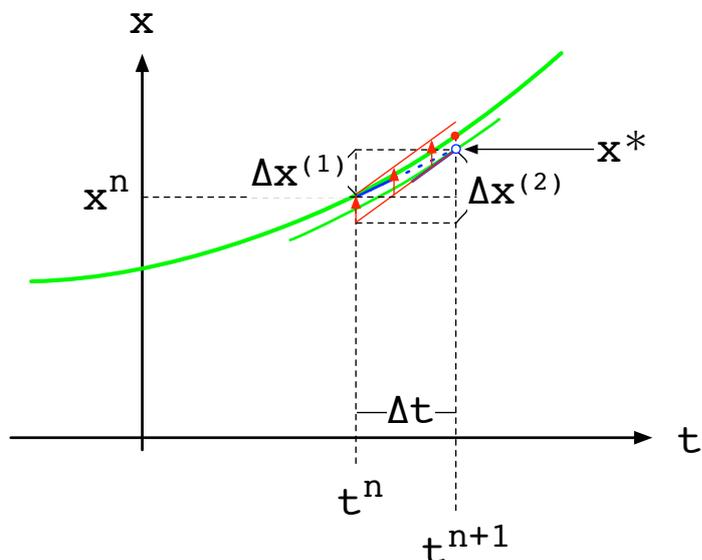
と書ける。 $f$  のグラフではなく、解のグラフ  $x(t)$  で描いた次のような図でも理解できる。

### 8.1.3 4次ルンゲ=クッタ法

2次のルンゲ=クッタ法よりもさらに精度を上げるためには、 $\Delta x$  の積分を計算するのに、台形公式ではなく、シンプソンの公式を使えばよい。そうして得られる数値積分法が4次のルンゲ=クッタ法である。

上に述べた1次オイラー法や2次ルンゲ=クッタ法は、

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$



という微分方程式を既知量  $x^n$  から未知量  $x^{n+1}$  を求めるために

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x$$

という計算をする。ここで増分  $\Delta x$  は

$$\Delta x = \sum_{k=1}^K w^{(k)} \Delta x^{(k)} \quad (w^{(k)} \text{ は定数})$$

という線形和である。1次オイラー法の場合には  $K = 1$  で

$$\Delta x^{(1)} = f(x^n, t^n) \Delta t$$

であり、2次ルンゲ=クッタ法では  $K = 2$  で

$$\Delta x^{(1)} = f(x^n, t^n) \Delta t$$

$$\Delta x^{(2)} = f(x^*, t^{n+1}) \Delta t$$

であった。

4次ルンゲ=クッタ法も手続きは同様である。この場合  $K = 4$  で、

$$\Delta x^{(k)} = f(x^\dagger, t^\dagger) \Delta t \quad (x^n \leq x^\dagger, t^n \leq t^\dagger)$$

という4つの増分の線形和で  $x^{n+1}$  を近似する。4次ルンゲ=クッタ法の詳しい式はここでは省略する。

### 8.1.4 連立微分方程式系

解くべき微分方程式が連立している場合も特に問題ない。 $t$  の関数  $\alpha = \alpha(t)$  と  $\beta = \beta(t)$  が結合している系

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= f(\alpha, \beta, t) \\ \frac{d\beta}{dt} &= g(\alpha, \beta, t)\end{aligned}$$

を4次ルンゲ=クッタ法で数値積分するには、

$$\begin{aligned}\Delta\alpha^{(k)} &= f(\alpha^\dagger, \beta^\dagger, t^\dagger) \Delta t \\ \Delta\beta^{(k)} &= g(\alpha^\dagger, \beta^\dagger, t^\dagger) \Delta t\end{aligned}$$

というそれぞれの変数の増分を計算し、その線形和をとればよい。

## 8.2 ラグランジュの運動方程式の数値積分

### 8.2.1 2階微分方程式系の一階微分方程式系への変換

ラグランジアン  $L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  からラグランジュの運動方程式を作ると、 $q_i$  の2階微分が出てくる。例えば、第7.1.3章の例題では、2階の連立微分方程式 (7.7) と (7.8)

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\phi}^2 + \frac{eB_0}{m} r\dot{\phi} - \frac{eQ}{m} \frac{1}{r^2} \\ \ddot{\phi} &= -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi} - \frac{eB_0}{m} \frac{\dot{r}}{r}\end{aligned}$$

が得られた。このような2階の微分方程式を4次ルンゲ=クッタ法などを使って数値積分するのは簡単である。変数を増やして一階の微分方程式にすればよい。たとえば今の場合、

$$\begin{aligned}v_r &= \dot{r} \\ v_\phi &= \dot{\phi}\end{aligned}$$

という新しい変数を定義すると、解くべき微分方程式系は

$$\dot{r} = v_r \tag{8.2}$$

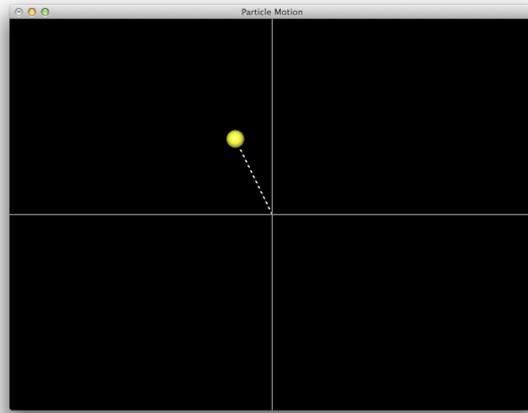
$$\dot{v}_r = r v_\phi^2 + \frac{eB_0}{m} r v_\phi - \frac{eQ}{m} \frac{1}{r^2} \tag{8.3}$$

$$\dot{\phi} = v_\phi \tag{8.4}$$

$$\dot{v}_\phi = -2\frac{v_r}{r} v_\phi - \frac{eB_0}{m} \frac{v_r}{r} \tag{8.5}$$

となり一階微分しかでてこなくなった。4つの変数 ( $r, v_r, \phi, v_\phi$ ) に対する一階の微分方程式系なので、ルンゲ=クッタ法などで簡単に解くことができる。

### 8.2.2 実例



4次のルンゲ=クッタ法で上の式 (8.2) から (8.5) を解くプログラムを作った。

質点（荷電粒子）の構造体は以下のように定義した：

Listing 8.1: lagran.eq\_motion\_sample00\_ptcl.cpp

```
1
2 struct particle_ {
3     double mass; // mass of the particle
4     double charge; // electric charge
5     double pos[4]; // {r,v_r,phi,v_phi}
6     GLfloat color_diffuse[4];
7     GLdouble sphere_radius;
8     GLint sphere_slices , sphere_stacks;
9 };
```

4次ルンゲ=クッタ法を使っているのは次の部分である：

Listing 8.2: lagran\_eq\_motion\_sample00\_rk4.cpp

```
1
2
3 void runge_kutta4(struct particle_ *particle, double dt)
4 {
5     const double ONE_SIXTH = 1.0/6.0;
6     const double ONE_THIRD = 1.0/3.0;
7
8     double pos_before[4], work_pos[4];
9     double dpos1[4], dpos2[4], dpos3[4], dpos4[4];
10
11     pos_before[0] = particle->pos[0];
12     pos_before[1] = particle->pos[1];
13     pos_before[2] = particle->pos[2];
14     pos_before[3] = particle->pos[3];
15
16     double mass = particle->mass;
17     double charge = particle->charge;
18
19     //step 1
20     equation_of_motion(mass, charge, pos_before, dpos1, dt);
21     runge_kutta4_advance(work_pos, pos_before, dpos1, 0.5);
22     //step 2
23     equation_of_motion(mass, charge, work_pos, dpos2, dt);
24     runge_kutta4_advance(work_pos, pos_before, dpos2, 0.5);
25     //step 3
26     equation_of_motion(mass, charge, work_pos, dpos3, dt);
27     runge_kutta4_advance(work_pos, pos_before, dpos3, 1.0);
28     //step 4
29     equation_of_motion(mass, charge, work_pos, dpos4, dt);
30
31     //the result
32     particle->pos[0] = pos_before[0] + ( ONE_SIXTH*dpos1[0]
33                                     + ONE_THIRD*dpos2[0]
34                                     + ONE_THIRD*dpos3[0]
35                                     + ONE_SIXTH*dpos4[0] );
36     particle->pos[1] = pos_before[1] + ( ONE_SIXTH*dpos1[1]
37                                     + ONE_THIRD*dpos2[1]
38                                     + ONE_THIRD*dpos3[1]
39                                     + ONE_SIXTH*dpos4[1] );
40     particle->pos[2] = pos_before[2] + ( ONE_SIXTH*dpos1[2]
41                                     + ONE_THIRD*dpos2[2]
42                                     + ONE_THIRD*dpos3[2]
43                                     + ONE_SIXTH*dpos4[2] );
```

```
44     particle->pos[3] = pos_before[3] + ( ONE_SIXTH*dpos1[3]
45                                         + ONE_THIRD*dpos2[3]
46                                         + ONE_THIRD*dpos3[3]
47                                         + ONE_SIXTH*dpos4[3] );
48     std::cout << "total energy: "
49               << std::scientific
50               << total_energy(mass, charge, particle->pos)
51               << std::endl;
52 }
```

運動方程式 (8.2) から (8.5) は以下のようにコーディングされている：なお、以下のプログラムで `CENTER_CHARGE_Q` の値は、符号付き（実際には負の値）で定義しているため、式 (8.3) とは中心電荷  $Q$  が現れる項の符号が逆になっているので注意（重地君の指摘）。

Listing 8.3: lagran\_eq\_motion\_sample00.cpp

```

1
2 void equation_of_motion(double mass, double charge,
3                          double *pos, double *dpos, double dt)
4 {
5     const double B = 0.01; // Magnetic field
6
7     double r = pos[0];
8     double vr = pos[1];
9     double p = pos[2];
10    double vp = pos[3];
11
12    double rvp = r*vp;
13    double vr_r = vr/r;
14
15    double eB_m = B*charge/mass;
16    double eQ_m = CENTER_CHARGE_Q*charge/mass;
17
18    dpos[0] = ( vr ) * dt;
19    dpos[1] = ( rvp*vp + eQ_m / ( r*r)
20              + eB_m*rvp ) * dt;
21    dpos[2] = ( vp ) * dt;
22    dpos[3] = ( -2*vr_r*vp - eB_m*vr_r ) * dt;
23 }
```

### 8.2.3 練習問題

これは、この講義の冒頭でとりあげた問題である。二つの放物線

$$y = x^2 + 1 \quad (\text{上側})$$

と

$$y = -x^2 - 1 \quad (\text{下側})$$

に二つの質点（質量  $m$ ）がそれぞれ放物線上に拘束されて動くとする。質点同士はバネ（バネ定数  $k$ 、自然長  $l_0$ ）で結ばれている。摩擦は無視する。この質点の運動を解くためのプログラムを作ろう。上のサンプルプログラム `lagran_eq_motion_sample00_ptcl.cpp` と `lagran_eq_motion_sample00.cpp` について、

- どのプログラムの
- どの部分（行番号）を

- どう変更するか

について具体的に紙に書け。

### 略解

上と下の放物線を動く質点の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$  と  $(x_2, y_2)$  とする。上の質点の速度を  $v_1$  とすると、

$$v_1^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \dot{x}_1^2 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 \dot{x}_1^2 = (4x_1^2 + 1)\dot{x}_1^2$$

2つの質点間の距離を  $s$  とすると

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 + x_2^2 + 2)^2}$$

従ってラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2} \{(4x_1^2 + 1)\dot{x}_1^2 + (4x_2^2 + 1)\dot{x}_2^2\} - \frac{k}{2}(s - s_0)^2$$

である<sup>1</sup>。ここではバネの自然長を  $s_0$  とした。

ラグランジュの運動方程式を導出しよう。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m(4x_1^2 + 1)\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m(4x_1^2 + 1)\ddot{x}_1 + 8mx_1\dot{x}_1^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4mx_1\dot{x}_1^2 - k \frac{s - s_0}{s} \{(x_1 - x_2) + 2x_1(x_1^2 + x_2^2 + 2)\}$$

より上の放物線を動く質点の運動方程式は

$$m(4x_1^2 + 1)\ddot{x}_1 + 8mx_1\dot{x}_1^2 = 4mx_1\dot{x}_1^2 - k \frac{s - s_0}{s} (\Delta x + 2x_1 \Delta y)$$

ここで、プログラミング上の便宜を考え、

$$\Delta x = x_1 - x_2$$

$$\Delta y = y_1 - y_2$$

を導入した。この式を書き直すと、

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{4x_1^2 + 1} \left\{ 4x_1\dot{x}_1^2 + \frac{k}{m} \frac{s - s_0}{s} (\Delta x + 2x_1 \Delta y) \right\}$$

が上の放物線を動く質点の運動方程式である。同様に下の質点の運動方程式は、

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{4x_2^2 + 1} \left\{ 4x_2\dot{x}_2^2 + \frac{k}{m} \frac{s - s_0}{s} (-\Delta x + 2x_2 \Delta y) \right\}$$

<sup>1</sup>2014.01.20 入江君の指摘により修正 (最後の2乗が抜けていた)。

【解答例】運動方程式の実装例は以下の通り。

Listing 8.4: two\_balls\_parabola\_rev\_equation

```

1 void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
2 {
3     //      Lagrangian
4     //      L(x1,x2,x1',x2') = (m/2)*(x1'^2+4*x1^2*x1'^2)
5     //                        + (m/2)*(x2'^2+4*x2^2*x2'^2)
6     //                        - (k/2)*(s-S0)^2
7     //      where
8     //      s = sqrt(dx^2+dy^2), dx=x1-x2, dy=x1^2+x2^2+2
9     //
10    double x1      = pos[0];
11    double x1_dot  = pos[1];
12    double x2      = pos[2];
13    double x2_dot  = pos[3];
14
15    double dx      = x1 - x2;
16    double x1sq   = x1*x1, x1_dot_sq = x1_dot*x1_dot;
17    double x2sq   = x2*x2, x2_dot_sq = x2_dot*x2_dot;
18    double dy     = x1sq + x2sq + 2;
19    double s      = sqrt(dx*dx + dy*dy);
20
21    double f1     = (K/M)*(s-S0)/s*( dx+2*x1*dy);
22    double f2     = (K/M)*(s-S0)/s*(-dx+2*x2*dy);
23
24    dpos[0]      = ( x1_dot ) * dt;
25    dpos[1]      = ( -1.0/(1+4*x1sq)*(4*x1*x1_dot_sq + f1) ) * dt;
26    dpos[2]      = ( x2_dot ) * dt;
27    dpos[3]      = ( -1.0/(1+4*x2sq)*(4*x2*x2_dot_sq + f2) ) * dt;
28 }

```

ルンゲ=クッタ法による積分ルーチンの実装例。質量と電荷を渡す部分以外、本質的には何も変えてないことに注目せよ。

Listing 8.5: two\_balls\_parabola\_rev\_rk4

```
1 void runge_kutta4(struct particle_ *particle , double dt)
2 {
3     const double ONE_SIXTH = 1.0/6.0;
4     const double ONE_THIRD = 1.0/3.0;
5
6     double pos_before [4] , work_pos [4];
7     double dpos1 [4] , dpos2 [4] , dpos3 [4] , dpos4 [4];
8
9     pos_before [0] = particle->pos [0];
10    pos_before [1] = particle->pos [1];
11    pos_before [2] = particle->pos [2];
12    pos_before [3] = particle->pos [3];
13
14    //step 1
15    equation_of_motion (pos_before , dpos1 , dt);
16    runge_kutta4_advance (work_pos , pos_before , dpos1 , 0.5);
17    //step 2
18    equation_of_motion (work_pos , dpos2 , dt);
19    runge_kutta4_advance (work_pos , pos_before , dpos2 , 0.5);
20    //step 3
21    equation_of_motion (work_pos , dpos3 , dt);
22    runge_kutta4_advance (work_pos , pos_before , dpos3 , 1.0);
23    //step 4
24    equation_of_motion (work_pos , dpos4 , dt);
25
26    //the result
27    particle->pos [0] = pos_before [0] + ( ONE_SIXTH*dpos1 [0]
28                                           + ONE_THIRD*dpos2 [0]
29                                           + ONE_THIRD*dpos3 [0]
30                                           + ONE_SIXTH*dpos4 [0] );
31    particle->pos [1] = pos_before [1] + ( ONE_SIXTH*dpos1 [1]
32                                           + ONE_THIRD*dpos2 [1]
33                                           + ONE_THIRD*dpos3 [1]
34                                           + ONE_SIXTH*dpos4 [1] );
35    particle->pos [2] = pos_before [2] + ( ONE_SIXTH*dpos1 [2]
36                                           + ONE_THIRD*dpos2 [2]
37                                           + ONE_THIRD*dpos3 [2]
38                                           + ONE_SIXTH*dpos4 [2] );
39    particle->pos [3] = pos_before [3] + ( ONE_SIXTH*dpos1 [3]
40                                           + ONE_THIRD*dpos2 [3]
41                                           + ONE_THIRD*dpos3 [3]
42                                           + ONE_SIXTH*dpos4 [3] );
```

```
43
44     std::cout << "total energy: "
45                 << std::scientific
46                 << total_energy(particle->pos)
47                 << std::endl;
48 }
```



## Chapter 9

# ハミルトン形式の力学（1）

### 9.1 ラグランジュ形式の不便さ

1 自由度系のラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

であった。これは、時間  $t$  に関する 2 階の微分方程式である。

前回紹介したように、一階の微分方程式系を解くために開発された様々な数値積分法を使って 1 自由度系のラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  から得られるラグランジュの運動方程式を数値的に解くことはそれほど難しいことではない。その手続きは、まずはラグランジュの運動方程式を

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q})$$

という形に変形し、

$$\dot{q} = v \tag{9.1}$$

$$\dot{v} = F(q, v) \tag{9.2}$$

という 2 つの一階微分方程式に分けるという簡単なものだからである。

だが、自由度が 2 以上となるとそう簡単ではない。 $N$  自由度系のラグランジアン  $L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  から得られるラグランジュの運動方程式を数値計算で解く場合を考えよう。

数値積分プログラムに渡すことを想定し、 $q_i$  に共役な一般化運動量  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  を新たな変数として導入する。するとラグランジュの運動方程式は、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \tag{9.3}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \tag{9.4}$$

という  $2N$  個の一階微分方程式系に自然に分けられる。

しかし、この式のままでは  $\dot{q}_i$  が右辺に入っているので、数値積分プログラムにこの式をそのまま移すことはできない。そこで、この式を手計算で変形し、

$$\dot{q}_i = F_q(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), \quad (9.5)$$

$$\dot{p}_i = F_p(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (9.6)$$

という形に変換した上でようやく数値積分プログラムに渡すことが出来る。

面倒な式変形なしに、式 (9.5) と式 (9.6) の形で微分方程式系が自然に導出されるような力学理論があれば便利であろう。実は、そのような理論は存在する！ハミルトン形式の解析力学と呼ばれるものである。

これまで学んできたラグランジュ形式の解析力学ではラグランジアン  $L$  が中心的な役割を果たす関数であったが、ハミルトン形式の解析力学では、ラグランジアンに代わって新しい関数が基本的な役割を果たす。それはハミルトニアンと呼ばれる。

ラグランジュ形式の解析力学では、

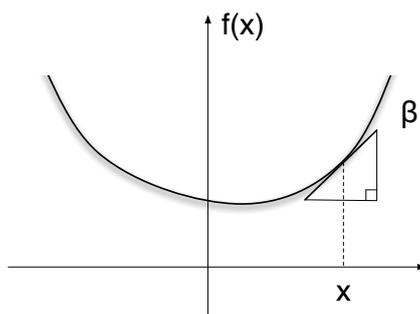
$$p_i = \frac{\partial L(\dots, \dot{q}_i, \dots)}{\partial \dot{q}_i}$$

という式が得られて、これは数値計算上不便なので、最初から

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\dots, p_i, \dots)}{\partial p_i}$$

という形が得られる方法が欲しいというわけであるが、こういう場合にはルジャンドル変換を使うのが便利である。上の  $H$  がハミルトニアンである。

## 9.2 ルジャンドル変換



$x$  の凸関数  $f(x)$  を考える。凸関数では、 $x$  に対して、接線の傾き  $\beta$

$$\beta = \frac{df(x)}{dx}$$

が一意に決まる (二つの異なる  $x$  で同じ接線の傾きを持つことはない)。これを  $x$  から  $\beta$  への変数変換

$$x \Leftrightarrow \beta$$

ととらえることができる。ではこの新しい変数  $\beta$  に対して、上に対応するような関係

$$x = \frac{dg(\beta)}{d\beta}$$

を導く関数  $g(\beta)$  は何であろうか？

それは

$$x\beta = f + g \quad (9.7)$$

を満たす関数、つまり

$$g(\beta) = x\beta - f(x) \quad (9.8)$$

である。なぜなら

$$g(\beta) = x(\beta)\beta - f(x(\beta))$$

に対して、

$$\frac{dg}{d\beta} = x + \beta \frac{dx}{d\beta} - \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\beta} = x$$

であるからである。ここで  $\frac{df}{dx} = \beta$  を使った。式 (9.8) を  $x$  に関する  $f$  から  $g$  へのルジャンドル (Legendre) 変換という。

