Chapter 3

ラグランジュの運動方程式

今回はいよいよラグランジュの運動方程式を紹介する。ニュートン力学では運動方程式の導出が難しい場合でも、ラグランジアンを使ったラグランジュの運動方程式ではいとも簡単に導出される不思議さを味わって欲しい。簡単のため、ここでは自由度が 1 の場合だけを考える。自由度が 2 以上になっても本質的には何も変わらない。これも解析力学が便利なところである。

今回の内容

3.0 レポート回収

3.1 前回の復習

3.2 ラグランジュの運動方程式

3.3 演習

3.1 前回の復習

- 自由度
- 一般化座標 q
- ポテンシャル：$\boldsymbol{F} = -\nabla U$
- ラグランジアン

3.1.1 ポテンシャル

鉛直上向きを x_3 方向とし、$-x_3$ 方向にかかる一様重力 $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$ のポテンシャルは

$$U(x_3) = mgx_3$$

である。

ポテンシャルは定数分だけ不定である。
バネ定数 k と自然長 ℓ_0 のバネが長さ ℓ のときにもつポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2}(\text{バネの伸び})^2 = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$$

である。

3.1.2 ラグランジアン

ラグランジアン L は、

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル}) = K - U$$

と書ける。一般化座標を q と書くと、L は q と $\dot{q}$ の関数

$$L(q, \dot{q})$$

である。
ある曲線に沿って質量 m の質点が動くとき、ある点から曲線に沿って測った距離を（符号つきで）一般化座標 q とすると、運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$

である。位置 q におけるポテンシャルが $U(q)$ とすると、この系のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

3.1.3 復習：合成関数の微分

f が g の関数で g が t の関数のとき、つまり

$$f = f(g(t))$$

のとき、

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

である。
【小演習】

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

を t で微分してみよう。
f が $q_1, q_2, \ldots, q_N$ の関数

$$f = f(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

で、N 個ある関数 q_i がそれぞれ時間 t の関数

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

であるとき、

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

である。

3.1.4 例題１：放物線に沿って動く質点

放物線

$$y = x^2 + 1$$

に沿って質量 m の質点が摩擦なしに滑る。原点と質点は自然長 0 のバネがつながれている。ばね定数を k とする。この系のラグランジアンを求めよう。一般化座標は質点の x 座標としよう。

【図： 放物線と原点。バネ＝（一つの）質点系。】

まずはポテンシャル U を求める。これは簡単。原点と質点の間の距離を ℓ とすると

$$U = \frac{k}{2}\ell^2 = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \frac{k}{2}\left\{x^2 + (x^2+1)^2\right\} = \frac{k}{2}(x^4 + 3x^2 + 1)$$

次に運動エネルギー K を求めよう。

$$K = \frac{m}{2}\dot{v}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

である。

【図】

$y = x^2 + 1$ だから、

$$\dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\dot{x}$$

従って

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 4x^2\dot{x}^2\right) = \frac{m}{2}\left(1 + 4x^2\right)\dot{x}^2$$

ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L(x,\dot{x}) &= K - U \\ &= \frac{m}{2}\left(1+4x^2\right)\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x^4 + 3x^2 + 1) \end{aligned}$$

3.2 ラグランジュの運動方程式

さあ、いよいよラグランジュの運動方程式を紹介しよう。一般化座標を q とし、自由度が 1 で、ラグランジアンが

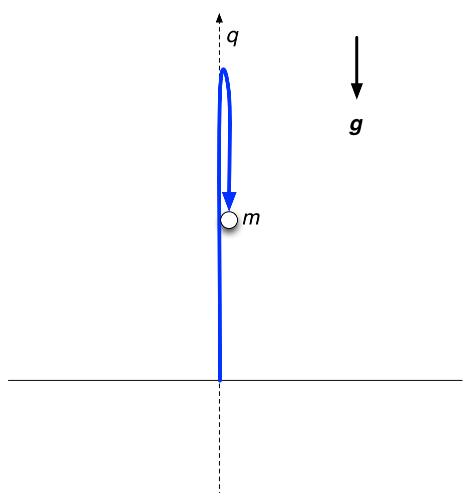
$$L(q, \dot{q})$$

の系に対する、ラグランジュの運動方程式は、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (3.1)}$$

である。なぜこれが運動方程式なのか？という当然の疑問はしばらくの間我慢して、今は具体的な例を通じてこの方程式に慣れていこう。

3.2.1 例：質点自由落下



鉛直上向きの座標を q としたときのラグランジアンは、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mgq$$

である。ラグランジュの運動方程式を立ててみよう。まず

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

を計算する。次に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}$$

に計算する。そして

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -mg$$

を計算する。これをラグランジュの運動方程式に代入すると

$$\{m\ddot{q}\} - \{-mg\} = 0$$

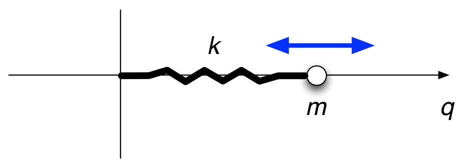
これがラグランジュの運動方程式である。

ちなみに、これはニュートンの運動方程式に一致する：

$$m\ddot{q} = -mg$$

3.2.2 例：調和振動子

一般化座標を q とすると、1 次元調和振動子系のラグランジアンは、



$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$$

である。ラグランジュの運動方程式を作ってみよう。まずは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

次に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}$$

も簡単である。そして、

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -kq$$

だから、ラグランジュの運動方程式は

$$\{m\ddot{q}\} - \{-kq\} = 0$$

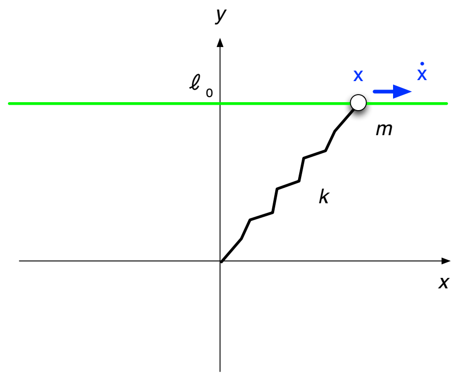
ここで、$k/m = \omega^2$ とすると

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

となる。この微分方程式の解はもちろん調和振動子

$$q(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2) \quad c_1, c_2\text{は定数}$$

である。



3.2.3 例：直線に拘束された質点

$y = \ell_0$ の上を滑らかに滑る質点の問題を考えよう。x-y 平面上に $y = \ell_0$ の直線がある。質量 m の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数 k で、自然長がちょうど ℓ_0 のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。一般化座標として、質点の x 座標を使うと、この系のラグランジアン $L(x, \dot{x})$ は

$$L(x,\dot{x}) = K - U = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+\ell_0^2} - \ell_0\right)^2$$

であった。

ラグランジュの運動方程式を作ってみよう。まずは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

次に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\,(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

次は、式が少しだけ長くなるが、計算は単純である。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= -k\left(\sqrt{x^2+\ell_0^2} - \ell_0\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell_0^2}} \\ &= -kx\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2+x^2}}\right)\end{aligned}$$

従って、ラグランジュの運動方程式は

$$\{m\ddot{x}\} - \left\{-kx\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2+x^2}}\right)\right\} = 0$$

$k/m = \omega^2$ とすると

$$\ddot{x} + \omega^2 x\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2+x^2}}\right) = 0$$

これは第一回目の講義でニュートンの運動方程式と全く同じである。ニュートン力学の方法では力の分解があるため、結構大変な手間をかけて導出したこの式が、解析力学では簡単に、極めて機械的に求めることができるのは印象的であろう。