Chapter 2

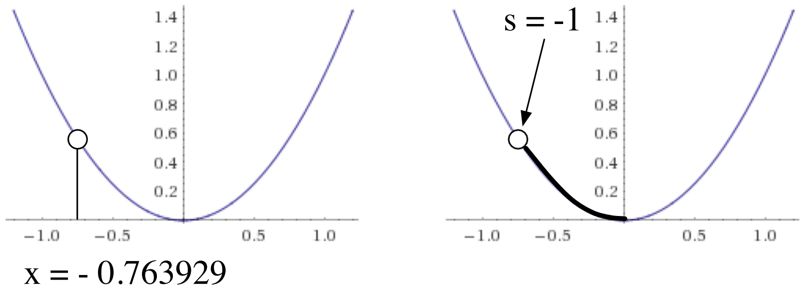
ラグランジアン（Lagrangian）

今回の内容

1. 前回の復習
2. 準備
3. ラグランジアン
4. レポート課題

前回の復習

- ニュートン力学から解析力学へ
- ニュートン力学は不便（力の分解など）
- 簡単な問題なのに運動方程式がわからない
- （もちろん解けない）
- 解析力学の運動方程式（複数）
- 運動方程式は簡単に作ることができる
- だが解析的に解けない場合が多い
- 計算機シミュレーション
- 解析力学は計算機シミュレーションの基礎にもなっている



2.1　座標と自由度

2.1.1　座標の表示と自由度

3 次元空間のカーテシアン座標は

$$(x, y, z)$$

と書いたり、

$$(x_1, x_2, x_3)$$

と書いたりする。添字を使って

$$x_j \ (j = 1, 2, 3)$$

と書くこともある。

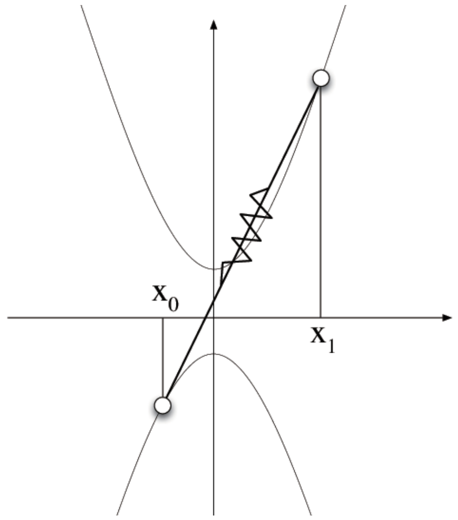
解析力学で使う座標系はカーテシアン座標系とは限らない。それぞれの問題に応じて便利な座標系を自由にとることができる。もちろん球座標や、円筒座標というカーテシアン以外の「普通の」座標系でもいいが、もっと自由で便利な座標をとってよい。

たとえば、一つの質点の運動を考えている場合、その質点の位置が指定できるなら、どんな座標をとってもいい。x-y 平面上の放物線 $y = x^2$ 型のレールの上に拘束された（このレール上を滑って動く）質点を考えると、この質点の運動は x 座標（だけ）を指定すれば一意に決まる。（y 座標では無理だが。）あるいは原点を出発点としてレールに沿った符号付きの長さ s を座標としても良い。たとえば $s = -1$ というのは原点から x 軸の負の方向に向かって 1 だけ滑った位置とする。こうすると s という実数を一つ指定すれば質点の位置は一意に決まる。このような場合、「この系の自由度は 1 である」という。自由度が 1 のこの系の「状態」は x 座標で示してもよい。

一つの質点が 3 次元空間中を 3 次元的な力のポテンシャルの下で運動する時、この系の自由度は 3 である。しかし、この質点が何らかの拘束条件の下で運動する時には、系の自由度は 1 または 2 になる。自由度が 1 の例は、上に書いたように曲線上に拘束されて動く質点であり、自由度が 2 の系の例はある曲面上に拘束されて動く質点である。

自由度が 2 の別の例は、先週の講義で例としてあげた二つの放物線に沿って動く二つの質点（その間がバネで結ばれているもの）の系である。この系の空間的な配置を記述する座標の一つの例は図に示した (x_0, x_1) である。二つの実数を

使って二つの質点の位置が一意に指定できるのであればどのような座標を使っても良い。たとえばそれぞれの放物線に沿った（符号付きの）長さを使った (s_0, s_1) も座標の例である。