$g$  も凸関数である。また、式 (9.7) の対称性から明らかなように、ルジャンドル変換した関数から逆にルジャンドル変換すると元に戻る。

ルジャンドル変換の簡単な例をあげれば、

$$f_0(x) = x^2 \Leftrightarrow g_0(\beta) = \frac{\beta^2}{4}$$

である。この関数  $f_0(x)$  を  $x$  方向に並行移動した関数のルジャンドル変換は

$$f_1(x) = (x-1)^2 \Leftrightarrow g_1(\beta) = \frac{\beta^2}{4} + \beta$$

である。また、 $f_0(x)$  を定数倍した関数のルジャンドル変換は

$$f_2(x) = cx^2 \Leftrightarrow g_2(\beta) = \frac{\beta^2}{4c}$$

となる。

ラグランジュの運動方程式に戻ろう。ラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  の変数  $q$  は省略して  $L(\dot{q})$  と書くことにすると、

$$p = \frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

という式はこのままでは使いにくいので、

$$\dot{q} = \frac{\partial(?)}{\partial p}$$

という形に持って行きたいという話をしていた。そこで、 $L(\dot{q})$  に  $\dot{q}$  に関するルジャンドル変換を施した

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$$

に対して

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p)}{\partial p}$$

となる。これで、望みどおりの形になった。念の為にもう一度確認してみると、

$$\frac{\partial H(p)}{\partial p} = \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

と確かに成り立っている。

### 9.3 ハミルトニアン

ラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  を  $\dot{q}$  に関してルジャンドル変換した

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$$

をハミルトニアン (Hamiltonian) という。

ハミルトニアンでは  $q$  と  $p$  が独立変数である。 $p$  を  $q$  に共役な運動量ということは以前述べたが、 $p$  を正準運動量ともいう。 $q$  は正準座標という。 $q$  と  $p$  の組を正準変数という。

上で書いたように、

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

と書ける。では、 $\frac{\partial H}{\partial q}$  がどうなるか、計算してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \{p\dot{q} - L(q, \dot{q}(q, p))\} \\ &= p \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \\ &\quad \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \text{ より} \right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q} \\ &= -\dot{p} \end{aligned}$$

ここで、最後の变形では、ラグランジュの運動方程式の帰結

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (9.9)$$

を使った。

## 9.4 正準方程式

上では、ラグランジアンが与えられていて、ラグランジュの運動方程式が成り立つならば、即ち式 (9.9) を仮定すれば、

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

が成り立つことを示した。ここで、ラグランジアンのこと忘れて、ハミルトニアン  $H(q, p)$  が基本的な存在であると考えてみよう。そうすると、運動方程式は、

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \end{cases} \quad (9.10)$$

となる。これをハミルトン形式の運動方程式（あるいは正準運動方程式）という。

ラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  が既知だけでもハミルトニアンが  $H(q, p)$  未知の場合は、ルジャンドル変換

$$H(q, p) = p\dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (9.11)$$

によってハミルトニアンを構成することができる。ここで、 $p$  は、 $q$  に共役な正準運動量で、

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

である。 $\dot{q}(q, p)$  は上の式を解けば求まる。

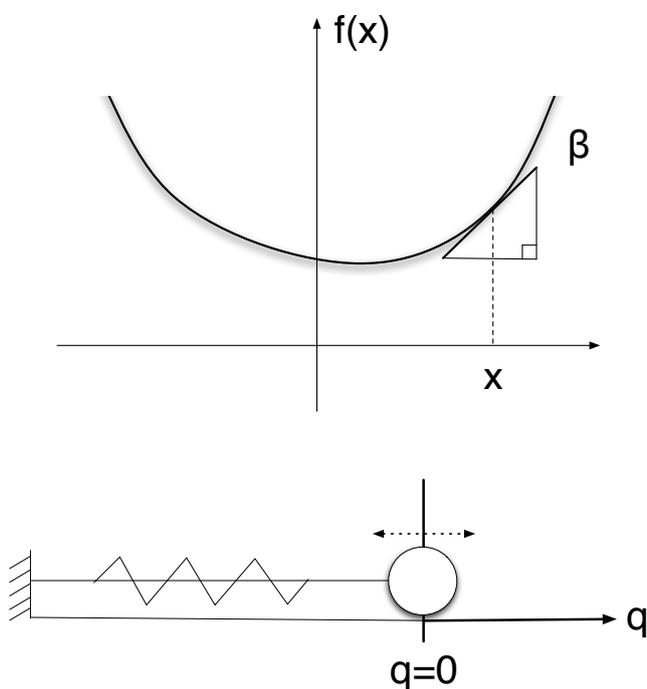
## 9.5 ルジャンドル変換としての $L$ と $H$

ルジャンドル変換としてのラグランジアンとハミルトニアンの関係を以下に整理してみよう。

$$\begin{aligned} x &\Leftrightarrow \beta \\ f(x) &\Leftrightarrow g(\beta) \\ \frac{df}{dx} = \beta &\Leftrightarrow \frac{dg}{d\beta} = x \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \dot{q} &\Leftrightarrow p \\ L(\dots, \dot{q}) &\Leftrightarrow H(\dots, p) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p &\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \end{aligned}$$



## 9.6 例 1

バネ (定数  $k$ ) と質点 (質量  $m$ ) の 1 次元系を考えよう。自然長の位置を  $q = 0$  として正準座標  $q$  をとると、この系のラグランジアン  $L$  は

$$L(q, \dot{q}) = K - U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2$$

である。正準運動量  $p$  は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

だから、この系のハミルトニアンは、ルジャンドル変換より

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2} q^2 \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$$

ある。

改めて書くと、この系のハミルトニアンは、

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \quad (9.12)$$

で与えられる。正準方程式をたててみよう。

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (9.13)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (9.14)$$

この正準方程式は式 (9.1) と (9.2) という形に自動的にになっている。したがって、このまま数値積分プログラムに移すことができるので大変便利である。

念の為、上の正準方程式 (9.13) と (9.14) を解析的に解いてみよう。

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{m} \quad [\text{式 (9.13) より}] \\ &= \frac{-k}{m}q \quad [\text{式 (9.14) より}] \end{aligned}$$

従って、

$$q = c_1 \sin(\omega t + c_2) \quad (9.15)$$

ここで  $c_1$  と  $c_2$  は定数、 $\omega$  は角振動数で

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。

このハミルトニアン (9.12) を  $q$  と  $\dot{q}$  で書いてみると、

$$H = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2 = K + U$$

であることがわかる。つまりハミルトニアンは系の全エネルギーの関数形に等しい。

## 9.7 ハミルトニアンとエネルギー

ハミルトニアンが全エネルギーの式に一致するのは偶然ではない。ポテンシャル  $U(q)$  が速度に依存せず、運動エネルギー  $K$  が  $q$  の関数  $f(q)$  を使って

$$K(q) = f(q)\dot{q}^2$$

という形で書ける 1 自由度系の場合についてこのことを確認しよう。この場合、ラグランジアン  $L$  は

$$L = K - U = f(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

である。正準運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2f(q)\dot{q}$$

である。ルジャンドル変換によって

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L \\ &= 2f(q)\dot{q}\dot{q} - (f(q)\dot{q}^2 - U(q)) \\ &= f(q)\dot{q}^2 + U(q) \\ &= K + U \end{aligned}$$

こうして、

$$H = (\text{運動エネルギー}) + (\text{ポテンシャル}) = (\text{全エネルギー})$$

確かめられた。

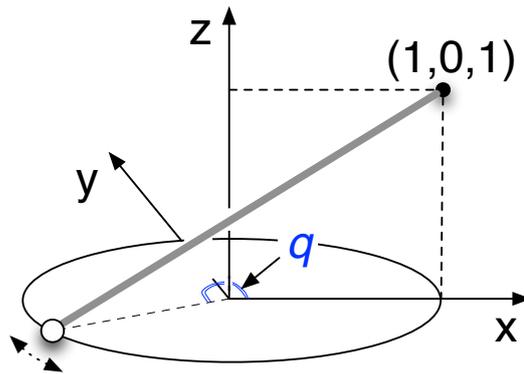
なお、これは関数の形が全エネルギーと等しいという意味である。ハミルトニアン  $H$  は  $q$  と  $p$  の関数（相空間中の場）であり、ジュール単位で測る量としての全エネルギーとは異なることに注意しよう。

## Chapter 10

# ハミルトン形式の力学 (2)

### 10.1 1 自由度系の正準方程式の練習問題

#### 10.1.1 問題 1



以前、ラグランジュの運動方程式で解いた問題を、ハミルトンの運動方程式で解いてみよう。

質量  $m$  の質点が、原点を中心とする半径 1 の円 ( $x^2 + y^2 = 1$ ) の上を滑る。この質点が、点  $(x, y, z) = (1, 0, 1)$  とバネでつながれているときの運動を求める。重力はなく、摩擦は無視する。バネ定数は  $k$ 、自然長は 0 とする。

- 図のように  $x$  軸との角度  $q$  を一般化座標として、この系のラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  を求めよ。
- $q$  に共役な運動量  $p$  を求めよ。
- $q$  と  $p$  を正準変数としたハミルトニアン  $H(q, p)$  を求めよ。
- ハミルトンの運動方程式を書け。

(e)  $|q| \ll 1$  の時の解を求めよ。

### 10.1.2 解

(寺本君と山本君の解答に基づく。)

(a) 運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{q}^2$$

質点の座標は  $(x, y, z) = (\cos q, \sin q, 0)$  なので、バネの長さを  $\ell$  とすると

$$\ell^2 = (\cos q - 1)^2 + \sin^2 q + 1 = 3 - 2 \cos q$$

だからポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{k}{2} \ell^2 = \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

である。

(b)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

(c) ラグランジアンをルジャンドル変換して、

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

つまり、この系のハミルトニアン  $H$  は

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

である。 $H = K + U$  であることに注意しよう。

(d)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (10.1)$$

と

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k \sin q \quad (10.2)$$

の2つが正準方程式である。

(d)  $|q| \ll 1$  のとき  $\sin q \sim q$  だから、(10.2) は

$$\dot{p} = -kq$$

となる。式 (10.1) を時間微分した式にこれを代入すると、

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

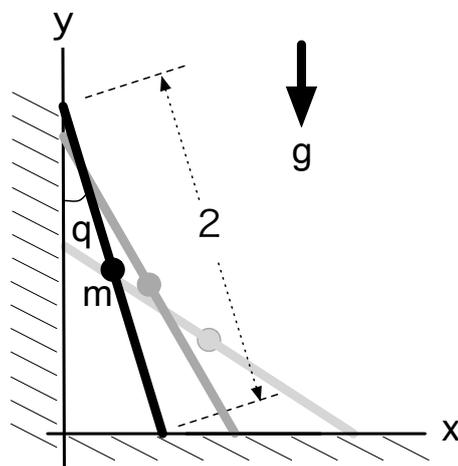
を得る。ここで  $\omega^2 = k/m$  である。従って解は

$$q(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2)$$

$c_1$  と  $c_2$  は定数。

### 10.1.3 問題 2

これも以前、ラグランジュ形式で解いた問題である。



長さ 2 の重さのない棒の中心に固着した質量  $m$  の質点がある。鉛直下方の一樣重力（重力定数  $g$ ）の下、この棒を壁に（斜めに）立て掛けた。床面に沿って  $x$  軸、壁面に沿って  $y$  軸をとる。棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないように（摩擦なしで）滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。棒と壁のなす角度  $q$  を正準座標とする。

- ラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  を書け。
- $q$  に共役な運動量  $p$  を書け。
- $p$  と  $q$  を正準変数としたハミルトニアン  $H(q, p)$  を書け。
- 正準運動方程式を書け。
- $q \ll 1$  の時の解を求めよ。

## 10.1.4 解答

(三好君の解答に基づく。)

(a) 質点の位置を  $(x, y)$  とすると

$$(x, y) = (\sin q, \cos q)$$

速度は

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\cos q \dot{q}, -\sin q \dot{q})$$

である。棒は質量を持たないので、この系の運動エネルギー  $K$  は、質点だけが持っている。従って、

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$

同様に棒はポテンシャルを持たないので、系のポテンシャル  $U$  は、質点の重力ポテンシャル

$$U = mgy = mg \cos q$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mg \cos q$$

である。

(b)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

(c) ルジャンドル変換により

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + mg \cos q$$

(d)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = mg \sin q\end{aligned}$$

(e)  $|q| \ll 1$  の時、 $\sin q \sim q$  より、正準方程式は

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= mgq\end{aligned}$$

となる。この2つの式から

$$\ddot{q} = gq$$

この解は  $c_1$  と  $c_2$  を定数として

$$q(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t} + c_2 e^{-\sqrt{g}t}$$

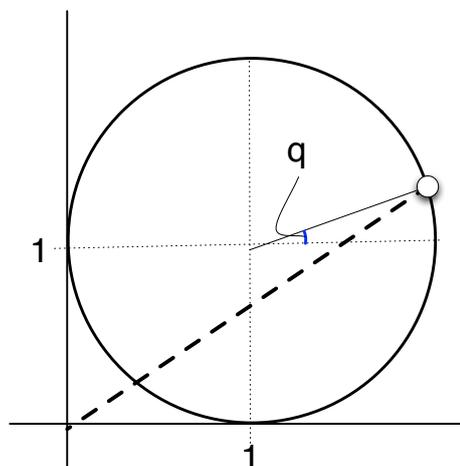
と書けるが、このうち、自然な（棒が倒れていく）解は  $c_2 = 0$ 、つまり

$$q(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t}$$

である。棒が倒れるとき、角度が  $\sqrt{g}$  の成長率で指数関数的に増大することを意味する。

## 10.2 練習問題

### 10.2.1 問題 1



$x$  軸と  $y$  軸に接する半径 1 の円周上を質量  $m$  の質点が滑らかに滑る。原点と質点はバネ（ばね定数  $k$ 、自然長 0）で結ばれている。図のように  $x$  軸となす角度  $q$  を正準座標とする。

(1-1) この系のハミルトニアン  $H(q, p)$  を導出せよ。

(1-2) この系の正準方程式を書け。

(1-3) 質点の運動について考察せよ（ヒント：振り子）。

### 10.2.2 解答

(1-1) 質点の速度は  $\dot{q}$ 、運動エネルギーは  $m\dot{q}^2/2$ 、バネのポテンシャルは

$$U(q) = \frac{k}{2} \{(1 + \cos q)^2 + (1 + \sin q)^2\}$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - k \left( \cos q + \sin q + \frac{3}{2} \right)$$

定数  $3k/2$  は省略して、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - k (\cos q + \sin q)$$

としても構わない。これから、 $q$  に共役な運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

従って、ハミルトニアンは

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + k (\cos q + \sin q)$$

あるいは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \sqrt{2}k \cos \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \quad (10.3)$$

等としてももちろん構わない。

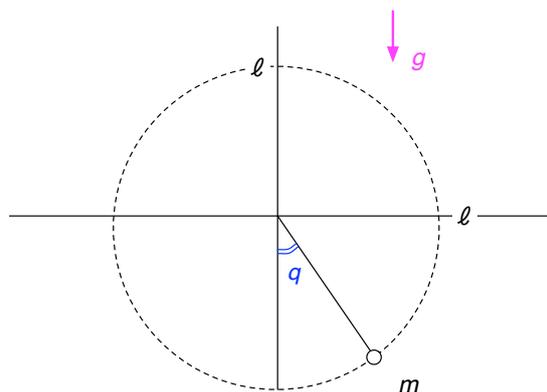
(1-2) 正準方程式は

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (10.4)$$

$$\dot{p} = k (\sin q - \cos q) \quad (10.5)$$

である。

(1-3)  $q = 5\pi/4$  方向に重力加速度のある系での振り子の運動と同じである。一



様重力  $g$  の下で半径  $\ell$  の円上を滑らかに滑る質量  $m$  の質点の運動を考え

る。(つまり長さ  $\ell$  の糸による振り子の運動。) 図のように角度  $q$  をとり、 $p = m\ell^2\dot{q}$  とするとこの系のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg \cos q \quad (10.6)$$

正準方程式は

$$\dot{q} = \frac{1}{m\ell^2} p \quad (10.7)$$

$$\dot{p} = -mg \sin q \quad (10.8)$$

である。2つのハミルトニアン (10.3) と (10.6) を比較すると、バネの問題のハミルトニアン (10.6) は、一様重力下の振り子のハミルトニアン (10.3) を  $\ell \rightarrow 1$ 、 $k \rightarrow \sqrt{2}k$  として  $q \rightarrow q + 5\pi/4$  と変換した場合に相当することが分かる。つまり、 $x$  軸から  $5\pi/4$  方向に  $\sqrt{2}k$  の重力加速度がある場合の振り子の運動と同じである。

### 10.2.3 問題 2

ラグランジアン  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$  の系について、

(2-1) ハミルトニアン  $H(q, p)$  を書け。

(2-2) 正準運動方程式を書け。

(2-3)  $q(0) = p(0) = 1$  の初期条件の下で  $q(t)$  と  $p(t)$  をそれぞれ解け。

### 10.2.4 解答

(2-1) ラグランジアン

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$$

から  $q$  に共役な正準運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q + \dot{q}$$

である。したがってハミルトニアン  $H$  は、 $L$  をルジャンドル変換して

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \\ &= p(p - q) - \frac{1}{2}p^2 \\ &= \frac{p^2}{2} - pq \end{aligned}$$

(2-2) 正準方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

に上のハミルトニアン  $H(q, p)$  を代入すると、

$$\dot{q} = p - q \quad (10.9)$$

と

$$\dot{p} = p \quad (10.10)$$

の二つが求める正準方程式である。

(2-3) 式 (10.10) の解は、

$$p(t) = c e^t$$

である。ここで  $c$  は定数。初期条件  $p(0) = 1$  より、 $c = 1$ 、つまり

$$p(t) = e^t$$

が  $p(t)$  の解である。次に式 (10.9) を解く。

$$q(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad (10.11)$$

と置くと、初期条件  $q(0) = 1$  より

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (10.12)$$

また式 (10.9) より

$$\dot{q}(0) = p(0) - q(0) = 1 - 1 = 0$$

一方、式 (10.11) より  $\dot{q}(0) = c_1 - c_2$  だから

$$c_1 - c_2 = 0 \quad (10.13)$$

式 (10.12) と (10.13) より、

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

である。従って

$$q(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$$

である。まとめると

$$\begin{aligned} q(t) &= \cosh t \\ p(t) &= e^t \end{aligned}$$

が求める解である。

### 10.3 多自由度系の場合

多自由度系の正準方程式は1次元系の自然な拡張である。 $N$ 自由度の系に対しては、 $N$ 個の正準座標  $q_1, \dots, q_N$  と  $N$ 個の正準運動量  $p_1, \dots, p_N$  がある。ハミルトニアンはこの  $2N$  個の正準変数の関数

$$H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$$

である。

この系のラグランジアン  $L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  と上のハミルトニアンは、

$$H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$$

いうルジャンドル変換で結ばれている。

$q_i$  と共役な正準運動量  $p_i$  は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

であり、系全体の時間発展を記述する正準方程式は  $i = 1, \dots, N$  に対して

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

である。

### 10.4 2自由度系の例

質量  $m$  の質点が二つ、それぞれ半径1と半径2の円（中心を共有）の上を滑らかに滑る。二つの質点の間がバネ（バネ定数は  $k$ 、自然長は0）でつながれているものとする。二つの円の中心を原点にとり、 $x$  軸からの角度  $q_1$  と  $q_2$  を正準座標とする。二つの質点間の距離  $\ell$  は

$$\ell = \sqrt{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)} \quad (10.14)$$

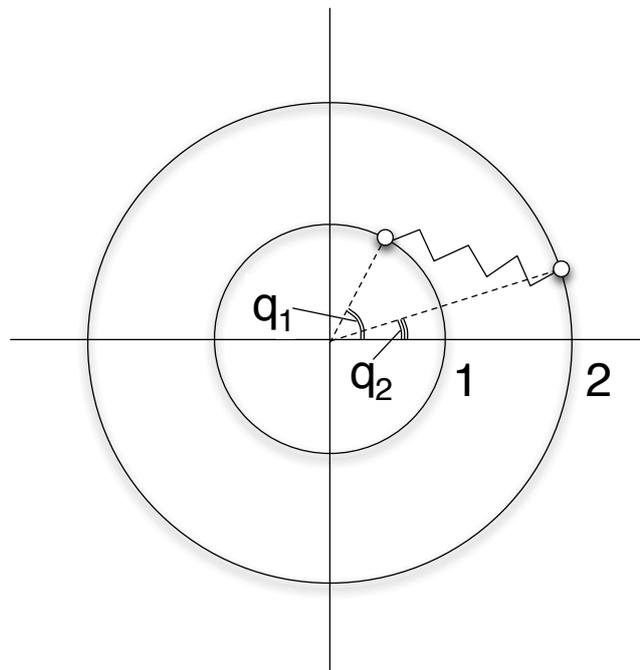
なので、バネのポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2} \{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)\}$$

である。

この系のラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m}{2} (2\dot{q}_2)^2 - \frac{k}{2} \ell^2(q_1, q_2)$$



である。ここで  $\ell$  は式 (10.14) である。

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 \quad (10.15)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 4m\dot{q}_2 \quad (10.16)$$

を使ってルジャンドル変換すると、

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = \dots = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} + \frac{k}{2} \{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)\}$$

である。上のハミルトニアンも

$$H = K + U$$

つまり全エネルギーであることは容易に確認できる。

定数部分の  $5k/2$  は正準方程式には寄与しないので無視すると、この系のハミルトニアンは

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} - 2k \cos(q_1 - q_2) \quad (10.17)$$

