

Chapter 10

ハミルトン形式の力学（2）

今回の内容

/// 事務連絡：来週休講

/// 前回の復習

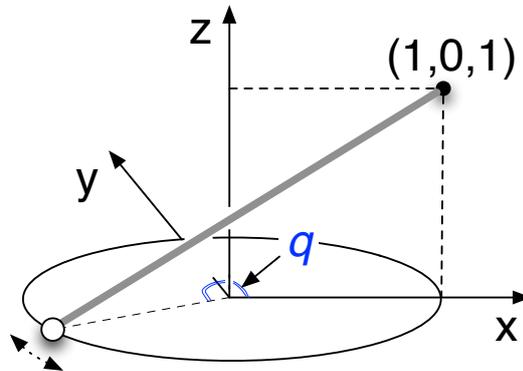
§10 ハミルトン形式の力学（2）

前回の復習

- ラグランジアンからハミルトニアンへ
- 正準変数
- 相空間
- 正準運動方程式

10.1 1自由度系の正準方程式の練習問題

10.1.1 例題 1



以前、ラグランジュの運動方程式で解いた問題を、ハミルトンの運動方程式で解いてみよう。

質量 m の質点が、原点を中心とする半径 1 の円 ($x^2 + y^2 = 1$) の上を滑る。この質点が、点 $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ とバネでつながれているときの運動を求める。重力はなく、摩擦は無視する。バネ定数は k 、自然長は 0 とする。

- 図のように x 軸との角度 q を一般化座標として、この系のラグランジアン $L(q, \dot{q})$ を求めよ。
- q に共役な運動量 p を求めよ。
- q と p を正準変数としたハミルトニアン $H(q, p)$ を求めよ。
- ハミルトンの運動方程式を書け。
- $|q| \ll 1$ の時の解を求めよ。

解

- (a) 運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2} \dot{q}^2$$

質点の座標は $(x, y, z) = (\cos q, \sin q, 0)$ なので、バネの長さを ℓ とすると

$$\ell^2 = (\cos q - 1)^2 + \sin^2 q + 1 = 3 - 2 \cos q$$

だからポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{k}{2} \ell^2 = \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

である。

(b)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

(c) ラグランジアンをルジャンドル変換して、

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

つまり、この系のハミルトニアン H は

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (3 - 2 \cos q)$$

である。 $H = K + U$ であることに注意しよう。

(d)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{10.1}$$

と

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k \sin q \tag{10.2}$$

の2つが正準方程式である。

(d) $|q| \ll 1$ のとき $\sin q \sim q$ だから、(10.2) は

$$\dot{p} = -kq$$

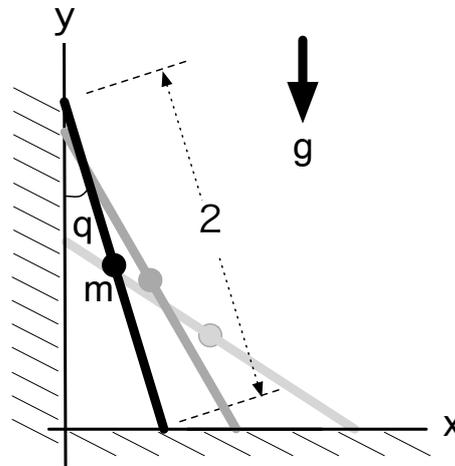
となる。式 (10.1) を時間微分した式にこれを代入すると、

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

を得る。ここで $\omega^2 = k/m$ である。従って解は

$$q(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2)$$

c_1 と c_2 は定数。



10.1.2 例題 2

これも以前、ラグランジュ形式で解いた問題である。

長さ 2 の重さのない棒の中心に固着した質量 m の質点がある。鉛直下方の一定重力（重力定数 g ）の下、この棒を壁に（斜めに）立て掛けた。床面に沿って x 軸、壁面に沿って y 軸をとる。棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないように（摩擦なしで）滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。棒と壁のなす角度 q を正準座標とする。