二つの質点が 3 次元空間中を何も拘束されていない条件の下で運動するときの自由度は 6 である。

要するにその系の状態を記述するのに必要な実数変数の数がその系の自由度である。その系を記述するのに必要な変数を**一般化座標**という。

解析力学が便利なのは、どんな一般化座標系をとっても方程式の形が同じ になるからである。上の例で言えば、（これから紹介する）ラグランジュの運動方程式で書くと、質点（質量を m とする）の運動方程式は、

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad \text{（}x\text{ に関する 2 階の微分方程式）}$$

と書ける。また、

$$F(s, \dot{s}, \ddot{s}) = 0 \quad \text{（}s\text{ に関する 2 階の微分方程式）}$$

とも書ける。ここでポイントは、上の二つの $F = 0$ という微分方程式は、（中に入っている変数は x と s で異なっていても）微分方程式の形として全く同じであるということである。ニュートン力学ではこうはいかない。

ある系に対して、ある瞬間のスナップ写真をとった時、その系のその瞬間における「状態」を記述するのにいくつの実数が必要なのかというその数が系の自由度である。だが正確に言えばスナップ写真だけでは、その瞬間のその系その「状態」を完全には記述できない。その瞬間の後、系がどう変化するか（質点の場合にはどの方向にどの速さで動くか）という情報、つまり速度の情報が必要である。

2.1.2 速度

1 次元空間中に質点 P が時刻 t に位置 $x(t)$ にあるとき、P の速度は

$$v = \frac{dx}{dt}$$

である。微分の表記を簡潔にするために、これを

$$v = \dot{x}$$

とも書く。同様に表記の簡潔さのために、2 階微分

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

は

$$\ddot{x}$$

と書く。3 次元空間中の速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v}$$

と書く。速度の成分を

$$v_i = \dot{x}_i$$

と書く。質点 m、速度 $\boldsymbol{v}$ の質点がもつ運動エネルギー K は、1 次元では

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

3 次元では

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j^2$$

と書ける。

2.1.3 ベクトルとその成分

上に述べたとおりベクトルの成分は

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

と書いたり、

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

と書いたりする。二つのベクトルの内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j$$

と書ける。

2.2 準備

2.2.1 万有引力と重力加速度

万有引力は質量をもつ物質全てが持つ引力である。その物質からの距離の -2 乗に比例する（逆自乗力）。地球表面にいる我々が感じる地球重力は、地球内部の物質全体が生み出す万有引力の総和である。その総和は地球の中心の一点に全物質（質量）が集中した時に生み出す質点の作る重力と等しくなる。（これがなぜかは面白い問題であるが、いまは追求しない。）従って、地球中心からの半径を r とすると、その位置の重力の強さは

$$f(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

である。ここで

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{s}^{-2}$$

は万有引力定数、

$$M = 5.97 \times 10^{24} \mathrm{kg}$$

は地球の質量である。

地球半径は

$$R = 6.38 \times 10^6 \mathrm{m}$$

である。従って

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{6.67 \times 5.97}{6.38^2} \times 10^1 \sim 9.8 \mathrm{m/s}^2$$