である。正準方程式は、以下の4つの式である。

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad (10.18)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{4m} \quad (10.19)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2k \sin(q_1 - q_2) \quad (10.20)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2k \sin(q_1 - q_2) \quad (10.21)$$

この (10.18) から (10.21) は、左辺が 4 つの正準変数の時間微分、右辺が正準変数の関数となっているので、そのまま数値積分ルーチンに移すのは簡単である。

## 10.5 プログラム例

これまで使っていた 4 次ルンゲ=クッタ法のプログラムを少し変えてみた (two\_particles\_on\_cocentered\_rings\_rk4.cpp)。変更したのは本質的には次の運動方程式部分だけである。

Listing 10.1: lagran\_eq\_motion\_sample00\_rk4.cpp

```

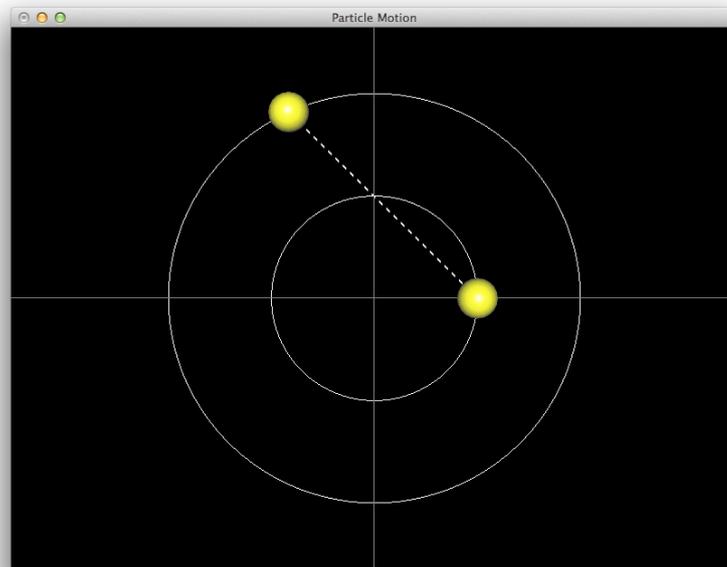
1 void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
2 {
3     //      Hamiltonian
4     //      H(q1, q2, p1, p2) = p1^2/2 + p2^2/8 + (1/2)*(5 - 4*cos(q1-q2))
5     //      dq1/dt = p1
6     //      dq2/dt = p2/4
7     //      dp1/dt = -2*sin(q1-q2)
8     //      dp2/dt = 2*sin(q1-q2)
9     //
10    double q1 = pos[0];
11    double p1 = pos[1];
12    double q2 = pos[2];
13    double p2 = pos[3];
14
15    dpos[0] = ( p1 ) * dt;
16    dpos[1] = ( -2*sin(q1-q2) ) * dt;
17    dpos[2] = ( p2/4 ) * dt;
18    dpos[3] = ( +2*sin(q1-q2) ) * dt;
19 }
```

## 10.6 相空間

ラグランジュ形式の力学では、ラグランジアン

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

が基本的なものであった。力学的に本質的なその系情報は全て  $L$  に書き込まれていると見て良い。 $L$  が与えられれば、その系がどう振る舞うか (時間発展する



か) を計算することができる。その方程式がラグランジュの運動方程式であった。ラグランジュの運動方程式は  $N$  個の一般化座標  $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))$  の、 $t$  に関する 2 階の連立微分方程式系であり、式の数は  $N$  個である。

ハミルトン形式の力学ではハミルトニアン  $H$  が基本である。その系の情報は全てハミルトニアンに書き込まれている。ハミルトニアンは合計  $2N$  個の正準変数  $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t))$  の関数

$$H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$$

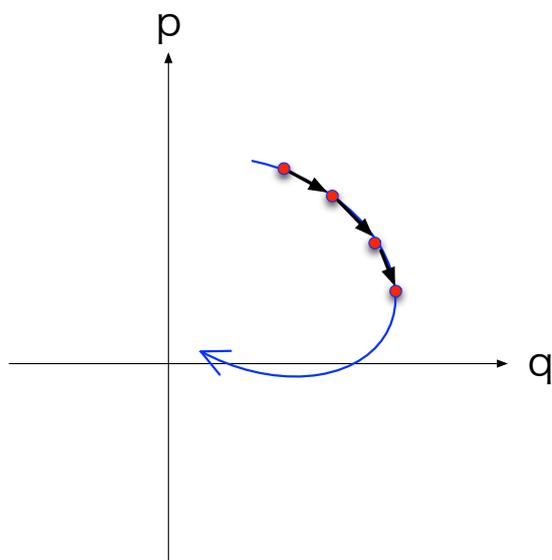
である。

ハミルトン力学では、系の状態を  $(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$  を座標として張られた  $2N$  次元の空間の一点で指定することができる。これを相空間（または位相空間）という。

ハミルトニアン  $H$  が与えられれば、その系がどう振る舞うか（時間発展するか）を計算することができる。その方程式がハミルトンの正準方程式

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

である。正準方程式は正準変数の  $t$  に関する 1 階の連立微分方程式系であり、その式の数は  $2N$  個である。正準方程式は相空間中をその系を状態を表す点  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  が、相空間中をどう動くかを決定するのが、正準方程式である。



## 10.7 正準方程式のイメージ

1自由度系のハミルトニアン  $H(q, p)$  を考えよう。これは2次元相空間  $(q, p)$  のスカラー場である。系の状態は、相空間中の点  $(q_0, p_0)$  で指定される。正準方程式はこの相空間中の点 (状態) の動き方を定める。

相空間  $q$ - $p$  中の  $H(q, p)$  の勾配 (gradient) ベクトルを考えてみよう。

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

である。以前説明したように (ベクトル解析で習ったように)、このベクトルはその点で  $H$  が最も増大する方向を指している。さて、正準方程式をまとめて

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

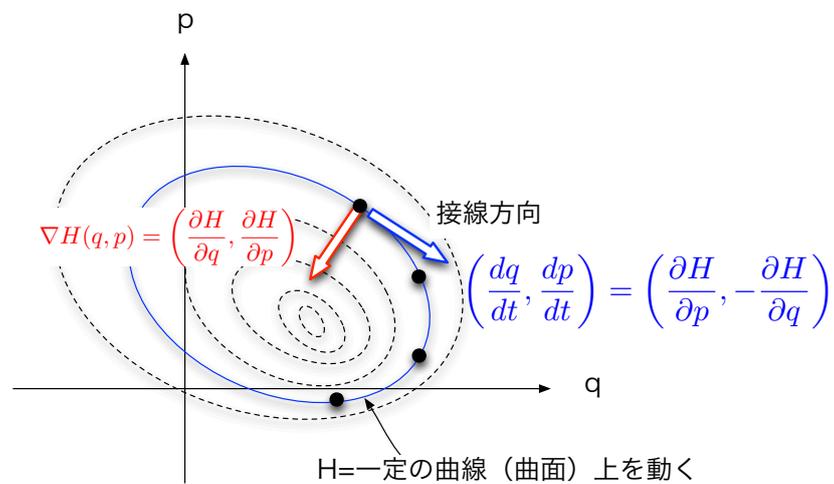
と書いてみよう。上の式から、相空間中を動く点の速度ベクトル

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

と、勾配ベクトル  $\nabla H$  の内積がゼロ

$$\mathbf{u} \cdot \nabla H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

つまり直交することがわかる。系は相空間中を常に  $H(q, p)$  の等高線の接線方向に動く。従ってその等高線からはずれることはない。これはエネルギー保存則を意味する。多自由度系についての同様な議論が成り立つ。



## 10.8 リウヴィルの定理

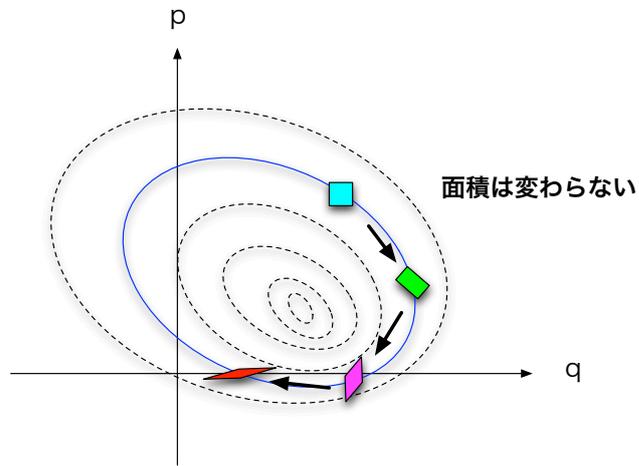
【ここでは流体力学を学んだことのある学生を想定した説明をしている。流体力学をまだ履修していない学生は読み飛ばしてよい。】 $N$  自由度系の相空間中に点(状態)がぎっしり無数に分布している様子を思い浮かべよう(まるで水の分子のように)。この「水」の相空間(=  $2N$  次元空間)中の流れを考える。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \\ u_{N+2} \\ \vdots \\ u_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_N \end{pmatrix}$$

は非圧縮である。なぜならこの  $2N$  次元空間中のこの流れの ( $2N$  次元の) 発散をとると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_{N+j}}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである。従って相空間中の流れに乗って動く微小な部分は変形しても体積が変わらない。これをリウヴィルの定理という。





# Chapter 11

## 正準変換

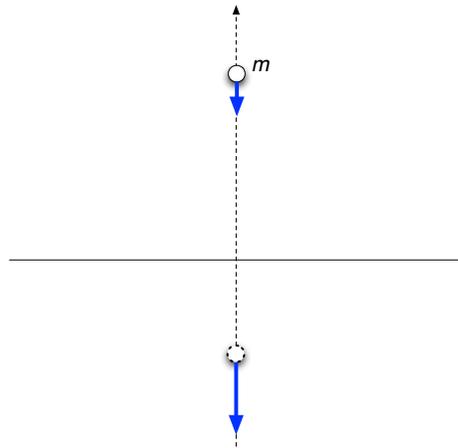
### 11.1 座標変換の必要性

ハミルトン形式の力学では、基本方程式である正準方程式が

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)\end{aligned}$$

という形をしているので数値計算と相性が良く、この方程式をそのまま数値積分プログラムに移すことができ便利であるということを前回まで紹介した。これはラグランジュの運動方程式にはない利点である。

とはいえ、方程式が上の形をしていれば常に数値積分プログラムに渡せるとは限らない。たとえば、質点の自由落下の問題を考えてみよう。いま  $t=0$  で質点の高さが  $z=1$ 、速度は  $\dot{z}=0$  という初期条件の下で、 $z=0$  の高さを通り過ぎて  $z<0$  まで質点が落下していく質点を考えよう。第 6.3.1 章で見たとおり、ラ



ラグランジアンを作る際、一般化座標  $q$  は質点の位置を一意に定めることが出来ればどんなものをとっても良いので、

$$q = \frac{1}{z}$$

ととってみよう。すると質点の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{z}^2 = \frac{m}{2} \left( -\frac{\dot{q}}{q^2} \right)^2,$$

ポテンシャルは

$$U = mgz = \frac{mg}{q}$$

なので、ラグランジアン  $L$  は

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2q^4} - \frac{mg}{q}$$

である。  $q$  に共役な運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m\dot{q}}{q^4}$$

なので、この系のハミルトニアンは、  $L$  をルジャンドル変換して

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = \frac{q^4 p^2}{2m} + \frac{mg}{q} \quad (11.1)$$

である。

このハミルトニアンから正準方程式を作ると次のようになる。

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{q^4 p}{m} \quad (11.2)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{2q^3 p^2}{m} + \frac{mg}{q^2} \quad (11.3)$$

この方程式を、これまでの例題で何度か使ってきた4次ルンゲ=クッタ法を使った数値積分プログラムに入れてみよう。

Listing 11.1: free\_fall\_ball\_q

```

1 void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
2 {
3     //      Hamiltonian
4     //      H(q,p) = q^4*p^2/2 + 1/q
5     //      dq/dt = q^4*p
6     //      dp/dt = -2q^3*p^2 + 1/q^2
7     //
8     double q = pos[0];

```

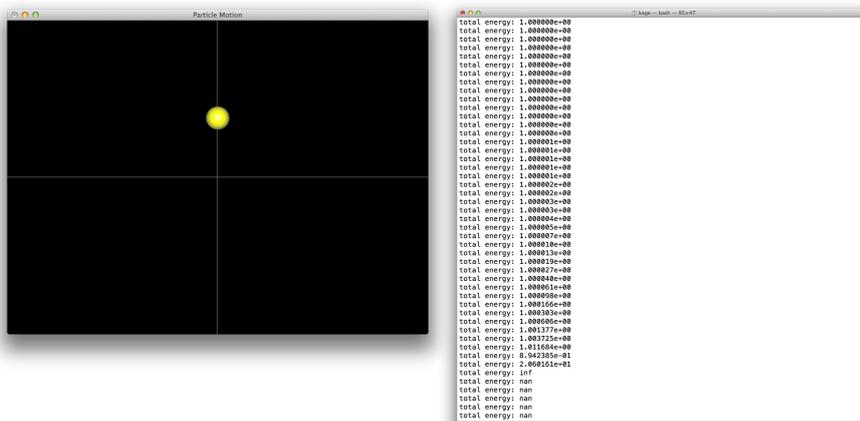
```

9     double p = pos [1];
10
11     double q02 = q*q;
12     double q03 = q02*q;
13     double q04 = q03*q;
14     double p02 = p*p;
15
16     dpos [0] = ( q04*p ) * dt;
17     dpos [1] = ( -2*q03*p02 + 1/q02 ) * dt;
18 }

```

...

これを実行すると・・・計算が破綻した！起きたのか調べるために  $q$  や  $p$  のデータを書き出してみると、はじめはきちんと解けているようだが、途中で値が突然大きくなり始めて、最終的には数値的に発散してしまっている。なぜだろうか？



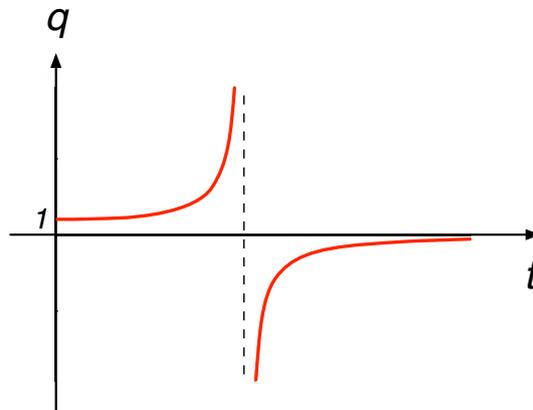
この微分方程式系 (11.2) と (11.3) をこの形のまま数値積分ルーチンでは解くことはできない理由は、今考えている初期条件  $q(t=0) = 1, p(t=0) = 0$  の下でのこの方程式の解を考えてみればわかる。高さ  $z = 1$  からの質点の自由落下なので、その解は明らかに

$$q(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{1 - \frac{gt^2}{2}}$$

である。この  $q(t)$  は  $t = \sqrt{2/g}$  で発散する。このような解を求めるための道具としては、ルンゲ=クッタ法のような数値積分ルーチンは無力である。

この問題の場合、正準座標  $(q, p)$  の取り方がまずかったわけである。別の正準座標  $(Q, P)$  から正準方程式を構成すれば、今まで見てきた例題と同様、数値計算するのに何も問題がなくなる。例えば  $Q = z, P = m\dot{z}$  という (自然な) 座標をとれば、この系のハミルトニアンは

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + mgQ \quad (11.4)$$



正準方程式は

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -mg\end{aligned}$$

である。この式をそのままプログラムで数値積分することは全く問題ない。(もちろん、この場合は解析的に解いた方が早い。)。

一般に、 $N$  自由度系のハミルトニアン

$$H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$$

が与えられたとき、正準変数

$$(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$$

を座標変換

$$(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$$

に変換することで、正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (11.5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (11.6)$$

は、別の形に変換される。

ラグランジュ形式の力学では、一般化座標

$$(q_1, \dots, q_N)$$

から別の一般化座標

$$(Q_1, \dots, Q_N)$$

への点変換

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_N)$$

を施してもラグランジュの運動方程式は変換前

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

と変換後

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$$

で同じ形になることを第 6.3.1 章で確認した。

いま考えているのは、相空間全体での座標変換

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (11.7)$$

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (11.8)$$

である。一般化座標と一般化運動量を自由に混ぜてしまうわけであるから、ある特定の  $k$  に対する  $Q_k$  と  $P_k$  は、互いに共役な 2 つの座標の対としての意味はあるにせよ、どちらが座標で、どちらが運動量か、という区別は意味がなくなる。

この座標変換で方程式が正準方程式でなくなってしまうては不便である。つまり上の座標変換 (11.7) と (11.8) を施しても、変換前の正準方程式 (11.5) と (11.6) と同じ

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$$

という正準方程式が成り立って欲しい。このように正準方程式を変えないような正準変数の座標変換を、正準変換という。

## 11.2 正準変換の直接条件

変換 (11.7) と (11.8) が正準変換であるための条件を求めよう。ハミルトニアン

$$H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$$

から構成した正準方程式 (11.5) と (11.6) が変換 (11.7) と (11.8) によって形を変えないようにしたい。この変換の逆

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \quad (11.9)$$

$$p_i = p_i(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \quad (11.10)$$

の表式も具体的に得られているものとする。いま変換後の正準変数  $(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$  に対して正準方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \quad (11.11)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \quad (11.12)$$

が成り立っているようにしたいわけである。

式 (11.11) の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial P_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \\ &= -\dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \dot{q}_j \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad [\text{式 (11.5) と (11.6) より}]\end{aligned}$$

一方、式 (11.11) の左辺は

$$\dot{Q}_i = \dot{p}_j \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} + \dot{q}_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

であるから、この2つの式の比較から

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \quad (11.14)$$

を得る。同様に式 (11.12) から

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \quad (11.15)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \quad (11.16)$$

を得る。

変換 (11.7) と (11.8) が正準変換であるための必要十分条件は、上の条件 (11.13) から (11.16) が成り立っていることである。この条件は正準変換の直接条件と呼ばれる。

自由度が1の場合の直接条件は

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial p}{\partial P}, \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial q}{\partial P}, \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial Q}, \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial p}{\partial Q} \quad (11.20)$$

である。

### 11.3 正準変換の合成

直接条件 (11.13)–(11.16) の対称性から明らかに「正準変換の逆変換は正準変換である」ことがわかる。

また、これらの条件式から「正準変換の合成変換は正準変換である」ということも以下のように証明できる。 $q$ - $p$  の座標から  $q'$ - $p'$  への変換

$$(q_1, q_2, \dots, p_N) \Rightarrow (q'_1, q'_2, \dots, p'_N)$$

と、 $q'$ - $p'$  座標から  $q''$ - $p''$  座標への変換

$$(q'_1, q'_2, \dots, p'_N) \Rightarrow (q''_1, q''_2, \dots, p''_N)$$

を合成した変換、即ち  $q$ - $p$  の座標から  $q''$ - $p''$  への変換

$$(q_1, q_2, \dots, p_N) \Rightarrow (q''_1, q''_2, \dots, p''_N)$$

を考える。式 (11.13) に相当する偏微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q''_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial q''_i}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_j} + \frac{\partial q''_i}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q_j} \\ &= \left( \frac{\partial p'_k}{\partial p''_i} \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p'_k} \right) + \left( -\frac{\partial q''_k}{\partial p'_i} \right) \left( -\frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \frac{\partial p_j}{\partial p''_i} \end{aligned} \quad (11.21)$$

である。同様な計算を行いまとめると、結局

$$\frac{\partial q''_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial p''_i}, \quad \frac{\partial q''_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial p''_i}, \quad \frac{\partial p''_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial q''_i}, \quad \frac{\partial p''_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial q''_i} \quad (11.22)$$

が得られる。これは、 $q$ - $p$  の座標から  $q''$ - $p''$  への変換が正準変換であることの直接条件である。

### 11.4 正準変換の例

自由落下問題の例に戻ろう。ハミルトニアン (11.1) をここに再掲する。

$$H(q, p) = \frac{q^4 p^2}{2m} + \frac{mg}{q} \quad (11.23)$$

このハミルトニアンの正準変数  $(q, p)$  を別の座標に

$$(q, p) \Rightarrow (Q, P)$$

と変換しよう。ここでは具体的に

$$Q = Q(q, p) = q^2 p \quad (11.24)$$

$$P = P(q, p) = 1/q \quad (11.25)$$

という変換を考える。まずはこの変換が正準変換かどうか、確認してみよう。

この変換の逆は

$$q = q(Q, P) = 1/P \quad (11.26)$$

$$p = p(Q, P) = QP^2 \quad (11.27)$$

であることはすぐにわかる。式 (11.24) から

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = q^2$$

一方、式 (11.24) より

$$\frac{\partial q}{\partial P} = -1/P^2 = -q^2$$

つまり

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial q}{\partial P}$$

である。同様な計算によって正準変換の直接条件 (11.17)–(11.18) が成り立っていることが確認できる。つまりこの変換 (11.24) と (11.25) は正準変換である。

$(Q, P)$  への変換は正準変換なので、正準方程式が成り立つ。ハミルトニアンはこの新しい正準変数の下、

$$\begin{aligned} H(Q, P) &= \frac{q^4(Q, P)p^2(Q, P)}{2m} + \frac{mg}{q(Q, P)} \\ &= \frac{Q^2}{2m} + mgP \end{aligned} \quad (11.28)$$