- ラグランジアン $L(q, \dot{q})$ を書け。
- q に共役な運動量 p を書け。
- p と q を正準変数としたハミルトニアン $H(q, p)$ を書け。
- 正準運動方程式を書け。
- $q \ll 1$ の時の解を求めよ。

解答

- 質点の位置を (x, y) とすると

$$(x, y) = (\sin q, \cos q)$$

速度は

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\cos q \dot{q}, -\sin q \dot{q})$$

である。棒は質量を持たないので、この系の運動エネルギー K は、質点だけが持っている。従って、

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$

同様に棒はポテンシャルを持たないので、系のポテンシャル U は、質点の重力ポテンシャル

$$U = mgy = mg \cos q$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - mg \cos q$$

である。

(b)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

(c) ルジャンドル変換により

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + mg \cos q$$

(d)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = mg \sin q \end{aligned}$$

(e) $|q| \ll 1$ の時、 $\sin q \sim q$ より、正準方程式は

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= mgq \end{aligned}$$

となる。この2つの式から

$$\ddot{q} = gq$$

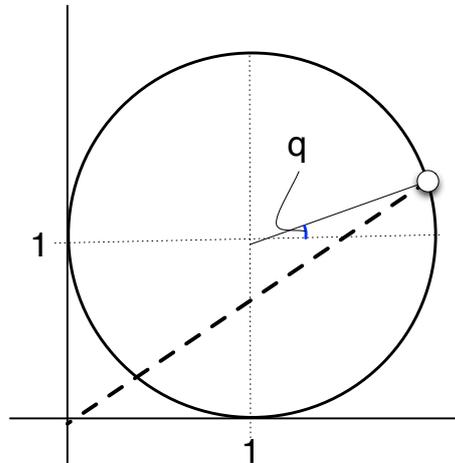
この解は c_1 と c_2 を定数として

$$q(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t} + c_2 e^{-\sqrt{g}t}$$

と書けるが、このうち、自然な（棒が倒れていく）解は $c_2 = 0$ 、つまり

$$q(t) = c_1 e^{\sqrt{g}t}$$

である。棒が倒れるとき、角度が \sqrt{g} の成長率で指数関数的に増大することを意味する。



10.2 練習問題

10.2.1 問題 1

x 軸と y 軸に接する半径 1 の円周上を質量 m の質点が滑らかに滑る。原点と質点はバネ (ばね定数 k 、自然長 0) で結ばれている。図のように x 軸となす角度 q を正準座標とする。

(1-1) この系のハミルトニアン $H(q, p)$ を導出せよ。

(1-2) この系の正準方程式を書け。

(1-3) 質点の運動について考察せよ (ヒント: 振り子)。

10.2.2 解答

(1-1) 質点の速度は \dot{q} 、運動エネルギーは $m\dot{q}^2/2$ 、バネのポテンシャルは

$$U(q) = \frac{k}{2} \{(1 + \cos q)^2 + (1 + \sin q)^2\}$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - k \left(\cos q + \sin q + \frac{3}{2} \right)$$

定数 $3k/2$ は省略して、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - k (\cos q + \sin q)$$

としても構わない。これから、 q に共役な運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

従って、ハミルトニアンは

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + k(\cos q + \sin q)$$

あるいは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \sqrt{2}k \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \quad (10.3)$$