なので、正準方程式は

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = mg \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{Q}{m} \end{aligned}$$

である。この微分方程式は数値計算しても全く問題ない。(実際には手で解けるが。)

ハミルトニアン (11.28) をよく見ると、質点の高さ  $z$  を一般化座標にとったハミルトニアン (11.4) と似ているが、 $P$  と  $Q$  が入れ替わっている。上に書いたとおり、ハミルトン形式の力学では、共役な対という概念だけが重要であり、正準「座標」と正準「運動量」の区別に意味はないということがこの例からもわかるであろう。

## 11.5 母関数

### 11.5.1 $W(q, Q)$ 型の母関数

直接条件 (11.13) から (11.16) を満足するような変換を作るのは結構大変である。式 (11.24) と (11.25) のような変換をどうやって思いついたであろうか。実は

直接条件を自動的に満足するような（つまり正準変換になるような）変換を系統的に構成する方法が開発されている。それは母関数を使う方法である。

$q$  と  $Q$  の関数

$$W(q, Q) \quad (11.29)$$

を母関数として

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q}(q, Q) \quad (11.30)$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \quad (11.31)$$

という2つの式から

$$(q, p) \Rightarrow (Q, P)$$

という座標変換が定義できる。この変換は正準変換になっている。

母関数には式 (11.29) 以外にも

$$W(q, P)$$

$$W(p, Q)$$

$$W(p, P)$$

という型があり、それぞれ正準変換を定義する母関数の微分の仕方が異なるが、ここでは深入りしない。

式 (11.30) と (11.31) で定義される変換が正準変換であることは以下のようにして確認できる。

まず、独立変数を  $q$  と  $p$  としてこの2つの式を見ると、

$$P(q, p) = -\frac{\partial W}{\partial Q}(q, Q(q, p))$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q, Q(q, p))$$

となる。この2つの式を  $q$  と  $p$  で偏微分すると以下の4つの式を得る。

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q} - \frac{\partial^2 W}{\partial \partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{\partial^2 W}{\partial \partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$1 = \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

この連立方程式を解くと、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} & 1 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}\right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q}\right)^2 & -\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} \end{pmatrix} \quad (11.32)$$

を得る。

次に独立変数を  $Q$  と  $P$  にとって式 (11.30) と (11.31) を見ると、

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q}(q(Q, P), Q)$$

$$p(Q, P) = \frac{\partial W}{\partial q}(q(Q, P), Q)$$

である。この式を今度は  $Q$  と  $P$  で偏微分すれば同様に連立方程式が得られる。その解は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} & -1 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2}\right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial Q}\right)^2 & -\frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \end{pmatrix} \quad (11.33)$$

である。

式 (11.32) と (11.33) を比較すると、正準変換であるための直接条件 (11.17)–(11.20) が成り立っていることがわかる。

$N$  自由度の系に対しては母関数

$$W(q_1, \dots, q_N, Q_1, \dots, Q_N) \quad (11.34)$$

から

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (11.35)$$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (11.36)$$

によって生成される変換は正準変換となる。

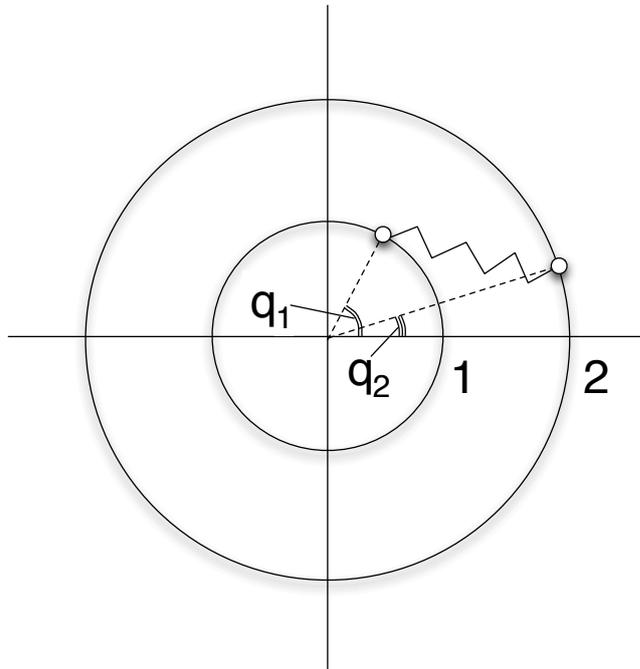
### 11.5.2 例題：同心円のバネ＝質点系

第 10.4 章で考えた問題をもう一度取り上げよう。質量  $m$  の質点が二つの同心円（半径 1 と半径 2）の上を滑らかに滑る。二つの質点の間がバネ（バネ定数は  $k$ 、自然長は 0）でつながれているものとする。二つの円の中心を原点にとり、 $x$  軸からの角度  $q_1$  と  $q_2$  を正準座標、 $p_1 = m\dot{q}_1$  と  $p_2 = 4m\dot{q}_2$  を正準運動量とすると、この系のハミルトニアンは式 (10.17) である。再掲すると、

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} - 2k \cos(q_1 - q_2) \quad (11.37)$$

である。この正準座標  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  を、母関数

$$W(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = (q_2 - q_1)Q_1 - (q_1 + q_2)Q_2$$



を使って正準変換してみよう。

$$P_1 = -\frac{\partial W}{\partial Q_1} = q_1 - q_2$$

$$P_2 = -\frac{\partial W}{\partial Q_2} = q_1 + q_2$$

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1} = -(Q_1 + Q_2)$$

$$p_2 = \frac{\partial W}{\partial p_2} = Q_1 - Q_2$$

から、これを整理すると

$$Q_1 = Q_1(q, p) = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2) \quad (11.38)$$

$$Q_2 = Q_2(q, p) = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (11.39)$$

$$P_1 = P_1(q, p) = q_1 - q_2 \quad (11.40)$$

$$P_2 = P_2(q, p) = q_1 + q_2 \quad (11.41)$$

あるいは

$$q_1 = q_1(Q, P) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \quad (11.42)$$

$$q_2 = q_2(Q, P) = -\frac{1}{2}(P_1 - P_2) \quad (11.43)$$

$$p_1 = p_1(Q, P) = -(Q_1 + Q_2) \quad (11.44)$$

$$p_2 = p_2(Q, P) = Q_1 - Q_2 \quad (11.45)$$

である。新しい正準座標  $(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  で書いたハミルトニアンは式 (11.37) より

$$H(q(Q, P), p(Q, P)) = \dots = \frac{5}{8m}(Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2m}Q_1Q_2 - 2k \cos P_1$$

つまり

$$H(Q, P) = \frac{5}{8m}(Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2m}Q_1Q_2 - 2k \cos P_1 \quad (11.46)$$

である。このハミルトニアンから正準方程式を作ると、

$$\dot{Q}_1 = 2k \sin P_1 \quad (11.47)$$

$$\dot{Q}_2 = 0 \quad (11.48)$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{5}{4m}Q_1 - \frac{1}{2m}Q_2 \quad (11.49)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{5}{4m}Q_2 - \frac{1}{2m}Q_1 \quad (11.50)$$

式 (11.48) から

$$Q_2 = c \quad (\text{定数}) \quad (11.51)$$

であることがわかるので、これを使えば解くべき正準方程式は、

$$\dot{Q}_1 = 2k \sin P_1 \quad (11.52)$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{5}{4m}Q_1 - \frac{c}{2m} \quad (11.53)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{5c}{4m} - \frac{1}{2m}Q_1 \quad (11.54)$$

と 1 つ減る。特に  $c = 0$  という特別な場合には

$$\dot{Q}_1 = 2k \sin P_1 \quad (11.55)$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{5}{4m}Q_1 \quad (11.56)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{1}{2m}Q_1 \quad (11.57)$$

と簡単になる。

例によってこの常微分方程式系を数値積分プログラムに渡すことは簡単だが、数値的に解かなくてもわかること、あるいは数値的に解くだけでは分からないことがある。

## 11.6 数値計算の限界

上の式 (11.55) と (11.56) は、第 10.2 章の練習問題で見た振り子の運動を記述する方程式 (10.7) と (10.8) と似ている。

$$q \leftrightarrow P_1, \quad p \leftrightarrow -Q_1, \quad m\ell^2 \leftrightarrow 4m/5, \quad mg \leftrightarrow 2k$$

と置き換えれば全く同じ式になる。 $P_1 (= q_1 - q_2)$  は同心円を滑る 2 つの質点の角度の差である。つまりばね定数  $k$  でつながれた 2 つの質点角度の差  $P_1$  は、重力加速度  $g$  が  $\sqrt{2k}$  の時の長さ  $\ell = 2/\sqrt{5}$  の振り子の角度  $q$  と同じ運動をする。

我々は振り子の運動方程式 (10.7), (10.8) の解は簡単な関数で書けないことは分かっているが、同時に我々は振り子のふれ角  $q(t)$  がどのような解をもつかは定性的にはかなりよく知っている。 $q = 0$  が安定な平衡点であり、初期速度が小さければそこで微小振動 (調和振動) をする。初期速度が大きければ振幅が大きな振動となり、ある値よりも大きな初期速度を与えると、同じ方向に回る回転運動が周期的に続く。

上の対応関係を考えれば、式 (11.55), (11.56) の解  $P_1(t)$  は、振り子の振れ角  $q(t)$  と同じように振る舞うはずである。 $c = Q_2 = 0$  は、(11.39) より  $p_1 + p_2 = 0$  を意味する。初期条件でこの和がちょうどゼロになるような初期速度  $\dot{q}_1$  と  $\dot{q}_2$  を与えると、この  $p_1 + p_2$  はゼロの値を保ち続ける。つまり保存する。 $(p_1 + p_2$  は実は 2 つの質点の角運動量の和である。) そしてこのような場合、2 つの質点の角度の差  $P_1 = q_1 - q_2$  は振り子のように振動するということがわかった。つまり  $P_1$  の振幅が小さい時は調和振動し、振幅が大きい場合は周期的振動または周回運動をする。(それぞれの場合が、2 つの質点のどういう運動に対応するか容易に想像できるであろう。)

$Q_2 = 0$  という特殊な初期条件でなくても、この系では  $Q_2 \propto p_1 + p_2$  は常に一定である [式 (11.51)]。ハミルトニアンが (11.37) として与えられたこの系に対して、我々は前の章で既にこの問題を数値的に解いていた。その解を可視化した映像をみても、 $p_1 + p_2$  が厳密に保存することを見抜くのは難しかったであろう。一方、正準変換したハミルトニアン (11.46) には  $P_2$  が含まれないことから、 $Q_2$  が保存量であること (つまり  $\dot{Q}_2 = 0$ ) が一目でわかる。その系に内在する力学的な構造が正準変換によって明らかになったのである。これが正準変換の威力である。数値積分は決して万能ではない。解析力学に限らず、理論と数値計算を巧く、相補的に組み合わせることが大事である。



## Chapter 12

# シンプレクティック形式とポアソン括弧

### 12.1 シンプレクティック条件

$N$  自由度の力学の系のある時刻の状態を  $2N$  次元の相空間中の点  $\mathbf{r}$  で表す。

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad r_i = \begin{cases} q_i & (1 \leq i \leq N) \\ p_{i-N} & (N < i \leq 2N) \end{cases}$$

すると正準方程式は以下のように一行で書ける。

シンプレクティック記法による正準方程式

$$\dot{r}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j} \quad (12.1)$$

ここで行列  $\mathbf{J}$  は

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

と定義される。 $\mathbf{0}$  と  $\mathbf{1}$  は  $N$  行  $N$  列のゼロ行列と単位行列である。方程式 (12.1) を正準方程式の シンプレクティック記法 と言う。

$J$  が満たす基本的な関係をまとめておこう。以下  $J^T$  は  $J$  の転置行列、 $J^{-1}$  は  $J$  の逆行列である<sup>1</sup>。

$$J^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

$$JJ^T = J^TJ = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

$$J^T = -J = J^{-1} \quad (12.5)$$

$$J^2 = -\mathbf{1} \quad (12.6)$$

$$|J| = 1 \quad (12.7)$$

さて、 $\mathbf{r}$  があらわす力学状態を正準変換した別の座標を使って  $\mathbf{R}$  と書こう。もちろん

$$R_i = \begin{cases} Q_i & (1 \leq i \leq N) \\ P_{i-N} & (N < i \leq 2N) \end{cases}$$

である。この座標系での正準方程式は

$$\dot{R}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial R_j} \quad (12.8)$$

と書ける。

式 (12.8) の左辺を書き換えると

$$\begin{aligned} \dot{R}_i &= \frac{\partial R_i}{\partial r_m} \dot{r}_m \\ &= \frac{\partial R_i}{\partial r_m} J_{mk} \frac{\partial H}{\partial r_k} \quad [(12.1) \text{ より}] \\ &= \frac{\partial R_i}{\partial r_m} J_{mk} \frac{\partial R_j}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial R_j} \end{aligned}$$

これと式 (12.8) の右辺を比較すれば

$$MJM^T = J \quad (12.9)$$

を得る。ここで行列  $M$  は

$$M_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial r_j} \quad (12.10)$$

$M^T$  はその転置行列

$$M_{ij}^T = \frac{\partial R_j}{\partial r_i} \quad (12.11)$$

である。 $M$  はシンプレクティック行列と呼ばれる。

式 (12.6) を使うと式 (12.9) から

$$M^T JM = J \quad (12.12)$$

が証明できる。

式 (12.9) またはそれと同等な (12.12) は正準変換に対する必要十分条件であり、シンプレクティック条件と呼ばれる。

<sup>1</sup>ver.131219b 式 (12.6) を玉水君の指摘により修正。

## 12.2 ポアッソン括弧

式 (12.9) は  $2N \times 2N$  個の方程式を表し、その式の右辺は 0 または 1 または  $-1$  の値を持つ。 $M$  と  $J$  の定義に従ってこの  $4N^2$  個の式を具体的に書くと、次のような 4 つのタイプに分けることができる。

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad (12.13)$$

$$\{P_i, P_j\} = 0 \quad (12.14)$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (12.15)$$

$$\{P_i, Q_j\} = -\delta_{ij} \quad (12.16)$$

ここで  $\{f, g\}$  はポアッソン括弧と呼ばれ

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \quad (12.17)$$

と定義される<sup>2</sup>。ここで和をとる添字  $j$  は 1 から  $N$  までである。

ポアッソン括弧を行列  $J$  を使って表現すると

$$\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial r_j} \quad (12.18)$$

である。ここでは和をとる添字  $j$  は 1 から  $2N$  までである。

定義 (12.17) から

$$\{g, f\} = -\{f, g\} \quad (12.19)$$

$$\{f, f\} = 0 \quad (12.20)$$

は自明である。

$c_1$  と  $c_2$  を定数として

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\} \quad (12.21)$$

$$\{f, c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1 \{f, g_1\} + c_2 \{f, g_2\} \quad (12.22)$$

$$\{c_1, g\} = \{f, c_2\} = 0 \quad (12.23)$$

が成り立つ。

次の式は  $\partial q_i / \partial q_j = \delta_{ij}$  等の関係を使えば確認できる。

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (12.24)$$

$$\{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (12.25)$$

上の二つの式から以下の式が成り立つ。

$$\left\{q_i, \frac{\partial f}{\partial q_j}\right\} + \left\{p_j, \frac{\partial f}{\partial p_i}\right\} = 0 \quad (12.26)$$

<sup>2</sup>ver.131219b 式 (12.17) を玉水君の指摘により修正。

また、式 (12.24) と (12.25) の特別な場合として、

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (12.27)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (12.28)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (12.29)$$

という関係が得られる。

相空間の3つの関数  $f, g, h$  に対するポアソン括弧にはヤコビ恒等式と呼ばれる以下の式が成り立つ。

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (12.30)$$

この証明には以下のようにするのが最も簡潔であろう。式 (12.18) より

$$\begin{aligned} \text{式 (12.30) の左辺} &= \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{\partial g}{\partial r_\ell} J_{\ell m} \frac{\partial h}{\partial r_m} \right) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial r_\ell} J_{\ell j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{\partial h}{\partial r_m} J_{mi} \frac{\partial f}{\partial r_i} \right) \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial r_m} J_{mj} \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{i\ell} \frac{\partial g}{\partial r_\ell} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial g}{\partial r_\ell} \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} (J_{ij} J_{\ell m} + J_{\ell j} J_{mi})}_{(a)} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial h}{\partial r_m} \frac{\partial^2 g}{\partial r_j \partial r_\ell} (J_{ij} J_{\ell m} + J_{mj} J_{i\ell}) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial r_\ell} \frac{\partial h}{\partial r_m} \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i} (J_{\ell j} J_{mi} + J_{mj} J_{i\ell}) \end{aligned} \quad (12.31)$$

ここで

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{ij} J_{\ell m} + \frac{\partial^2 h}{\partial r_m \partial r_j} J_{\ell m} J_{ji} \quad [\text{第2項の } j \text{ と } m \text{ を交換}] \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{ij} J_{\ell m} - \frac{\partial^2 h}{\partial r_m \partial r_j} J_{\ell m} J_{ij} \quad [\text{式 (12.5) より}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

式 (12.31) の他の2項も同様である。従って (12.30) が成り立つ。

式 (12.16) は (12.19) を考えると冗長なので、結局、座標変換  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  から  $(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$  への座標変換が正準変換かどうかは、

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad (12.32)$$

$$\{P_i, P_j\} = 0 \quad (12.33)$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (12.34)$$

の3つが成り立っているかどうかを確認すれば良いことがわかる。

ポアッソン括弧を使って正準変換かどうかを判定をする際には

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), \\ P_i &= P_i(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \end{aligned}$$

という変換の関数形が分かっているならば、その逆

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N), \\ p_i &= p_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \end{aligned}$$

がわかっていなくても判定できることに注意しよう。この点で正準変換の直接条件 [(11.13) から (11.16)] よりも便利と言える。とはいえ、ハミルトニアンを変換するにはどうせ逆変換の表式が必要となる。

## 12.3 ポアッソン括弧を使った運動方程式

ポアッソン括弧を使うと様々な量が簡潔に表現される。たとえば時間に陽には依存しない関数  $f$  の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= \{f, H\} \end{aligned} \quad (12.35)$$

である。 $f$  が時間に陽に依存する場合は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (12.36)$$

となる。

式 (12.35) の  $f$  に (時間に陽に依存しない) ハミルトニアン  $H$  を代入すると、

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad [\text{式 (12.20) より}] \quad (12.37)$$

これはエネルギー保存を意味する。

$f$  と  $g$  がどちらも保存量であれば、ポアッソン括弧  $\{f, g\}$  も保存量である。なぜなら定義式 (12.17) より

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \quad (12.38)$$

なので、 $\dot{f} = \dot{g} = 0$  の時

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{0, g\} + \{f, 0\} = 0 \quad (12.39)$$

だからである。この式はヤコビ恒等式 (12.30) を使っても証明できる。

式 (12.35) において  $f = q_i$  と  $f = p_i$  の場合には

ポアソン括弧による正準方程式

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (12.40)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (12.41)$$

を得る。これはもとの正準方程式をわざわざポアソン括弧で書き直したにすぎないが、こう書くと2つの式がどちらも同じ形式になる。このことが第13章で紹介するシンプレクティック積分法において重要になる。

## 12.4 ポアソン括弧の正準不変性

式 (12.35) は  $f$  が  $(q_1, \dots, p_N)$  の関数の場合である。この  $df/dt$  は、正準変換した別の座標  $(Q_1, \dots, P_N)$  でも同じはずである。つまり、

$$\begin{aligned} \{f(q, p), H(q, p)\}_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \\ \{f(Q, P), H(Q, P)\}_{Q,P} &= \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial H}{\partial P_j} - \frac{\partial H}{\partial Q_j} \frac{\partial f}{\partial P_j} \end{aligned}$$

は同じ値

$$\{f, H\}_{q,p} = \{f, H\}_{Q,P}$$

である。

上の関係は一方が  $H$  であるときに限らず、もっと一般に任意の関数  $f$  と  $g$  に対して

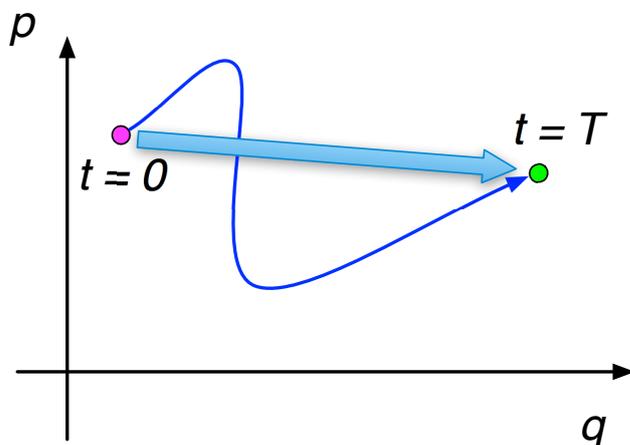
$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \quad (12.42)$$