等としてももちろん構わない。

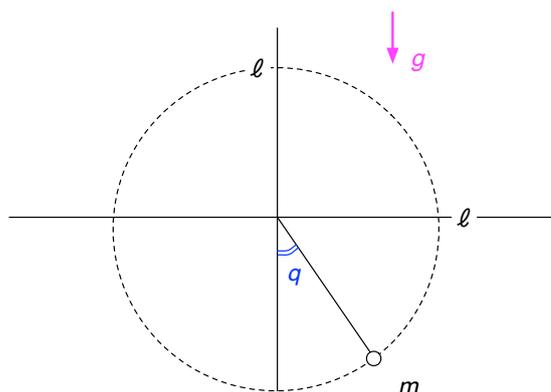
(1-2) 正準方程式は

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (10.4)$$

$$\dot{p} = k(\sin q - \cos q) \quad (10.5)$$

である。

(1-3) $q = 5\pi/4$ 方向に重力加速度のある系での振り子の運動と同じである。一



様重力 g の下で半径 ℓ の円上を滑らかに滑る質量 m の質点の運動を考える。(つまり長さ ℓ の糸による振り子の運動。) 図のように角度 q をとり、 $p = m\ell^2\dot{q}$ とするとこの系のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg \cos q \quad (10.6)$$

正準方程式は

$$\dot{q} = \frac{1}{m\ell^2} p \quad (10.7)$$

$$\dot{p} = -mg \sin q \quad (10.8)$$

である。2つのハミルトニアン (10.3) と (10.6) を比較すると、バネの問題のハミルトニアン (10.6) は、一様重力下の振り子のハミルトニアン (10.3) を $l \rightarrow 1$ 、 $k \rightarrow \sqrt{2}k$ として $q \rightarrow q + 5\pi/4$ と変換した場合に相当することが分かる。つまり、 x 軸から $5\pi/4$ 方向に $\sqrt{2}k$ の重力加速度がある場合の振り子の運動と同じである。

10.2.3 問題 2

ラグランジアン $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$ の系について、

(2-1) ハミルトニアン $H(q, p)$ を書け。

(2-2) 正準運動方程式を書け。

(2-3) $q(0) = p(0) = 1$ の初期条件の下で $q(t)$ と $p(t)$ をそれぞれ解け。

10.2.4 解答

(2-1) ラグランジアン

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$$

から q に共役な正準運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q + \dot{q}$$

である。したがってハミルトニアン H は、 L をルジャンドル変換して

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \\ &= p(p - q) - \frac{1}{2}p^2 \\ &= \frac{p^2}{2} - pq \end{aligned}$$