であることが以下のようにして証明できる。式 (12.18) より

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial r_j} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial R_I} \frac{\partial R_I}{\partial r_i} \right) J_{ij} \left( \frac{\partial g}{\partial R_J} \frac{\partial R_J}{\partial r_j} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial R_I} \left( \frac{\partial R_I}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial R_J}{\partial r_j} \right) \frac{\partial g}{\partial R_J} \\ &= \frac{\partial f}{\partial R_I} J_{IJ} \frac{\partial g}{\partial R_J} \quad [\text{式 (12.9) より}] \\ &= \{f, g\}_{Q,P} \end{aligned} \quad (12.43)$$

つまりポアソン括弧で書かれた全ての量は正準変換に対して不変である。だからポアソン括弧に微分をとる座標を示す添字をいちいちつける必要はない。

## 12.5 正準変換としての運動



ある時刻  $t = 0$  で系の状態が  $\mathbf{r} = (q_1(0), q_2(0), \dots, p_N(0))$  にあるとする。時間が経過して  $t = T$  になったときの状態は相空間中の別の点  $\mathbf{R} = (q_1(T), q_2(T), \dots, p_N(T))$  に移る。これを座標

$$\mathbf{r} = (q_1, q_2, \dots, p_N) = (q_1(0), q_2(0), \dots, p_N(0))$$

から座標

$$\mathbf{R} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) = (q_1(T), q_2(T), \dots, p_N(T))$$

への座標変換  $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{R}$  と考えてみよう。運動で結びついているので明らかに  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{R}$  は全単射である。この変換は正準変換であろうか？ポアソン括弧による判定条件 (12.32)–(12.34) を使って正準変換であるかどうかを判定しよう。時間の関数  $\{q_i(t), p_j(t)\}$  をテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\} &= \{q_i(T), p_j(T)\} \\ &= \{q_i(0), p_j(0)\} + \frac{T}{1} \frac{d}{dt} \{q_i(0), p_j(0)\} + \frac{T^2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \{q_i(0), p_j(0)\} \\ &\quad + \frac{T^3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} \{q_i(0), p_j(0)\} + \dots \end{aligned}$$

式 (12.35) の  $f = \{q_i, p_j\}$  の場合と考えれば、右辺第 2 項は、式 (12.28) を使って、

$$\frac{d}{dt} \{q_i(0), p_j(0)\} = \{\{q_i(0), p_j(0)\}, H\} = \{\{q_i, p_j\}, H\} = \{\delta_{ij}, H\} = 0$$

ここで最後の等式では式 (12.23) を使った。同様に

$$\frac{d^2}{dt^2} \{q_i, p_j\} = \{\{\{q_i, p_j\}, H\}, H\} = \{0, H\} = 0$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \{q_i, p_j\} = \{ \{ \{q_i, p_j\}, H \}, H \}, H = 0$$

等が成り立つ。従って

$$\{Q_i, P_j\} = \{q_i(0), p_j(0)\} = \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

である。同様に

$$\{Q_i, Q_j\} = 0$$

$$\{P_i, P_j\} = 0$$

が確認できる。従って  $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{R}$  の変換は正準変換であることが示された。運動は正準変換なのである。

## 12.6 数値積分と正準変換

数値積分法を使って力学の問題を解く場合を考える。陽的1次オイラー法(第8.1.1章)で正準方程式

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

を解いたとしよう。

ある時刻  $t = t_n$  にこの系が  $\mathbf{r} = (q_1, q_2, \dots, p_N) = (q_1^n, q_2^n, \dots, p_N^n)$  にいたとし、時間刻み  $\Delta t$  で1ステップだけ数値積分すると、

$$\begin{aligned} Q_i &:= q_i(t + \Delta t) = q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{r}^n) \\ P_i &:= p_i(t + \Delta t) = p_i^{n+1} = p_i^n - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{r}^n) \end{aligned}$$

によって新しい時刻  $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$  における状態は  $\mathbf{R} = (Q_1, Q_2, \dots, P_N) = (q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, \dots, p_N^{n+1})$  となる。

数値積分によって相空間上の点  $\mathbf{r}$  が  $\mathbf{R}$  に移されたわけであるが、これは正準変換になっているであろうか? ポアソン括弧を使って確認してみよう。

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\} &= \left\{ q_i + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_j - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} \\ &= \{q_i, p_j\} - \Delta t \left\{ q_i, \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} + \Delta t \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_j \right\} - \Delta t^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} \end{aligned}$$

ここで右辺第2項と第3項は式(12.26)からキャンセルするので、結局<sup>3</sup>

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} - \Delta t^2 \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} \quad (12.44)$$

<sup>3</sup>2014.01.21 この部分、 $\Delta t^2$  に比例する部分の符号が間違っていた。玉水君の指摘により修正。

正準変換であればこの式の右辺は  $\delta_{ij}$  のはずであるが、右辺第2項は一般にはゼロではない。

上の式は、一ステップで  $O(\Delta t^2)$  の誤差が生じることを意味する。たとえば  $t=0$  から  $t=T$  まで数値積分すると、全部で  $T/\Delta t$  回積分するので、誤差は最大  $O(\Delta t^2) \times (T/\Delta t) = O(\Delta t)$  だけ蓄積する。

ある力学の系を陽的1次オイラー法によって数値的に積分して得られた解は、本来の満たすべき「運動は正準変換である」という重要な性質を破ってしまうことになる。



## Chapter 13

# シンプレクティック積分法

### 13.1 シンプレクティック積分法とは

この章では簡単のため、1自由度系について述べる。多自由度系への一般化は容易である。また、ハミルトニアンが運動エネルギー  $K$  とポテンシャル  $U$  の和

$$H(q, p) = K(p) + U(q) \quad (13.1)$$

で書かれており、 $K$  と  $U$  がそれぞれ  $p$  と  $q$  だけに依存するような場合について主に考察する。

正準座標

$$r = (q, p)$$

から、別の正準座標

$$R = (Q, P)$$

への変換が正準変換になっているとき、この変換はシンプレクティック条件 (12.9) を満たすことを前章で示した。ある変換が正準変換になっていることを、「変換がシンプレクティックである」、あるいは「変換がシンプレクティック性をもつ」と表現する。シンプレクティック性をもつ数値積分法をシンプレクティック積分法という。

例題として、第 10.2 章の練習問題で考えたリング上を質点が滑るバネ=質点系をもう一度とりあげよう。 $x$  軸と  $y$  軸に接する半径 1 の円周上を質量  $m$  の質点が滑らかに滑る。原点と質点はバネ (ばね定数  $k$ 、自然長 0) で結ばれている。図のように  $x$  軸となす角度  $q$  とする。ハミルトニアン (10.3) を再掲すると

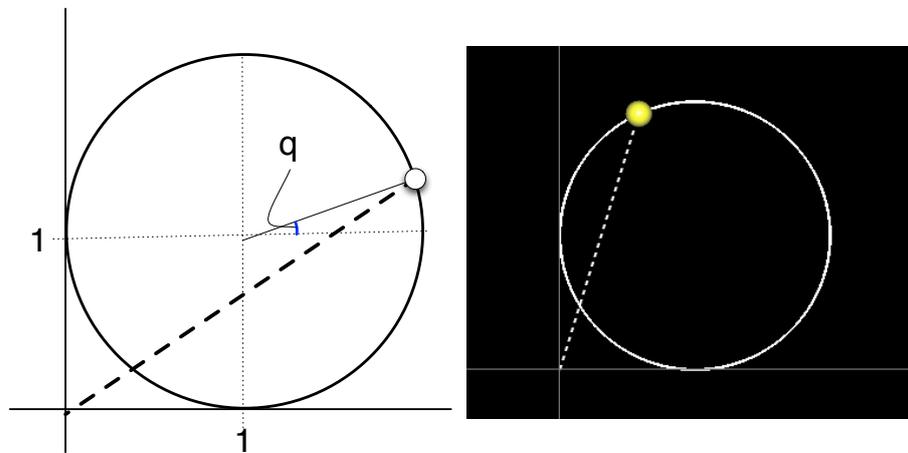
$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + k(\cos q + \sin q) \quad (13.2)$$

このハミルトニアンは式 (13.1) の形になっていて

$$K(p) = \frac{p^2}{2m} \quad (13.3)$$

$$U(q) = k(\cos q + \sin q) \quad (13.4)$$

である。



## 13.2 1次陽的シンプレクティック法

前章で確認したように、1次（陽的）オイラー法はシンプレクティックになっていない。そのためにどのような悪影響があるのか、実際にリング上のバネ質点系(13.2)を、1次オイラー法で解いてみよう。正準方程式は式(10.4)と(10.5)であった。再掲すると、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \quad (13.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = k(\sin q - \cos q) \quad (13.6)$$

プログラムの中心部分は以下の通りである：

Listing 13.1: one\_ball\_on\_ring\_1stEuler.cpp

```

1
2 void euler1st(struct particle_ *particle, double dt)
3 {
4     //      Hamiltonian
5     //      H(q,p) = p^2/(2m) + k ( cos q + sin q )
6     //
7     double q = particle->pos[0];
8     double p = particle->pos[1];
9     double dq, dp;
10    dq = ( p * MASS_INV ) * dt;
11    dp = ( SPRING_K * ( sin(q) - cos(q) ) ) * dt;
12    q += dq;
13    p += dp;
14
15    particle->pos[0] = q;
16    particle->pos[1] = p;

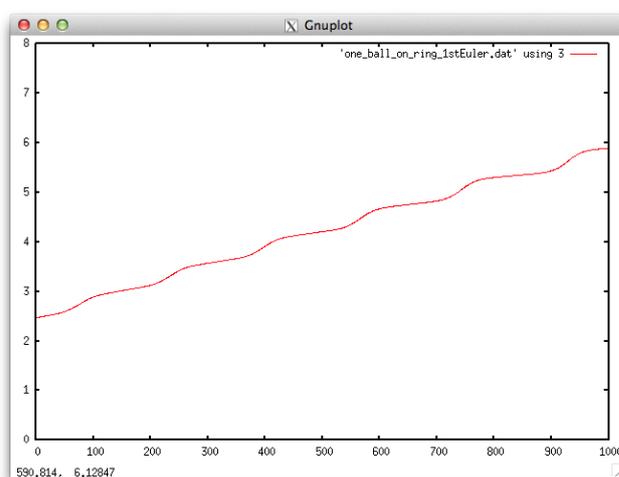
```

```

17
18     std::cout << "total energy: "
19               << std::scientific
20               << total_energy (particle->pos)
21               << std::endl;
22 }

```

たとえば、 $(q, p) = (2, 0)$  の初期条件の下で、これを実行すると・・・明らかに変なことが起きている。はじめは  $q = -3\pi/4$  を中心に振動していた質点が、次第にその振幅を大きくしていき、ついには回転運動をはじめてしまう。これは系の全エネルギーが増加してしまっていることを意味する。実際に全エネルギーをプロットしてみるとそれが確認できる。



1次オイラー法は、1ステップで  $O(\Delta t^2)$  の誤差がある。有限時間  $T$  まで積分するには  $N/\Delta t$  ステップだけ1次オイラー法を繰り返し適用するので、最終的には  $O(\Delta t)$  の誤差が生じるのは仕方がない。しかしながらこの例のように全エネルギーが変わると解の振る舞いが（振動状態と回転状態の違いのように）定性的に異なる系に対しては、どれだけ長時間（多ステップ）積分しても全エネルギーはなるべく変わらないようにしたい。

1ステップで  $O(\Delta t)$  の精度をもつ数値積分法（=1次精度積分法）は、 $(O(\Delta t^2))$  だけの自由度があるので無限のバリエーションが存在する。1次オイラー法はその中の一つにすぎない。この章では無数にある1次精度積分法の中から「シンプレクティック性をもつ」という条件を付けるとエネルギーの保存性がどうなるか調べよう。なお後で見ると1次精度のシンプレクティックな数値積分法も複数存在する。

ハミルトニアンが式 (13.1) で与えられるとき、1次オイラー法は、

$$q^{n+1} = q^n + \Delta t \frac{dK}{dp}(p^n) \quad (13.7)$$

$$p^{n+1} = p^n - \Delta t \frac{dU}{dq}(q^n) \quad (13.8)$$

と書ける。これをほんの少し（赤字の部分）だけ変えて

1次シンプレクティック積分法: SI01a

$$q^{n+1} = q^n + \Delta t \frac{dK}{dp}(p^n) \quad (13.9)$$

$$p^{n+1} = p^n - \Delta t \frac{dU}{dq}(q^{n+1}) \quad (13.10)$$

とする。実はこの積分法はシンプレクティックな積分法になっている。

$\mathbf{r} = (q^n, p^n)$  から  $\mathbf{R} = (q^{n+1}, p^{n+1})$  への変換が正準変換であることをポアソン括弧で調べてみよう。1自由度系の場合には  $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$  は自明なので、 $\{Q, P\}$  だけを調べれば良い。

$$Q = q + \Delta t \frac{dK(p)}{dp}$$

$$P = p - \Delta t \frac{dU(Q)}{dq} = p - \Delta t \frac{dU}{dq}\left(q + \Delta t \frac{dK(p)}{dp}\right)$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{dQ}{dq} \frac{dP}{dp} - \frac{dP}{dq} \frac{dQ}{dp} \\ &= 1 \times \left[ 1 - \left( \Delta t \frac{d^2 U}{dq^2} \right) \left( \Delta t \frac{d^2 K}{dp^2} \right) \right] - \left( -\Delta t \frac{d^2 U}{dq^2} \right) \left( \Delta t \frac{d^2 K}{dp^2} \right) \\ &= 1 - \Delta t^2 \frac{d^2 U}{dq^2} \frac{d^2 K}{dp^2} + \Delta t^2 \frac{d^2 U}{dq^2} \frac{d^2 K}{dp^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (13.11)$$

従って式 (13.9) と (13.10) は正準変換である。この積分法は1次精度の陽的なシンプレクティック法である。ここではこのスキームを SI01a と呼ぶことにする。

式 (13.9) と (13.10) に基づいてコードを作ってみよう。見ての通り、このコードは1次オイラー法とほとんど同じである。

Listing 13.2: one\_ball\_on\_ring\_1stSymplectic.cpp

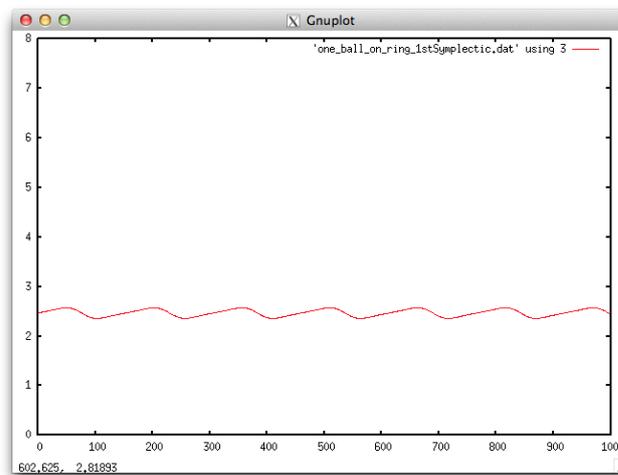
```
1
2 void symplectic1st(struct particle_ *particle, double dt)
3 {
```

```

4      //      Hamiltonian
5      //      H(q,p) = p^2/(2m) + k ( cos q + sin q )
6      //
7      double p = particle->pos[1];
8      double q = particle->pos[0];
9      double dq, dp;
10
11     dq = ( p * MASS_INV ) * dt;
12     q += dq;
13
14     dp = ( SPRING_K * ( sin(q) - cos(q) ) ) * dt;
15     p += dp;
16
17     particle->pos[0] = q;
18     particle->pos[1] = p;
19
20     std::cout << "total energy: "
21               << std::scientific
22               << total_energy( particle->pos )
23               << std::endl;
24 }

```

このコードを実行すると、図のようにエネルギーは（振動こそすれ）オイラー法の時のように増大し続けることはなく、質点の運動が振動運動が回転運動に変わってしまうような明らかに定性的におかしな解になることもない。



1次シンプレクティック法SI01a[式(13.9)と(13.10)]と1次オイラー法[(13.7)と(13.8)]との違いはほんのわずかである。式(13.10)で前の時間ステップの値 $q^n$ を使うと1次オイラー法となる。このわずかな違いによって積分がシンプレクティック（正準変換）になること、そしてその効果が大きいことは実に印象的で

ある。

1次シンプレクティック法 SI01a [式 (13.9) と (13.10)] では、式 (13.9) でまず  $q^n$  の値を  $q^{n+1}$  に更新してからその新しい  $q^{n+1}$  を使って式 (13.10) をつかって  $p^n$  を更新する。この順番を逆にした以下のスキーム (SI01b) もシンプレクティック性を持つことを確認することができる。

1次シンプレクティック積分法: SI01b

$$p^{n+1} = p^n - \Delta t \frac{dU}{dq}(q^n) \quad (13.12)$$

$$q^{n+1} = q^n + \Delta t \frac{dK}{dp}(p^{n+1}) \quad (13.13)$$

### 13.3 シンプレクティック性の由来

積分法 SI01a がなぜ正準変換になっているのか、その由来を調べてみよう。

#### 13.3.1 正準方程式の形式的厳密解

以下では相空間中の位置ベクトル (=つまり系の状態)  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

に作用する演算子を  $\hat{A}$  のようにハットを付けて書くことにする。

任意の関数  $f$  と  $g$  のポアソン括弧  $\{f, g\}$  を、 $f$  に  $\{\cdot, g\}$  という演算子が作用したものともみることしよう。この演算子を  $\hat{D}(A)$  と書くと

$$\hat{D}(g) = \{\cdot, g\} \quad (13.14)$$

あるいは任意の  $f(q, p)$  に対して

$$\hat{D}(g) f = \{f, g\} \quad (13.15)$$

である。

演算子  $\hat{D}$  を使うと、ハミルトニアンが  $H(q, p)$  で与えられる一般的な力学の系における正準方程式は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{D}(H) \mathbf{r} \quad (13.16)$$

これは正準方程式を書き換えただけであるが、「 $\hat{D}(H)$  は状態の時間微分演算子である」という意味が明確になる。

時刻  $t$  の状態  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  から  $\tau$  だけ時間が経った状態を  $\mathbf{r}(t+\tau)$  とする。ここでは  $\tau$  は有限であり、大小は特に限定しない。テーラー展開から

$$\mathbf{r}(t+\tau) = \mathbf{r} + \frac{\tau}{1!} \frac{d}{dt} \mathbf{r} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} + \frac{\tau^3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{r} + \dots \quad (13.17)$$

$$= \mathbf{r} + \frac{\tau}{1!} \hat{D}(H) \mathbf{r} + \frac{\tau^2}{2!} \hat{D}(H)^2 \mathbf{r} + \frac{\tau^3}{3!} \hat{D}(H)^3 \mathbf{r} + \dots \quad [\text{式 (13.16) より}]$$

$$= \text{Exp}(\tau \hat{D}(H)) \mathbf{r} \quad (13.18)$$

ここで指数関数との類似から、演算子  $\hat{A}$  の「指数関数」を

$$\hat{\text{Exp}}(\hat{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n \quad (13.19)$$

と定義した。演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(H))$

$$\text{Exp}(\tau \hat{D}(H)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{D}(H)^n \quad (13.20)$$

は一般的な力学系に対する時間推進の演算子である。

前章で示したように、ハミルトニアン  $H(\mathbf{r})$  によって定まる  $\mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{r}(t+\tau)$  という (運動による) 写像はシンプレクティック変換なので、時間推進の演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(H))$  はシンプレクティック変換である。

また、ある座標変換  $\mathbf{r}(0) \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}(\tau)$  について、

$$\mathbf{r}' = \text{Exp}(\tau \hat{D}(h)) \mathbf{r} \quad (13.21)$$

という形で書けるような関数  $h(q, p)$  が存在すれば、この変換は正準変換であり、その変換は  $h$  をハミルトニアンとする系の (初期条件  $\mathbf{r}$  から出発して  $\mathbf{r}'$  に至る) 運動に一致する。

まとめると、ハミルトニアンは (正準方程式を通じて) 運動を記述する。そしてその運動はある時刻の状態  $\mathbf{r}(t)$  から別の状態  $\mathbf{r}(t+\tau)$  への変換 (あるいは写像) であり、その写像は正準変換である。その正準変換は時間推進の演算子で記述される。模式的に書けば以下ようになる。

$$\text{ハミルトニアン } H \Leftrightarrow \text{運動} \Leftrightarrow \text{正準変換} \Leftrightarrow \text{演算子 } \text{Exp}(\hat{D}(\tau H)) \quad (13.22)$$

### 13.3.2 時間推進演算子が解ける例

正準方程式 (13.16) の厳密解は時間推進演算子 (13.20) を使って形式的には解くことができるが、一般的なハミルトニアンに対してこの時間推進演算子を具体的に計算することは困難である。

例外的に形式解が計算できる (= 正準方程式が積分できる) 場合の一つは、ハミルトニアンが

$$H = K(p) \quad (13.23)$$

という形で与えられる場合である。これはポテンシャルの存在しない系の運動（自由運動）に相当する。この時、正準方程式は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dK}{dp}(p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.24)$$

であり、この微分方程式の解は以下のように容易に解ける。初期条件を

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (13.25)$$

とすれば

$$\mathbf{r}(\tau) = \begin{pmatrix} q_0 + \tau \frac{dK}{dp}(p_0) \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (13.26)$$

が解である。従ってこのハミルトニアン  $K(p)$  に対する任意の時間  $\tau$  に対して時間推進演算子

$$\mathbf{r}(t + \tau) = \text{Exp}(\tau \hat{D}(K)) \mathbf{r}(t) \quad (13.27)$$