(2-2) 正準方程式

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

に上のハミルトニアン $H(q, p)$ を代入すると、

$$\dot{q} = p - q \tag{10.9}$$

と

$$\dot{p} = p \tag{10.10}$$

の二つが求める正準方程式である。

(2-3) 式 (10.10) の解は、

$$p(t) = ce^t$$

である。ここで c は定数。初期条件 $p(0) = 1$ より、 $c = 1$ 、つまり

$$p(t) = e^t$$

が $p(t)$ の解である。次に式 (10.9) を解く。

$$q(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad (10.11)$$

と置くと、初期条件 $q(0) = 1$ より

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (10.12)$$

また式 (10.9) より

$$\dot{q}(0) = p(0) - q(0) = 1 - 1 = 0$$

一方、式 (10.11) より $\dot{q}(0) = c_1 - c_2$ だから

$$c_1 - c_2 = 0 \quad (10.13)$$

式 (10.12) と (10.13) より、

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

である。従って

$$q(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$$

である。まとめると

$$\begin{aligned} q(t) &= \cosh t \\ p(t) &= e^t \end{aligned}$$

が求める解である。

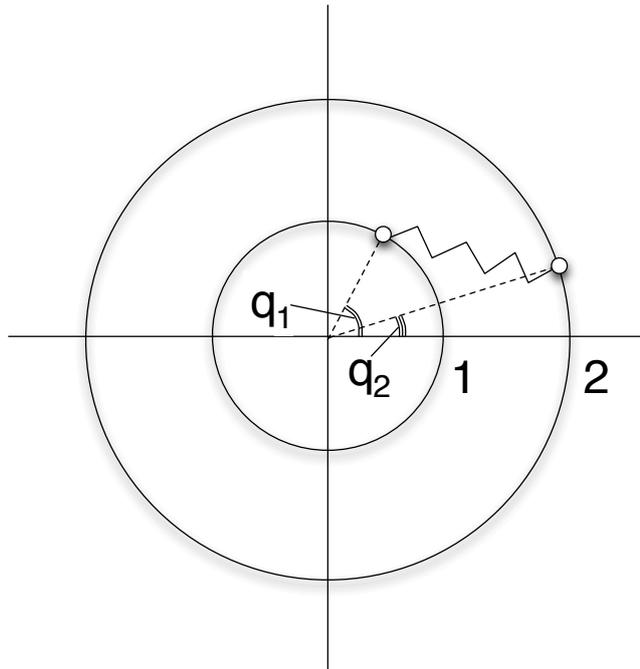
10.3 2自由度系の例

質量 m の質点が二つ、それぞれ半径 1 と半径 2 の円（中心を共有）の上を滑らかに滑る。二つの質点の間がバネ（バネ定数は k 、自然長は 0）でつながれているものとする。二つの円の中心を原点にとり、 x 軸からの角度 q_1 と q_2 を正準座標とする。二つの質点間の距離 ℓ は

$$\ell = \sqrt{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)} \quad (10.14)$$

なので、バネのポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2} \{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)\}$$



である。

この系のラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m}{2} (2\dot{q}_2)^2 - \frac{k}{2} \ell^2(q_1, q_2)$$

である。ここで ℓ は式 (10.14) である。

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 \quad (10.15)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 4m\dot{q}_2 \quad (10.16)$$

を使ってルジャンドル変換すると、

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \dots = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} + \frac{k}{2} \{5 - 4 \cos(q_1 - q_2)\}$$

である。上のハミルトニアンも

$$H = K + U$$

つまり全エネルギーであることは容易に確認できる。

定数部分の $5k/2$ は正準方程式には寄与しないので無視すると、この系のハミルトニアンは

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} - 2k \cos(q_1 - q_2) \quad (10.17)$$

である。正準方程式は、以下の4つの式である。

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad (10.18)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{4m} \quad (10.19)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2k \sin(q_1 - q_2) \quad (10.20)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2k \sin(q_1 - q_2) \quad (10.21)$$

この(10.18)から(10.21)は、左辺が4つの正準変数の時間微分、右辺が正準変数の関数となっているので、そのまま数値積分ルーチンに移すのは簡単である。

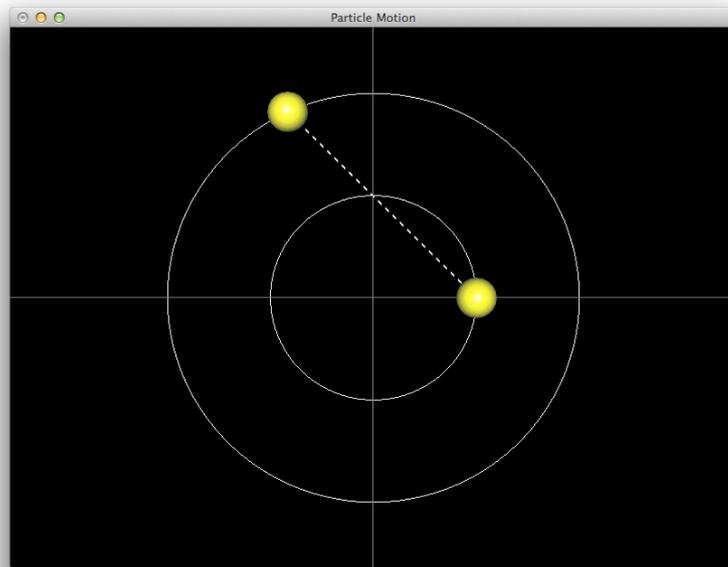
10.4 プログラム例

これまで使っていた4次ルンゲ=クッタ法のプログラムを少し変えてみた(two_particles_on_cocentered_rings_rk4.cpp)。変更したのは本質的には次の運動方程式部分だけである。

Listing 10.1: lagran_eq_motion_sample00_rk4.cpp

```

1 void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
2 {
3     //      Hamiltonian
4     //      H(q1, q2, p1, p2) = p1^2/2 + p2^2/8 + (1/2)*(5-4*cos(q1-q2))
5     //      dq1/dt = p1
6     //      dq2/dt = p2/4
7     //      dp1/dt = -2*sin(q1-q2)
8     //      dp2/dt = 2*sin(q1-q2)
9     //
10    double q1 = pos[0];
11    double p1 = pos[1];
12    double q2 = pos[2];
13    double p2 = pos[3];
14
15    dpos[0] = ( p1 ) * dt;
16    dpos[1] = ( -2*sin(q1-q2) ) * dt;
17    dpos[2] = ( p2/4 ) * dt;
18    dpos[3] = ( +2*sin(q1-q2) ) * dt;
19 }
```



10.5 正準方程式のイメージ

1自由度系のハミルトニアン $H(q, p)$ を考えよう。これは2次元相空間 (q, p) のスカラー場である。系の状態は、相空間中の点 (q_0, p_0) で指定される。正準方程式はこの相空間中の点 (状態) の動き方を定める。

相空間 q - p 中の $H(q, p)$ の勾配 (gradient) ベクトルを考えてみよう。

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

である。以前説明したように (ベクトル解析で習ったように)、このベクトルはその点で H が最も増大する方向を指している。さて、正準方程式をまとめて

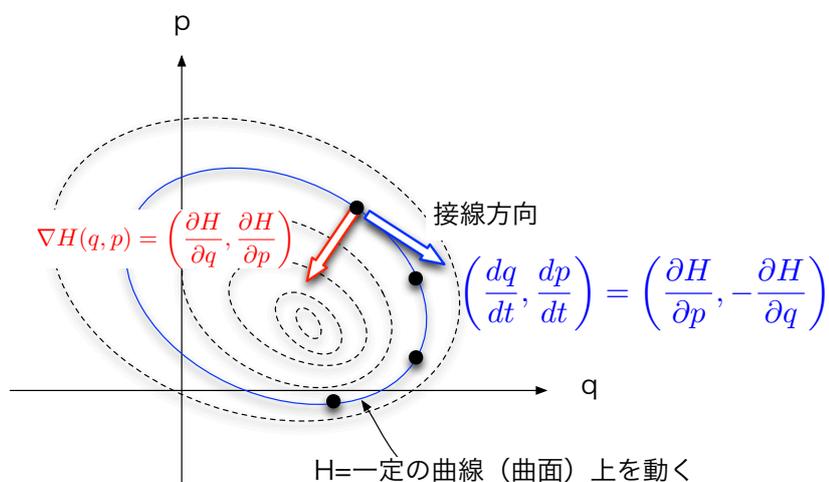
$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

と書いてみよう。上の式から、相空間中を動く点の速度ベクトル

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

と、勾配ベクトル ∇H の内積がゼロ

$$\mathbf{u} \cdot \nabla H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$



つまり直交することがわかる。系は相空間中を常に $H(q, p)$ の等高線の接線方向に動く。従ってその等高線からはずれることはない。これはエネルギー保存則を意味する。多自由度系についての同様な議論が成り立つ。

10.6 リウヴィルの定理

【ここでは流体力学を学んだことのある学生を想定した説明をしている。流体力学をまだ履修していない学生は読み飛ばしてよい。】 N 自由度系の相空間中に点(状態)がぎっしり無数に分布している様子を思い浮かべよう(まるで水の分子のように)。この「水」の相空間(= $2N$ 次元空間)中の流れを考える。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \\ u_{N+2} \\ \vdots \\ u_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_N \end{pmatrix}$$

は非圧縮である。なぜならこの $2N$ 次元空間中のこの流れの ($2N$ 次元の) 発散をとると

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_{N+j}}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるからである。従って相空間中の流れに乗って動く微小な部分は変形しても体積が変わらない。これをリウヴィルの定理という。