は具体的に書けて

$$\text{Exp}(\tau \hat{D}(K)) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} q + \tau \frac{dK}{dp}(p) \\ p \end{pmatrix} \quad (13.28)$$

である。

同様にハミルトニアンが  $q$  のみの関数

$$H = U(q) \quad (13.29)$$

の場合についても時間推進演算子は厳密に計算できる。このとき正準方程式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dU}{dq}(q) \end{pmatrix} \quad (13.30)$$

の解は

$$\mathbf{r}(\tau) = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 - \tau \frac{dU}{dq}(q_0) \end{pmatrix} \quad (13.31)$$

従って時間推進演算子は

$$\text{Exp}(\tau \hat{D}(U)) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} q \\ p - \tau \frac{dU}{dq}(q) \end{pmatrix} \quad (13.32)$$

である。

### 13.3.3 シンプレクティック積分法の演算子による表現

シンプレクティック積分法 SI01a を演算子で表現してみる。簡単のために

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \tau = \Delta t$$

とすると、式 (13.9) と (13.10) は

$$q' = q + \tau \frac{dK}{dp}(p) \quad (13.33)$$

$$p' = p - \tau \frac{dU}{dq}\left(q + \tau \frac{dK}{dp}(p)\right) \quad (13.34)$$

$$(13.35)$$

である。

演算子  $K(p)$  に対しては

$$\hat{D}(K) = \frac{dK}{dp} \frac{\partial}{\partial q} \quad (13.36)$$

$U(q)$  に対しては

$$\hat{D}(U) = -\frac{dU}{dq} \frac{\partial}{\partial p} \quad (13.37)$$

であることに注意すると、式 (13.33) は

$$q' = q + \tau \hat{D}(K) q = (1 + \tau \hat{D}(K)) q \quad (13.38)$$

と書ける。一方テーラー展開により式 (13.34) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} p' &= p - \tau \left( \frac{dU}{dq} + \tau \frac{dK}{dp} \frac{d^2U}{dq^2} + \frac{\tau^2}{2!} \left( \frac{dK}{dp} \right)^2 \frac{d^3U}{dq^3} + \frac{\tau^3}{3!} \left( \frac{dK}{dp} \right)^3 \frac{d^4U}{dq^4} + \dots \right) \\ &= p - \tau \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left( \frac{dK}{dp} \frac{d}{dq} \right)^n \right\} \frac{dU}{dq} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{D}(K)^n \right\} \left( p - \tau \frac{dU}{dq} \right) \\ &= \text{Exp}(\hat{D}(K)) (1 + \tau \hat{D}(U)) p \end{aligned} \quad (13.39)$$

ここで

$$\hat{D}(U)^n p = 0 \quad (n \geq 2) \quad (13.40)$$

に注意すると式 (13.39) は

$$p' = \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(K)) \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(U)) p \quad (13.41)$$

と書ける。同様に

$$\hat{D}(U)^n q = 0 \quad (n \geq 1), \quad \hat{D}(K)^n q = 0 \quad (n \geq 2) \quad (13.42)$$

を使うと、式 (13.38) は

$$q' = \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(K)) \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(U)) q \quad (13.43)$$

と書けることが分かる。つまり

$$\mathbf{r}' = \hat{S}_a(\tau) \mathbf{r} \quad (13.44)$$

である。この

$$\hat{S}_a(\tau) := \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(K)) \hat{\text{Exp}}(\tau \hat{D}(U)) \quad (13.45)$$

は、積分法 SI01a による状態  $\mathbf{r}$  の（時間  $\tau$  分の）数値的な積分を表す演算子である。

変換  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(K))$  と変換  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(U))$  はどちらも正準変換であり、第 11.3 章で示したように正準変換の合成変換は正準変換なので、1 次シンプレクティック積分法  $\hat{S}_a$  [式 (13.45)] は正準変換である。こうして積分公式 SI01a がシンプレクティック性を持つことは確認するまでもなく自明となった。

式 (13.45) の右辺の演算子の順番に注意しよう。SI01a のアルゴリズムでは、まず  $K(p)$  から計算される時間推進演算子  $\text{Exp}(\hat{D}(K))$  で状態  $\mathbf{r}$  を別の状態  $\mathbf{r}^*$  に変換してから、変換後の正準座標系  $\mathbf{r}^*$  の下で計算される時間推進演算子  $\text{Exp}(\hat{D}(U))$  で状態  $\mathbf{r}^*$  を変換する。

非可換な座標変換では操作の順番に注意しなければならない。たとえばカーテン座標系  $(x, y, z)$  で  $z$  軸の周りの 90 度の回転を演算子  $\hat{R}$ 、 $x$  軸方向への 1 だけの平行移動を演算子  $\hat{T}$  とすると

$$\hat{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad (13.46)$$

$$\hat{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (13.47)$$

である。

背景となる座標系を固定して、点

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を、(1)  $x$  軸方向に 1 だけ平行移動 ( $\hat{T}$ ) してから、(2)  $z$  軸周りに回転させる ( $\hat{R}$ )、という操作 (左辺) とその結果 (右辺) は以下の通りである。

$$\hat{R} \hat{T} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.48)$$

二つの座標変換の合成変換は、作用させる順番に右から左に演算子を並べていることに注意しよう。

上の操作は、座標変換の演算子  $\hat{R}$  や  $\hat{T}$  を定義される座標系そのものを毎回変換させるものとして考えると、まず (1) 座標を  $z$  軸周りに回転 ( $\hat{R}$ ) させてから、(1) (変換後の座標を  $x$  軸方向に 1 だけ平行移動させる ( $\hat{T}$ ) と考えても同じで操作と結果は式 (13.48) になる。だが、こう考える場合は先に作用させる演算子を左から順番に置くことになる。

シンプレクティック積分法 SI01 [式 (13.7) と (13.8)] は

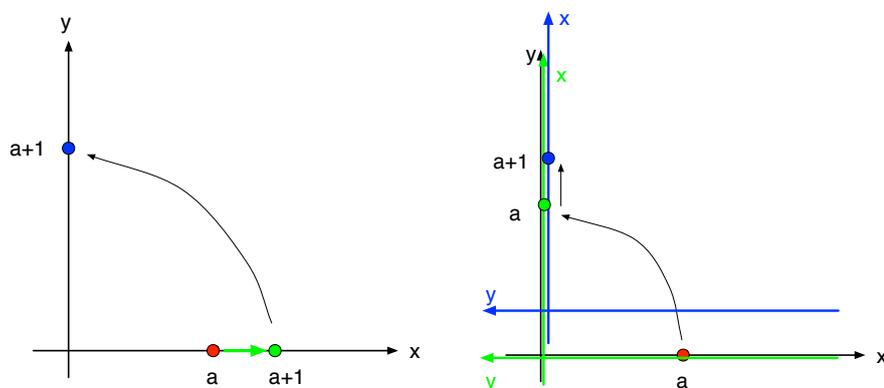
$$q^* = q^n + \Delta t \frac{dK}{dp}(p^n) \quad (13.49)$$

$$p^* = p^n - \Delta t \frac{dK}{dq}(q^n) \quad (13.50)$$

$$q^{n+1} = q^* + \Delta t \frac{dU}{dp}(p^*) \quad (13.51)$$

$$p^{n+1} = p^* - \Delta t \frac{dU}{dq}(q^*) \quad (13.52)$$

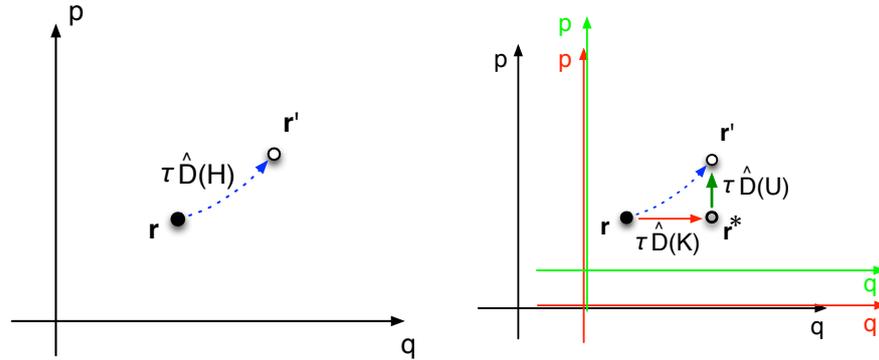
と二つの変換に分けられることに注意しよう。これは、ハミルトニアン  $K$  の厳密な時間推進演算子 (13.28) を適用して座標を  $r^*$  に適用してから、新しい正準座標  $r^*$  の下で計算したハミルトニアン  $U$  の厳密な時間推進演算子 (13.32) を適用していることを意味する。従って式 (13.45) ではハミルトニアン  $K$  による変換が左にあるのである。



### 13.3.4 合成変換による厳密解の近似

ハミルトニアンが  $K(p)$  の時には時間推進演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(K))$  が式 (13.28) として、また、ハミルトニアンが  $U(q)$  の時には時間推進演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(U))$  が式 (13.32) として具体的な形が得られた。しかし、ハミルトニアンが

$$H(q, p) = K(p) + U(q) \quad (13.53)$$



という形の時の時間推進演算子

$$\text{Exp}(\tau \hat{D}(H)) = \text{Exp}(\tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U)) \quad (13.54)$$

は具体的に計算することができない。演算子の指数関数の定義式 (13.19) に従って右辺を計算すると

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U))^n \\ &= 1 + \tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2!} (\hat{D}(K)^2 + \hat{D}(K)\hat{D}(U) + \hat{D}(U)\hat{D}(K) + \hat{D}(U)^2) \\ &\quad + \frac{\tau^3}{3!} (\hat{D}(K)^3 + \hat{D}(K)^2\hat{D}(U) + \hat{D}(K)\hat{D}(U)\hat{D}(K) + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (13.55)$$

となり、一般にはゼロにならない

$$\hat{D}(K)^n \hat{D}(U)^m$$

の項が無数にあるためである。

シンプレクティック積分法 SI01a は厳密な時間推進演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U))$  を、(演算の形が既知である) 二つの演算子  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(K))$  と  $\text{Exp}(\tau \hat{D}(U))$  を組み合わせて

$$\text{Exp}(\tau \hat{D}(H)) = \text{Exp}(\tau \hat{D}(K) + \tau \hat{K}(U)) \sim \text{Exp}(\tau \hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau \hat{D}(U)) \quad (13.56)$$

と近似した方法なのである。

近似式 (13.56) の誤差を見積もってみよう。

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\tau\hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{D}(K)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{D}(U)^n \\ &= 1 + \tau\hat{D}(K) + \tau\hat{D}(U) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2!} \left( \hat{D}(K)^2 + 2\hat{D}(K)\hat{D}(U) + \hat{D}(U)^2 \right) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (13.57)$$

なので、

$$\text{Exp}(\tau\hat{D}(K) + \tau\hat{D}(U)) = \text{Exp}(\tau\hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U)) + \hat{Err}(\tau) \quad (13.58)$$

とすると、式 (13.55) より

$$\hat{Err}(\tau) = \frac{\tau^2}{2} \left( \hat{D}(K)\hat{D}(U) - \hat{D}(U)\hat{D}(K) \right) + \dots \quad (13.59)$$

つまり 1 ステップの誤差は  $O(\tau^2)$  である。これは 1 次オイラー法と同じである。1 ステップあたりの精度は同じなのに SI01a にするとなぜ長時間積分しても全エネルギーがずれていかないのかその理由を次に探る。

## 13.4 エネルギーの誤差

積分公式 SI01a (及び SI01b) によって、時刻  $t = t^n$  の状態

$$\mathbf{r}^n = \begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix} \quad (13.60)$$

が時刻  $t = t^n + \Delta t$  の状態

$$\mathbf{r}^{n+1} = \begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} \quad (13.61)$$

に移る。この変換  $\mathbf{r}^n \Rightarrow \mathbf{r}^{n+1}$  は一つの正準変換なので、この正準変換に対応する「仮想的な運動」が存在するはずである。そしてその仮想的な運動に対応するハミルトニアン  $\tilde{H}$  も存在するはずである。(模式的な式 (13.22) を見よ。) そのハミルトニアン  $\tilde{H}$  は、今考えている (数値積分で解こうとしている) 本来のハミルトニアン  $H$

$$H(q, p) = K(p) + U(q) \quad (13.62)$$

とは一致しない。(一致するのであれば、SI01a は上のハミルトニアンの厳密解を計算できる理想的な数値積分法ということになる。) 本来のハミルトニアン  $H$  ではないが、SI01a は  $\tilde{H}$  というハミルトニアンに対する厳密な数値積分法になっている。これの意味するところは大きい。式 (12.37) で示したように、厳密解であれば、この系のエネルギー  $\tilde{H}$  が保存する。つまり計算スキーム SI01a はどれだけ

長時間積分してもエネルギー  $\hat{H}$  を一定に保つ。では  $\hat{H}$  と  $H$  はどれだけずれているのであろうか？

式 (13.58) を再掲すると

$$\text{Exp}(\tau\hat{D}(K) + \tau\hat{K}(U)) = \underline{\text{Exp}(\tau\hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U))} + \hat{Err}(\tau) \quad (13.63)$$

この下線部が「仮想的な運動」に対応する演算子  $\text{Exp}(\tau\hat{D}(\tilde{H}))$  に一致するはずなので、

$$\text{Exp}(\tau\hat{D}(\tilde{H})) = \text{Exp}(\tau\hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U)) \quad (13.64)$$

と置き、この  $\tilde{H}$  を求める。

一般に非可換演算子  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  に対して以下の公式 (Baker-Campbell-Hausdorff 公式) が成り立つ。

$$\text{Exp}(\hat{A}) \text{Exp}(\hat{B}) = \text{Exp}(\hat{C}) \quad (13.65)$$

$$\begin{aligned} \hat{C} = & \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] \\ & + \frac{1}{12}[\hat{A} - \hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \\ & - \frac{1}{24}[\hat{B}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \end{aligned} \quad (13.66)$$

ここで

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (13.67)$$

等である。これを使うと、

$$\text{Exp}(\tau\hat{D}(K)) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U)) = \text{Exp}(\hat{C}) \quad (13.68)$$

として

$$\begin{aligned}
\hat{C} &= \tau \hat{D}(K) + \tau \hat{D}(U) + \frac{\tau^2}{2} [\hat{D}(K), \hat{D}(U)] \\
&\quad + \frac{\tau^3}{12} [\hat{D}(K) - \hat{D}(U), [\hat{D}(K), \hat{D}(U)]] \\
&\quad - \frac{\tau^4}{24} [\hat{D}(U), [\hat{D}(K), [\hat{D}(K), \hat{D}(U)]]] + \dots \\
&= \tau \hat{D}(K) + \tau \hat{D}(U) + \frac{\tau^2}{2} \hat{D}(\alpha) \\
&\quad + \frac{\tau^3}{12} [\hat{D}(K - U), \hat{D}(\alpha)] \\
&\quad - \frac{\tau^4}{24} [\hat{D}(U), [\hat{D}(K), \hat{D}(\alpha)]] + \dots \\
&= \tau \hat{D}(K) + \tau \hat{D}(U) + \frac{\tau^2}{2} \hat{D}(\alpha) \\
&\quad + \frac{\tau^3}{12} \hat{D}(\{\alpha, K - U\}) \\
&\quad - \frac{\tau^4}{24} \hat{D}(\{\{\alpha, K\}, U\}) + \dots \\
&= \tau \hat{D}(K + U + \frac{\tau}{2} \alpha + \frac{\tau^2}{12} \{\alpha, K - U\} - \frac{\tau^3}{24} \{\{\alpha, K\}, U\} + \dots) \quad (13.69)
\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha := \{U, K\} \quad (13.70)$$

である。上の式変形では

$$\hat{D}(K) - \hat{D}(U) = \hat{D}(K - U) \quad (13.71)$$

などの  $\hat{D}$  の線形性と、次の公式 (13.72) を複数回使った：任意の  $f, g$  に対して

$$[\hat{D}(f), \hat{D}(g)] = \hat{D}(\{g, f\}) \quad (13.72)$$

これはヤコビ恒等式 (12.30) を使えば証明できる。

式 (13.64) と (13.68), (13.69) より

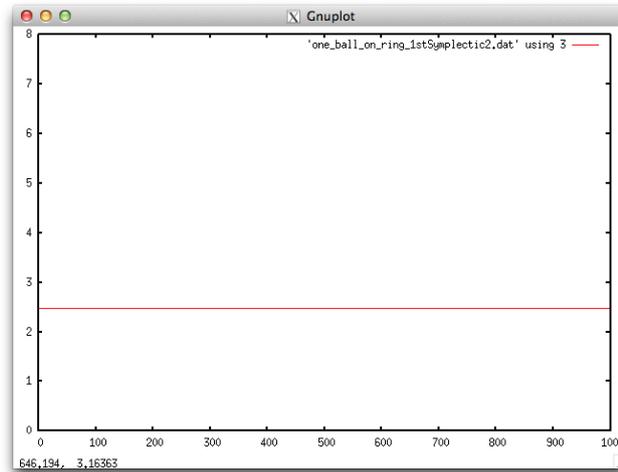
$$\tilde{H} = K + U + \frac{\tau}{2} \alpha + \frac{\tau^2}{12} \{\alpha, K - U\} - \frac{\tau^3}{24} \{\{\alpha, K\}, U\} + \dots \quad (13.73)$$

である。ハミルトニアン (13.62) との差は

$$\tilde{H} - H = \frac{\tau}{2} \alpha + \frac{\tau^2}{12} \{\alpha, K - U\} - \frac{\tau^3}{24} \{\{\alpha, U\}, K\} + \dots \quad (13.74)$$

シンプレクティック積分法 SI01a はどれだけ積分しても、常に  $\tilde{H}$  を一定に保つが、その値は本来の系のエネルギー  $H$  とは  $O(\tau)$  だけしかずれていないことをこの式は意味する。

この章の最初の例題にもどると、SI01a では  $O(\tau)$  でエネルギーが振動していた。計算修正されたエネルギー  $\tilde{H}$  は厳密に保存するはずである。式 (13.73) の無限級数を計算することはできないので、 $O(\tau^2)$  の項までで  $\tilde{H}$  を近似してプロットしたグラフが以下である。



## 13.5 レポート課題

1次シンプレクティック積分法 SI01a は1ステップあたり  $O(\Delta t^2)$  の誤差が生じるが、長時間積分しても全エネルギーの値は正しい値から大きくずれることはない。これがなぜかを以下の3つの言葉を含めた文章で説明せよ。ただし、説明文の中に現れる以下の3つの言葉には下線を引くこと。

ハミルトニアン エネルギー保存 時間ステップ

## 13.6 高精度化

1次精度のシンプレクティック法 SI01a (または SI01b) の精度を上げるためには次のようにすれば良い。一般に演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  に対して

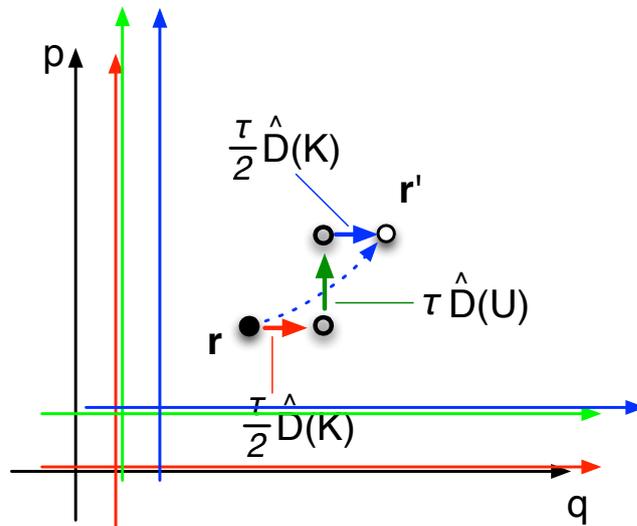
$$\text{Exp}(\tau\hat{A} + \tau\hat{B}) = \text{Exp}\left(\frac{\tau}{2}\hat{A}\right) \text{Exp}(\tau\hat{B}) \text{Exp}\left(\frac{\tau}{2}\hat{A}\right) + O(\tau^3) \quad (13.75)$$

である。そこで、ハミルトニアン

$$H = U(q) + K(p) \quad (13.76)$$

に対する時間推進演算子を

$$\text{Exp}(\tau\hat{D}(H)) \sim \text{Exp}\left(\frac{\tau}{2}\hat{D}(K)\right) \text{Exp}(\tau\hat{D}(U)) \text{Exp}\left(\frac{\tau}{2}\hat{D}(K)\right) \quad (13.77)$$



と近似すれば、その誤差は  $O(\tau^3)$  なので2次精度の数値積分法になっている。また、右辺は既知（式 (13.28) と式 (13.32)）の正準変換の合成したものなので、全体としても明らかに正準変換になっている。つまりこれは2次シンプレクティック法である。さらにより高次のシンプレクティック積分法も開発されている。

最後に：この章では、式 (13.76) という特殊な形のハミルトニアンに対する陽的なシンプレクティック積分法を紹介した。一般的なハミルトニアンに対するシンプレクティック法も存在するが、それは陰的な方法である。つまり毎ステップ連立方程式を解く必要がある。



## Chapter 14

# ハミルトンの原理

この講義の出発点は、ラグランジアンが

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

の系の運動方程式が

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

という式になるという事実であった。今回はこのラグランジュの運動方程式の起源を説明する。そのためにまずは汎関数と変分法について説明しよう。

### 14.1 汎関数と変分

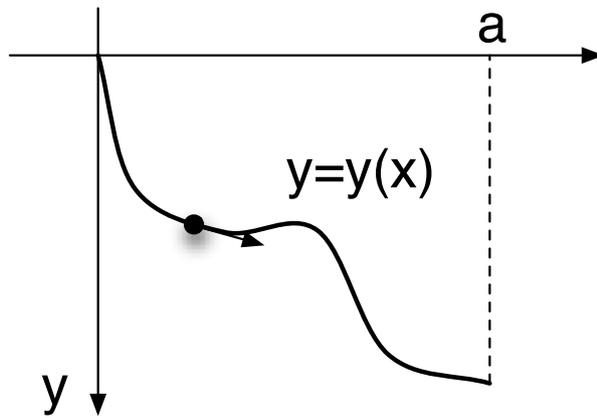
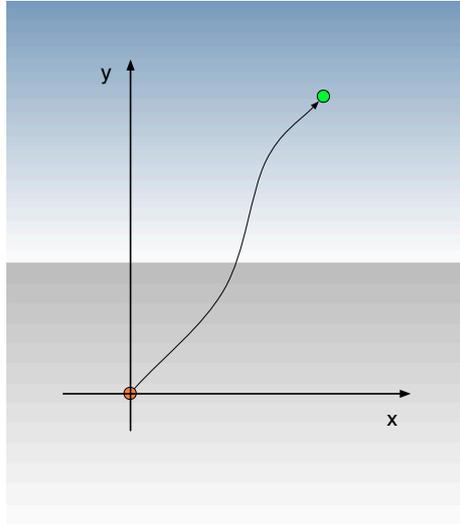
実関数は「実数を入れると実数を出す」系であるのに対して、「関数を入れると実数を出す」系が汎関数である。いくつか例を見てみよう。

#### 14.1.1 例1：ライフガード問題

海岸から離れたところに立っているあなたが、斜め前方の海におぼれている人を見つけた。どうすればもっとも早くたどり着けるであろうか？陸の上を走る速さ  $V_1$  海の中を泳ぐスピード  $v_2$  がそれぞれ一定とし、図のように座標をとるとおぼれている人のところまでたどり着くのにかかる時間  $T$  はあなたが描く軌跡  $y = y(x)$  の汎関数である。 $v_1 = v_2$  の場合、 $T$  を最小にするのは1次関数の  $y(x)$  であることは自明であろう。それ以外の場合はどうであろうか？

#### 14.1.2 例2：最速降下線

下図のように座標  $x, y$  をとり、原点  $(0, 0)$  と座標  $(a, A)$  を通る曲線  $y = y(x)$  を考える。下向き ( $+y$  方向) の重力 (重力加速度  $g$ ) を考え、原点から初速ゼロで出発して、この曲線を坂道  $y(x)$  のように滑りおろる質点 (質量  $m$ ) が終点  $(a, A)$  まで滑りきるのにかかる時間を  $T$  とする。 $T$  も汎関数の例である。



原点を出発点にとり、曲線  $y = y(x)$  に沿って長さを  $s$  とすると、エネルギーの保存から

$$\frac{m}{2} \dot{s}^2 - mgy(s) = 0$$

である。従って

$$\dot{s} = \sqrt{2gy(s)}$$

微小な距離  $\Delta s$  を通過するのにかかる微小な時間を  $\Delta t$  とすると、

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta s}{\dot{s}} \\ &= \frac{\Delta s}{\sqrt{2gy}} \\ &= \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} \Delta x \end{aligned}$$

従って、

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+(y')^2} dx$$

となる。 $T$  を極小にする関数形  $y(x)$  を最速降下線と言う。ただし、 $y(0)$  と  $y(a)$  は固定する。定数倍は関係ないから、最速降下線とは汎関数

$$T(y, y') = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+(y')^2} dx \quad (14.1)$$

を最小にする曲線  $y(x)$  である。

摩擦のない世界では、エネルギーを全く使わずに水平移動することができる。2地点を地下で結ぶ曲線状のトンネルを掘れば良い。急いでいる人たちのためには、その曲線の形が最速降下線にするのが良い。

変分法と呼ばれる手法を使えば、最速降下線を具体的に求めることができる。その答えはサイクロイドである。

### 14.1.3 例3：極小曲面

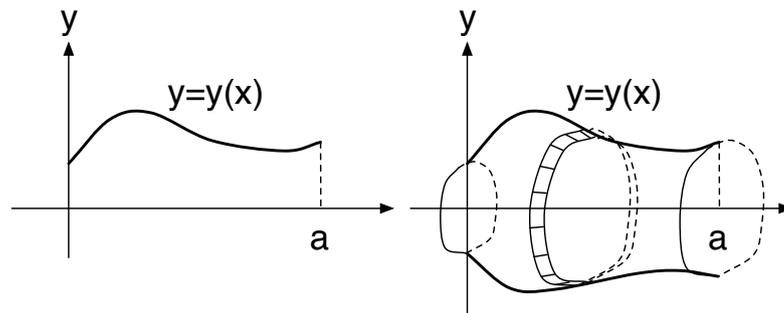
曲線  $y = y(x)$  ( $0 \leq x \leq a$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる曲面の面積  $S[y]$  を考えよう。

$x$  軸方向の幅  $\Delta x$  の細くて円形のリボンの面積は  $\Delta S = 2\pi y \times \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 2\pi y \times \sqrt{1+(y')^2} \Delta x$  だから

$$S = 2\pi \int_0^a y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$$

である。 $y(0)$  と  $y(a)$  は固定するという条件の下、 $S(y, y')$  を極小にする関数形  $y(x)$  何だろうか？ これを極小曲面という。定数倍  $2\pi$  は関係ないので、極小曲面を求めるためには、汎関数

$$S(y, y') = \int_0^a y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \quad (14.2)$$



を極小にする関数  $y = y(x)$  を求めれば良い。

シャボン玉のように、石けん水でできる膜の面は面積が最小である。向かい合った二つの円を石けん水につけてできる膜が上の極小曲面である。(ただし細かいことをいえば、極小曲面が必ずしも面積最小ではない。二つの円が離れ過ぎていると、石けん水で膜を張ることはできない。)

#### 14.1.4 変分法

汎関数の極値を求める問題を解く方法は変分法と呼ばれる。関数  $y(x)$  が極値をとる  $x$  の値を求める方法が微分法であるのに対し、汎関数  $I(y)$  が極値をとる関数  $y(x)$  を求める方法が変分法と言える。変分法を使えば汎関数 (14.1) や (14.2) を最小にする関数形  $y = y(x)$  を求めることができる。

まず微分法の復習をしよう。関数  $y = y(x)$  について  $x = x_0$  でテーラー展開すると

$$y(x_0 + \epsilon) = y(x_0) + \epsilon \Delta y(x_0) + O(\epsilon^2)$$

ここで

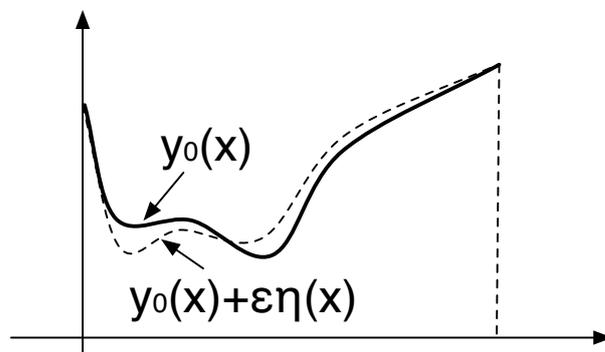
$$\Delta y(x_0) = y'(x_0)$$

が微分である。関数  $y(x)$  が  $x_0$  で極値をとるとは、 $x_0$  での  $y$  の微分  $\Delta y$  がゼロということである。

同じように汎関数の極値について考えてみよう。汎関数  $I(y, y')$  が関数  $y_0(x)$  で極値をとるということは、関数  $y_0(x)$  を、その関数の形から少しだけ変化させても汎関数  $I$  の値は変わらないということである。少しだけ形を変化させた関数を  $y(x) = y_0(x) + \epsilon \eta(x)$  とする。ここで  $\epsilon$  は小さい実数、 $\eta(x)$  は任意の関数とする。当然  $y'(x) = y_0'(x) + \epsilon \eta'(x)$  である。するとテーラー展開から

$$I(y_0 + \epsilon \eta, y_0' + \epsilon \eta') = I(y_0, y_0') + \epsilon \delta I(y_0, y_0') + O(\epsilon^2)$$

右辺の  $\delta I$  を汎関数  $I$  の変分という。汎関数  $I$  が  $y_0(x)$  で極値をとるということは、 $y_0(x)$  で変分  $\delta I$  がゼロということである。



## 14.2 ハミルトンの原理

ラグランジアンが  $L(q, \dot{q})$  で与えられる 1 自由度系について、作用と呼ばれる量を

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}) dt \quad (14.3)$$

と定義する。無限に考えられる  $q = q(t)$  のうち、ただ一つだけが実際に実現する軌跡 (= 運動) である。その運動について、次の法則が成り立つ。これを最小作用の原理 (あるいはハミルトンの原理) という。

ハミルトンの原理 (最小作用の原理)

関数は作用の極値をとる。

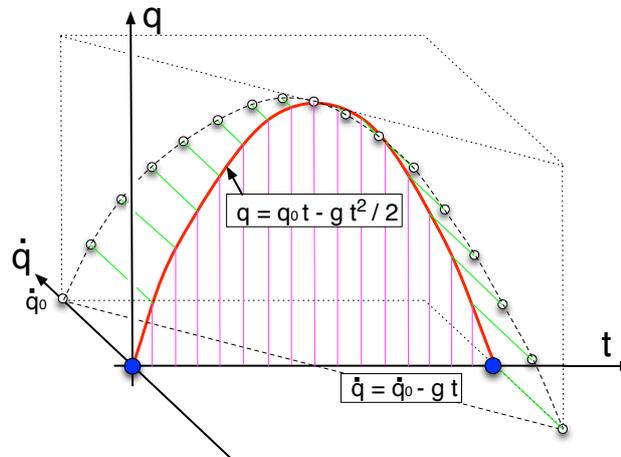
$N$  自由度系の場合も同様で、実際の運動  $q_i = q_i(t)$  に対して作用

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) dt \quad (14.4)$$

は極値をとる。

### 14.2.1 例 (質点の投げ上げ)

鉛直上向きを  $q$  軸とする。質点を  $q = 0$  の位置から真上に投げ上げたところ、 $t_1$  秒後に再び  $q = 0$  の高さまで落ちてきたとき。その間にボールが取り得る軌跡は (仮想的に考えるだけなら) 無数にある。そのあらゆる仮想的な運動に対して、それぞれ作用を計算すると様々な値 (実数) が具体的に決まるが、不思議なことに、この自然界で本当に起きる運動はちょうど極値をとるようになっている、というのがハミルトンの原理である。その意味で (自然界でおきる) 運動というのは特別なのである。



上の図に時間  $t$  の関数としての  $q(t)$  を赤い実線で描いた。この  $q(t)$  のグラフを仮想的にいろいろと変えてみると、実際の質点がつとる運動（つまり放物線）の場合には、この赤い実線を  $t$ - $q$  面内で、わずかだけ変形しても作用が変化しない、即ち

$$\delta \int_0^{t_1} \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - mgq \right) dt = 0$$

というのがハミルトンの原理である。

自由に変えることのできるのは  $q(t)$  だけであることに注意しよう。 $\dot{q}(t)$  の曲線（上の図で  $t$ - $\dot{q}$  平面に描かれた黒の点線）は自由に変えることはできない。上図の赤い実線  $q(t)$  を

$$\delta q(t) = \epsilon \eta(t)$$

だけ、つまり

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \epsilon \eta(t)$$

と変形させると、それに応じて  $\dot{q}(t)$  の形も変わる。その変わり方は決まっています

$$\delta \dot{q}(t) = \epsilon \dot{\eta}(t)$$

である。

### 14.3 ラグランジュの運動方程式

ハミルトンの原理からラグランジュの運動方程式が自然に導かれる。

時刻  $t_a$  から  $t_b$  の時間を  $K$  等分して  $\Delta t = (t_b - t_a)/K$  とし、作用を以下のように離散化する

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}) dt = \sum_{k=0}^{K-1} S_k \quad (14.5)$$

$$S_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(q, \dot{q}) dt \quad (14.6)$$

ここで

$$\dot{q}_k = \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t} \quad (14.7)$$

と近似すれば

$$S_k = L(q^k, \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (14.8)$$

である。ここで表記を短くするために

$$q^k = q(t_k), \quad t_k = t_a + k \Delta t \quad (14.9)$$

とした。

ハミルトンの原理から、運動  $q = q(t)$  では作用が極値をとるので、ある一つの整数  $k$  についての  $q^k$  だけを正しい（実際に実現する）運動から少しだけ変化させても  $S$  の値は変わらない。つまり  $K$  が十分に大きければ

$$\frac{\partial S}{\partial q^k} = 0 \quad (14.10)$$

である。

定義から  $q^k$  に依存するのは  $S_k$  と  $S_{k-1}$  だけである。

$$\frac{\partial S_k}{\partial q^k} = \frac{\partial L}{\partial q}(q^k, \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}) \Delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^k, \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}) \quad (14.11)$$

$$\frac{\partial S_{k-1}}{\partial q^k} = \frac{\partial L}{\partial q}(q^{k-1}, \frac{q^k - q^{k-1}}{\Delta t}) \quad (14.12)$$

なので、式 (14.10) は

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q^k, \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}) - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^k, \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^{k-1}, \frac{q^k - q^{k-1}}{\Delta t}) \right) = 0 \quad (14.13)$$

と書ける。 $\Delta t = 0$  の極限ではこの式はラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (14.14)$$

となる。

一般に、汎関数がある関数で極値をとる（つまり変分がゼロになる）という原理を変分原理という。作用汎関数の変分がゼロという変分原理からラグランジュの運動方程式が得られたわけである。

### 14.3.1 ハミルトンの原理の意味

ハミルトンの原理をどう「解釈」すればいいのだろうか？ラグランジュの運動方程式や正準方程式は、各時刻について厳密に成立すべき運動の法則を微分方程式として与えられている。これは我々人間のように、対象の物理系と共に時間を経過していくような存在にはごく自然な法則の記述である。

一方、ハミルトンの作用の原理はいわば時空を超越した存在の視点からみた運動の法則である。与えられた条件（たとえば上の質点投げ上げの例では、 $q(t_0) = q(t_1) = 0$ ）の下で、考えられるありとあらゆる運動を「とりあえず」試してみて、そして、運動から得られる作用の積分値を最後に比較し、極値を出した運動だけが「採用」されて、現実世界で起きるのはその現象になるというイメージであろうか。このような突飛なイメージは量子力学を勉強すると、必ずしも突拍子もないものではないことがわかる。

変分原理で記述された自然法則には一種独特の単純さと美しさがある。力学に限らず多くの自然法則がこのような変分原理で記述される。

## 14.4 変分原理からの正準方程式の導出

ラグランジュの運動方程式がハミルトンの原理から導かれたように、正準方程式 (9.10) もある種の変分原理から導くことができる。

ハミルトンの原理で極値をとるのは、作用

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt \quad (14.15)$$

であった。そこで、これをヒントにしてそのような変分原理を推測してみよう。ハミルトニアン  $H(q, p)$  が与えられた系を考える。むろん独立変数は  $q$  と  $p$  である。ルジャンドル変換の関係

$$L = p\dot{q} - H \quad (14.16)$$

を思い出して、 $q(t)$ ,  $p$ ,  $\dot{q}$ ,  $\dot{p}$  で書かれた汎関数

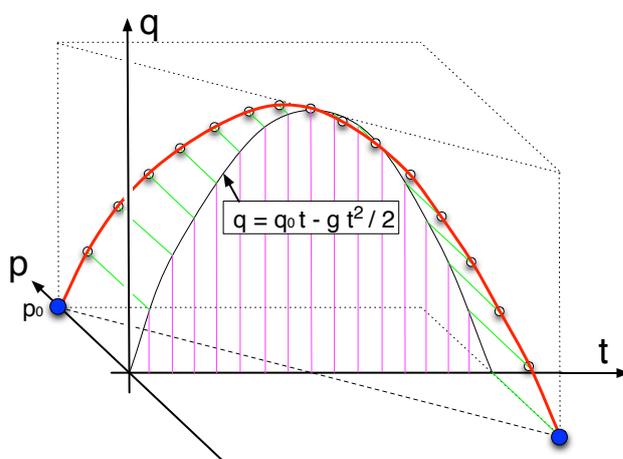
$$\hat{S} = \int_{t_0}^{t_1} \{p\dot{q} - H(q, p)\} dt \quad (14.17)$$

を考える。（つまり  $\dot{p}$  に関する項はない。）ここで注意すべきは、この汎関数は 2次元 ( $N$  自由度系の場合には  $2N$  次元) の相空間中での軌跡  $(q(t), p(t))$  の汎関数であるという点である。この点がハミルトンの原理との大きな違いである。すると次の法則が成り立つ。これは修正ハミルトンの原理と呼ばれる。

修正ハミルトンの原理

運動は汎関数  $\hat{S}$  の極値をとる。

ラグランジュの運動方程式を導いたハミルトンの原理と違うのは、 $q$  と  $p$  の相空間という中で描かれる軌跡 (trajectory) の変分問題になっているということである。質点の投げ上げの問題に戻ると、上の図で相空間中の実際の運動の軌跡



は赤の実線とする。この曲線を少しだけ変形しても、つまり変分をとっても汎関数  $\hat{I}$  が変わらないというのが、この変分原理である。このとき  $q$  の方向と  $p$  の方向に自由に変形しても良いというのがハミルトンの原理と異なる。

第 14.3 章と同様な方法で汎関数 (14.17) を次のように離散化する。

$$S = \sum_{k=0}^{K-1} S_k \quad (14.18)$$

$$S_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{p\dot{q} - H(q, p)\} dt \quad (14.19)$$

この  $S_k$  の積分を次のように近似する。

$$S_k = (p^k \dot{q}^k - H(q^k, p^k)) \Delta t \quad (14.20)$$

ここで

$$\dot{q}^k = \frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t} \quad (14.21)$$

とすると

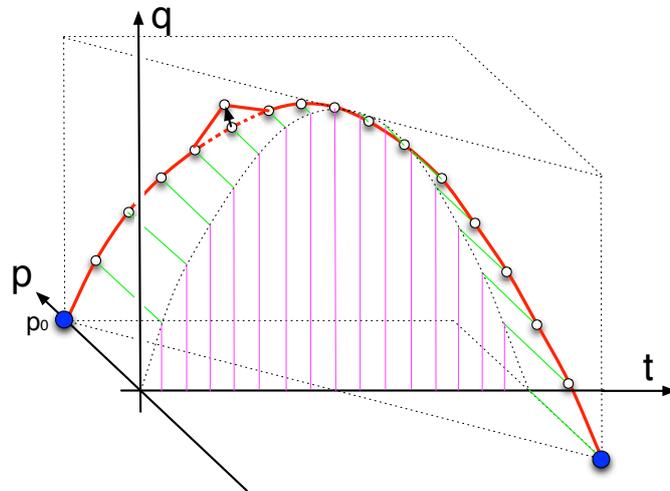
$$S_k = p^k (q^{k+1} - q^k) - H(q^k, p^k) \Delta t \quad (14.22)$$

である。修正ハミルトンの原理から、特定の  $k$  に対して

$$\frac{\partial S}{\partial q^k} = 0 \quad (14.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p^k} = 0 \quad (14.24)$$

が成り立つ。



$q^k$  に依存するのは  $S_k$  と  $S_{k-1}$  だけなので、式 (14.23) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q^k} &= \frac{\partial S_k}{\partial q^k} + \frac{\partial S_{k-1}}{\partial q^k} \\ &= -p^k - \frac{\partial H}{\partial q}(q^k, p^k)\Delta t + p^{k-1} - \frac{\partial H}{\partial q}(q^{k-1}, p^{k-1})\Delta t \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14.25)$$

$\Delta t = 0$  の極限では

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (14.26)$$

を得る。

また、 $p^k$  に依存するのは  $S_k$  だけなので、式 (14.24) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p^k} &= (q^{k+1} - q^k) - \frac{\partial H}{\partial p}(q^k, p^k)\Delta t \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14.27)$$

これから  $\Delta t = 0$  の極限では

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (14.28)$$

を得る。

式 (14.26) と (14.24) は正準方程式に他ならない。こうして正準方程式が修正ハミルトンの原理から導出された。

## 14.5 変分原理からのシンプレクティック積分法の導出

シンプレクティック積分法 SI01a [式 (13.9) と (13.10)] のアルゴリズムは、まず  $q$  を更新してから次に  $p$  を更新するというものであった。そこで試しに上の式 (14.19) において、 $t = t_k$  から  $t_{k+1}$  までの時間積分をするときの  $q$  と  $p$  の値を

$$q = q_{k+1}$$

$$p = p_k$$

としてみよう。すると

$$S_k = p_k (q^{k+1} - q^k) - H(q^{k+1}, p^k) \Delta t \quad (14.29)$$

となる。このとき、修正ハミルトンの原理から得られる式 (14.23) と (14.24) から以下を得る：

$$\frac{\partial S}{\partial q^k} = \frac{\partial S_k}{\partial q^k} + \frac{\partial S_{k-1}}{\partial q^k} = -p^k + p^{k-1} - \frac{\partial H}{\partial q}(q^k, p^{k-1}) \Delta t = 0 \quad (14.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p^k} = \frac{\partial S_k}{\partial p^k} = (q^{k+1} - q^k) - \frac{\partial H}{\partial p}(q^{k+1}, p^k) \Delta t = 0 \quad (14.31)$$

式 (14.30) で  $k \rightarrow k+1$  とすると

$$-p^{k+1} + p^k - \frac{\partial H}{\partial q}(q^{k+1}, p^k) \Delta t = 0 \quad (14.32)$$

まとめると

$$q^{k+1} = q^k + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p}(q^{k+1}, p^k) \quad (14.33)$$

$$p^{k+1} = p^k - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q}(q^{k+1}, p^k) \quad (14.34)$$

を得る。これは1次精度の陰的シンプレクティック積分法である。式 (14.33) には  $q^{k+1}$  が両辺に現れるので、この手法は陰的である。つまりこの方程式を何らかの方法で  $q^{k+1}$  について解いた上で次の式 (14.34) に移る必要がある。

ハミルトニアンが

$$H(q, p) = K(p) + U(q) \quad (14.35)$$

の形になっているときには式 (14.33) と (14.34) は

$$q^{k+1} = q^k + \Delta t \frac{\partial K}{\partial p}(p^k) \quad (14.36)$$

$$p^{k+1} = p^k - \Delta t \frac{\partial U}{\partial q}(q^{k+1}) \quad (14.37)$$

となり、陽的なアルゴリズムになる。これは一次陽的シンプレクティック積分法 SI01a そのものである。こうしてシンプレクティック積分法が変分原理（修正ハミルトンの原理）から導出された。



## 最後に

今年度の講義は以上です。最後に、この講義資料では（説明を分かり易くするため意図的に）省略した部分について述べます。

ラグランジアンが時間に陽に依存する場合

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

についてはほとんど述べませんでした。この場合にもラグランジュの運動方程式が使えます。

この講義では例題として質点の運動を中心に述べました。なお剛体の運動についても解析力学は使えます。簡単な例については Appendix A をご覧ください。

今回の講義ではラグランジュの運動方程式を天下り式に与え、そこを出発点としてシンプレクティック積分法を導出するところまで説明しました。変分法やハミルトンの原理（最小作用の原理）については最後の講義で紹介しました。変分原理からラグランジュの運動方程式と正準方程式を導出するには作用の離散化を経由する方法で述べました。これは数値積分法との関連を重視したためです。従って変分法の詳細（オイラー＝ラグランジュの方程式）については触れませんでした。また端点条件（特にハミルトンの原理と修正ハミルトンの原理における端点条件の違い）についても触れませんでした。このあたりについては Appendix B でごく簡単に述べました。



# Appendix A

## 剛体の運動

剛体とは、堅くて体積のある物体を理想化したものである。堅いので変形はしない。弾性変形を考えないので、剛体はたたいても音が出ない。質点の運動を考える時には、質点の位置をあらわす一般化座標だけを考えれば十分であったが、剛体の場合には、剛体内部の特定の点（たとえば重心）の位置を決めるだけではその剛体の力学的配置を決めるには不十分である。その点の周りに回転した配置が無数にあるからである。

ある剛体とその重心の周りに回転させるとき、その自由度は3である。硬直状態で斜めに立ったままの死体を北向きのベッドに寝かせるためには、

1. まずはその死体を床に横たえて（背筋を水平にして）
2. 仰向けにして（顔を上に向けて）
3. ベッドの向きにそろえる（北枕にする）

必要がある。剛体の配置は、重心の位置（3自由度）と回転（3自由度）の合計6自由度で記述される。

### A.1 角速度

剛体を、互いの距離が不変な質点の集まりと考えよう。静止座標系  $XYZ$  と剛体に埋め込まれた運動座標系  $xyz$  を考える。運動座標系  $xyz$  の原点  $O$  の静止座標系での位置を  $\mathbf{R}$  とする。

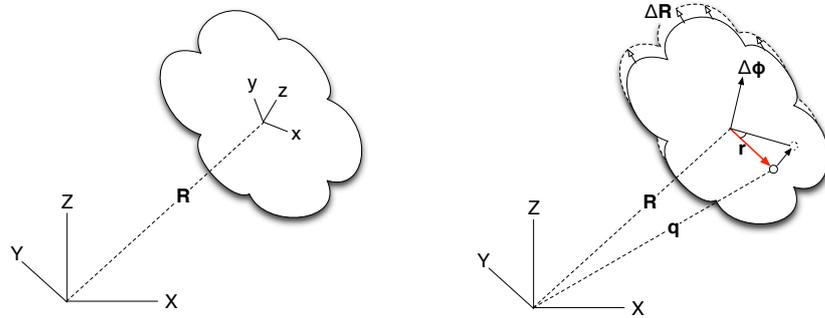
剛体の任意の無限小移動は、二つの部分からなる。一つは、無限小の平行移動であり、それによって剛体の重心は運動座標系の軸の方向を不変にしたまま移動する。もう一つは、重心の周りの無限小回転である。

剛体中の任意の点  $P$  の運動座標系でみた位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ 、同じ点  $P$  の静止座標系でみた位置ベクトルを  $\mathbf{q}$  とすると、点  $P$  の無限小変位  $d\mathbf{q}$  は、

$$\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{R} + \Delta\phi \times \mathbf{r}$$

と書ける。ここで  $\Delta\phi$  は無限小回転角である。微小時間  $\Delta t$  で割ると、

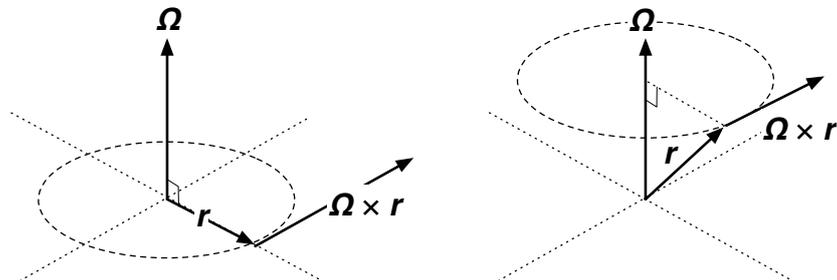
$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{A.1})$$



を得る。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\ \boldsymbol{\Omega} &= \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

を定義した。 $\mathbf{V}$  は剛体の並進運動の速度、 $\boldsymbol{\Omega}$  は剛体の回転角速度と呼ばれる。外積については下の図を参照。



## A.2 慣性モーメントテンソル

先週述べたように、剛体を質点の集まりと考え、その質点同士の距離が変わらないものとする。運動座標系の原点  $O$  が重心にあれば、定義から、

$$\sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n = 0 \quad (\text{A.2})$$

である。ここで  $n$  は全ての質点につけた整数のラベルである。

剛体の運動エネルギーを計算しよう。

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} v_n^2 = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \mathbf{v}_n^2 = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n \quad (\text{どれも同じ意味である}) \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \quad \text{【式 (A.1) より】} \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \left\{ V^2 + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_n) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \right\} \\
 &= \frac{\mu}{2} V^2 + (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n + \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \quad \text{【第2項の変形はすぐ下で説明】}
 \end{aligned}$$

ここで剛体の質量

$$\mu = \sum_{n=1}^N m_n$$

を定義した。また、第2項はベクトル解析の公式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

を使って変形した。式 (A.2) より、運動座標系の原点  $O$  を重心にとればこの第2項はゼロになる。第3項を以下の関係式

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\
 &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\} \quad (\text{上の公式で } \mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \text{ とする}) \\
 &= \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \quad (\text{別の公式 } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ を使う})
 \end{aligned}$$

を使って変形すると、(運動座標系の原点を重心にとった場合の) 剛体の運動エネルギーは

$$T = \frac{\mu}{2} V^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \left\{ \Omega^2 r_n^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_n)^2 \right\}$$

となる。第一項は剛体の並進運動エネルギー、第二項は剛体の回転運動エネルギーである。

剛体の回転運動エネルギー

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \left\{ \Omega^2 r_n^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_n)^2 \right\}$$

を別の形で表現してみる。この式で全ての質点について和をとる為の整数ラベル  $n$  を、この後の記述を少しだけ簡単にするために省略して、

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \right\}$$

と書こう。さて、座標  $\mathbf{r}$  等を成分で書くと、この式は、

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum m \{(\Omega_i \Omega_i)(x_\ell x_\ell) - (\Omega_i x_i)(\Omega_k x_k)\} \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_\ell x_\ell - \Omega_i \Omega_k x_i x_k) \quad (\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k \text{を使った}) \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_\ell x_\ell \delta_{ik} - x_i x_k) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$I_{ik} = \sum m (x_\ell x_\ell \delta_{ik} - x_i x_k)$$

を導入すると、剛体のエネルギーは、

$$T = \frac{\mu}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

という綺麗な形に書ける。剛体のラグランジアンは

$$L = \frac{\mu}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U$$

である。 $I_{ik}$  を慣性モーメントテンソル、あるいは単に慣性テンソルと呼ぶ。

定義から明らかなように  $I_{ik}$  は対称テンソルである。具体的な成分は以下の通りである。

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(z^2 + x^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

任意の (2 階) 対称テンソルは運動座標系  $xyz$  の軸の方向を適当に選ぶことで非対角成分をゼロにできる。そのような軸の方向は慣性主軸と呼ばれる。つまり、慣性主軸をとれば、慣性テンソルは

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$I_1 = \sum m(y^2 + z^2)$$

$$I_2 = \sum m(z^2 + x^2)$$

$$I_3 = \sum m(x^2 + y^2)$$

である。この  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  を主慣性モーメントと呼ぶ。このとき、回転の運動エネルギーは、

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

となる。

物体を連続体とみなせるときには、慣性テンソルは和ではなく、体積積分で書ける。

$$I_{ik} = \int \rho (x_\ell x_\ell \delta_{ik} - x_i x_k) dV$$

また、主慣性モーメントは

$$I_1 = \int \rho (y^2 + z^2) dV$$

$$I_2 = \int \rho (z^2 + x^2) dV$$

$$I_3 = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

ここで  $\rho$  は質量密度である。

同じ慣性モーメントを持つ二つの剛体はラグランジアンが同じなのでたとえ形状が全く異なっても同じ運動をする。質点の力学的な「個性」が質量  $m$  しかないように、剛体の力学的「個性」は質量  $\mu$  と主慣性モーメント  $I_1, I_2, I_3$  の4つしかないということである。

### A.2.1 円柱の慣性モーメント

質量密度  $\rho$  が一定の円柱（半径  $a$ 、高さ  $h$ ）の主慣性モーメントを求めよう。慣性主軸の原点は円柱の中心にある。高さの方向を  $z = x_3$  方向にとると、 $I_3$  は簡単で、

$$\begin{aligned} I_3 &= \rho \int (x^2 + y^2) dV \\ &= \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} R^2 R dR d\phi dz \quad (\text{ここで } R \text{ は円筒座標の半径。つまり } R^2 = x^2 + y^2) \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a R^3 dR \\ &= \rho 2\pi h \left[ \frac{R^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{\mu}{2} a^2 \quad (\text{ここで、質量 } \mu = \rho \pi a^2 h \text{ を使った}) \end{aligned}$$

次に  $I_1$  と  $I_2$  を求める。対称性から明らかに  $I_1 = I_2$  なので、

$$I_1 = \rho \int (y^2 + z^2) dV$$

と

$$I_2 = \rho \int (z^2 + x^2) dV$$

を足して、

$$\begin{aligned}
 2I_1 &= I_1 + I_2 \\
 &= \rho \int (x^2 + y^2 + 2z^2) dV \\
 &= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a (R^2 + 2z^2) 2\pi R dR dz \\
 &= 2\pi\rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a (R^3 + 2Rz^2) dR dz \\
 &= 2\pi\rho \left( \left[ \frac{R^4}{4} \right]_0^a h + [R^2]_0^a \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \right) \\
 &= 2\pi\rho \left( \frac{1}{4}a^4h + \frac{1}{12}a^2h^3 \right)
 \end{aligned}$$

結局、

$$I_1 = I_2 = \mu \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

である。

### A.3 角運動量

剛体の角運動量は各質点の位置を  $\mathbf{r}$ 、速度を  $\mathbf{v}$  とすれば、

$$\mathbf{M} = \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

と定義される。この値は、座標原点の位置に依存する。便利なのは、重心に原点を置くことである。このとき、

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \sum m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\
 &= \sum m \{ r^2\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \}
 \end{aligned}$$

これを添字を使って書くと、

$$\begin{aligned}
 M_i &= \sum m(x_\ell x_\ell \Omega_i - x_i x_k \Omega_k) \\
 &= \Omega_k \sum m(x_\ell x_\ell \delta_{ik} - x_i x_k) \\
 &= I_{ik} \Omega_k
 \end{aligned}$$

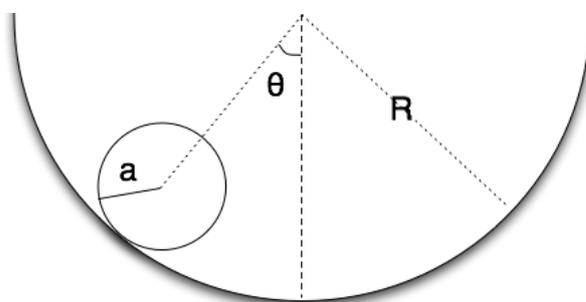
という簡単な式になる。 $x_1, x_2, x_3$  の方向を慣性主軸にとれば、

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3$$

となる。 $I_1 = I_2 = I_3$  の場合（たとえば球）以外では角運動量ベクトルと角速度ベクトルは必ずしも平行にはならない。

少し上で、「その軸に合わせてその剛体を回転すると、手にグラグラしない方向が慣性主軸である」と説明した。これは例えば  $\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 = \Omega_3 = 0$  とすると、 $M_1 \neq 0, M_2 = M_3 = 0$  となるという意味である。座標軸が慣性主軸でないと  $\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 = \Omega_3 = 0$  の場合でも  $M_2 \neq 0, M_3 \neq 0$  である。つまり慣性主軸でない座標系をとり、その  $x_1$  軸の周りに剛体を回転すると、 $x_2$  や  $x_3$  の方向にも角運動量が生じてしまう。手に持っているとき、グラグラする感覚を感じるであろう。

## A.4 練習問題



半径  $R$  の円柱（これを円柱  $R$  とする）の内側の面に沿って半径  $a$ 、長さ  $h$  の円柱を考える（これを円柱  $a$  とする）。円柱の質量密度は一定で、質量を  $\mu$ 、重力加速度  $g$  は一定で図の下向きとする。

- (1) 図の  $\theta$  を一般化座標としたラグランジュの運動方程式を導け。
- (2)  $|\theta| \ll 1$  の時、 $O(\theta^3)$  を無視すると、円柱  $a$  は周期的な運動を示し、その周期を求めよ。
- (3) さらに  $a \ll R$  の場合、即ち針金のように細い円柱  $a$  が円柱  $R$  の内側、底の近くで周期的な転がり運動をしている状態を考える。 $O(a/R)$  を無視した時（つまり  $a$  をゼロにした時）の周期を求め、その周期を（剛体ではなく）一つの質点が円柱  $R$  の底近くで摩擦無しで周期的に運動しているときの周期と比較せよ。

**ヒント** 円柱  $a$  の重心の並進運動の速さは

$$V = (R - a)\dot{\theta}$$

である。円柱  $a$  が回転する角速度は

$$\Omega = V/a = \frac{R - a}{a}\dot{\theta}$$

である。これは、ある瞬間、円柱 R と円柱 a の二つが接している点を軸に線分 a が回転している様子を想像すると納得できるであろう。また、円柱 a の軸のまわりの慣性モーメントは、今日の講義で示した通り、 $I_3 = \frac{\mu}{2}a^2$  である。また円柱 a のポテンシャルは、

$$U = -\mu g(R - a) \cos \theta$$

である。これは、円柱 a を構成する質点群のポテンシャルの和と考えればよい。

### A.4.1 解答

円柱 a の運動エネルギーは

$$T = \frac{\mu}{2}(R - a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} \frac{(R - a)^2}{a^2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\theta}^2$$

ここで、 $I_3 = \frac{\mu}{2}a^2$  を代入した。ポテンシャルは

$$U = -\mu g(R - a) \cos \theta$$

である。従って、この系のラグランジアンは

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \left\{ \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\theta}^2 \right\} - \{ -\mu g(R - a) \cos \theta \}$$

である。 $|\theta|$  が小さいとき、 $\cos \theta \sim 1 - \frac{1}{2}\theta^2$  より、このラグランジアンは

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\theta}^2 + \mu g(R - a) \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)$$

と近似できる。定数分を除くと、

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\mu g}{2} (R - a) \theta^2$$

となる。これからラグランジュの運動方程式は

$$3(R - a)\ddot{\theta} + 2g\theta = 0$$

すなわち

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R - a)}\theta$$

この微分方程式の解は  $c_1$  と  $c_2$  を積分定数として

$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2)$$

である。従って円柱 a は周期運動をする。ここで  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R - a)}}$  である。周期は、

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R - a)}{2g}}$$

である。

$a \ll R$  の場合、上の式で  $a = 0$  とおいて、

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

が周期である。これは、摩擦のない質点が円柱  $R$  の内側を滑るときの周期  $2\pi\sqrt{R/g}$  と比較すると  $\sqrt{3/2}$  倍大きい。これは（無視できるほど細いといえども）円柱  $a$  が転がりながら運動しているためである。



## Appendix B

# オイラー＝ラグランジュ方程式

汎関数

$$I(y, y', x) = \int_a^b L(y(x), y'(x), x) dx$$

が  $y = y(x)$  で極値をとる、つまり

$$\delta I = 0$$

が成り立つ条件を微分方程式で表そう。  $y(x)$  を

$$y(x) \rightarrow y(x) + \epsilon \eta(x)$$

と変えたときの汎関数  $I$  は

$$I(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) = \int_a^b L(y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x), x) dx$$

である。ここで、被積分関数を  $\epsilon$  でテーラー展開すると

$$L(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) = L(y, y', x) + \frac{\partial L}{\partial y} \epsilon \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} \epsilon \eta'(x) + O(\epsilon^2)$$

なので

$$\begin{aligned} I(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) &= \int_a^b L(y, y', x) dx + \epsilon \int_a^b \left( \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} dx + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx + O(\epsilon^2) \\ &= I(y, y') + \epsilon \delta I(y, y') + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_a^b L(y, y', x) dx \\ &= \int_a^b \left( \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx \end{aligned}$$

である。端点条件と呼ばれる条件

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

が成り立っている場合には、

$$\int_a^b \eta'(x) \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx = \left[ \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right]_a^b - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx$$

の右辺第一項はゼロになる。すると

$$\delta I = \delta \int_a^b L(y, y', x) dx = \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{\partial L}{\partial y} \right\} \eta(x) dx = 0$$

となり、任意の  $\eta(x)$  に対して変分  $\delta I = 0$  なので

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.1})$$

が成り立つ。これをオイラー＝ラグランジュの方程式という。

まとめると、 $y(a)$  と  $y(b)$  が固定という端点条件の下、汎関数

$$I(y, y', x) = \int_a^b L(y, y', x) dx$$

が極値をとる関数  $y(x)$  は、オイラー＝ラグランジュの方程 (B.1) を満たす。

関数が  $N$  個、 $y_i(x)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) あるときも同様である。 $y_i(a)$  と  $y_i(b)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) が固定という端点条件の下、汎関数

$$I(y_1, y_2, \dots, y_N, y'_1, y'_2, \dots, y'_N) = \int_a^b L(y_1, y_2, \dots, y_N, y'_1, y'_2, \dots, y'_N, x) dx$$

が極値をとる関数  $y_i(x)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) は、 $N$  個のオイラー＝ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

を満たす。

例として第 14.1.3 章の極小曲面を求めてみよう。関数  $y = y(x)$  を  $x$  軸の周りに回転してできる側面の面積を  $S$  とすると、

$$S(y, y') = \int_0^a y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

であった。

$$L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$$

とすれば、極小曲面は、オイラー＝ラグランジュの方程式 (B.1) の解である。実際に計算してみよう。

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ここまでは簡単。次が計算ミスしやすいので注意。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \\ &= \frac{y'^2 + yy''}{\sqrt{1+y'^2}} - \dots \end{aligned}$$

上の結果を、オイラー＝ラグランジュの方程式 (B.1) に代入し整理すると、

$$yy'' = 1 + y'^2 \quad (\text{B.2})$$

となる。なお、この微分方程式の解は双曲線関数  $y = \cosh(x)$  である。

ハミルトンの原理

$$\delta S = \delta \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}) dt = 0 \quad (\text{B.3})$$

と端点条件

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0 \quad (\text{B.4})$$

から得られるオイラー＝ラグランジュの方程式がラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

である。

また、相空間中の軌道  $q(t), p(t)$  が極値をとるという修正ハミルトンの原理

$$\delta S^* = \delta \int_{t_a}^{t_b} (p\dot{q} - H(q, p)) dt = 0 \quad (\text{B.6})$$

と端点条件

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0 \quad (\text{B.7})$$

から得られるオイラー＝ラグランジュの方程式が正準方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (\text{B.9})$$

である。汎関数  $S^*$  には  $p$  が現れないので、 $p$  に関する端点条件は不要である。