これがこの講義にも頻繁に出てくるおなじみの重力加速度 g である。

2.2.2 ポテンシャル

力 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャル U は

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U$$

で定義される。∇ の意味：山登り。頂上の方向。等高線と勾配。

【2 次元の図。3 次元の図】

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

バネのポテンシャル

ばね定数 k、自然長 ℓ_0 のバネ。質量 m の質点が x 軸に沿って動く。

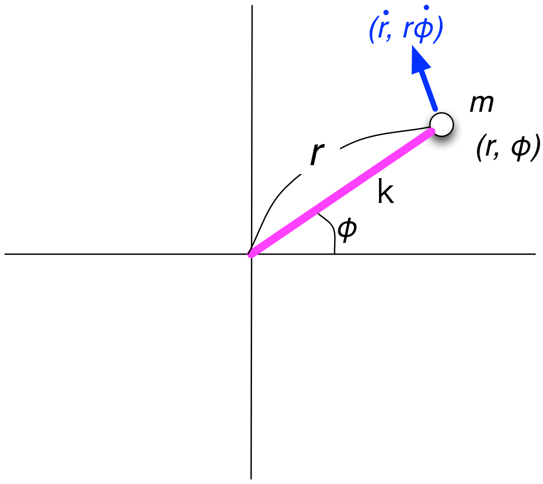
$$F_x = -k(x - \ell_0) \tag{2.1}$$

だからポテンシャルは

$$U(x) = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2 \tag{2.2}$$

である。確認せよ。

調和振動子系



調和振動子系を考える。極座標 (r, ϕ) をとる。力は原点に向かう方向で、原点からの距離 r に比例する。ポテンシャルは

$$U(r) = \frac{k}{2}r^2 \tag{2.3}$$

である。

一様重力のポテンシャル

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg)$$

$$U(x, y, z) = mgz$$

$$U(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

逆自乗重力のポテンシャル

$$F_i = -GMm\frac{x_i}{r^3}$$

$$U = -GMm\frac{1}{r}$$

ちなみに、覚えておくと便利な式：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}r^n = nr^{n-1}\frac{x_i}{r}$$

2.3 ラグランジアン

2.3.1 解析力学のさまざまな道筋

この講義では、天下り式にラグランジアンという関数を導入し、そして、やはり何の根拠もなく、「ラグランジュの運動方程式はこういうものである」、といって半ば強引に、多数の例題を通じてこれらの概念と使い方に慣れてもらうという方針をとる。いわば習うより慣れろ、というわけである。これまでの講義の経験では、このようなやり方でラグランジュの運動方程式の導出の仕方に十分慣れていく過程で、学生諸君は「どうしてこれが正しい運動方程式になっているのだろう？」という（当然の）疑問が次第に成長していく。その後に「最小作用の原理」を知れば、ラグランジュの運動方程式のいわば「根拠」としてある程度得心するようになる。

逆に、最小作用の原理から出発して変分法（オイラー＝ラグランジュの方程式）を介してラグランジュの運動方程式を導出する方が説明の仕方としては綺麗であるが、初学者がすんなり納得できるとは限らないと思う。

2.3.2 ラグランジアンとは

というわけで、ここで唐突に「ラグランジアン」という関数を導入する。ラグランジアンは

ラグランジアン＝（運動エネルギー）－（ポテンシャル）

である。ラグランジアンを L、運動エネルギーを K、ポテンシャルを U と書けば、

$$L = K - U$$

である。

2.3.3 質点の投げ上げ問題

ラグランジアンを具体的に作ってみよう。鉛直上向きに z 軸をとる。質量 m の質点を真上に投げ上げたときの運動を考える。時刻 t の質点の位置を $z = z(t)$ とすると、質点の速度は $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ である。従って この系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

ポテンシャルは、

$$U = mgz$$

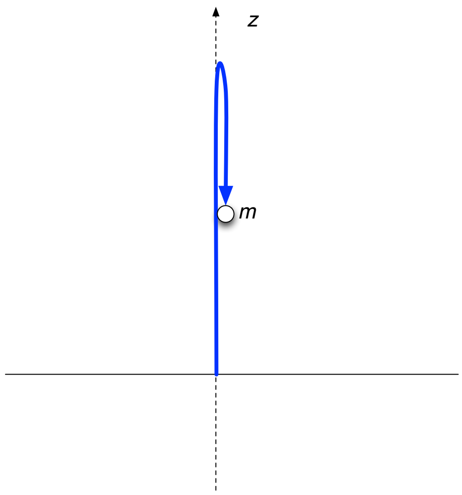
である。この系のラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

である。

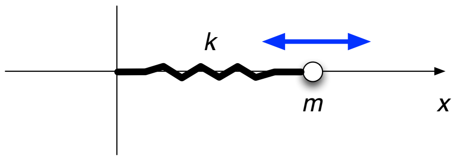
ラグランジアンの次元はエネルギーの次元と同じ（SI 単位系ではジュール（J））である。ラグランジアンは数値ではなく、関数であることに注意しよう。具体的には、今の場合、z 座標と z 方向の速度 $\dot{z}$ の関数である。

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz \tag{2.4}$$



2.3.4 直線上の線形バネ

次に x 上を動く質点の線形バネ（自然長 ℓ_0, バネ定数 k）による振動運動を考えよう。質点の座標を x とすると速度は $\dot{x}$ $(= dx/dt)$ である。この系の運動エネ



ルギー（=質点の運動エネルギー）は

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

である。この系のポテンシャル（=バネのポテンシャル）は

$$U = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

である。従って、この系のラグランジアン L は

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

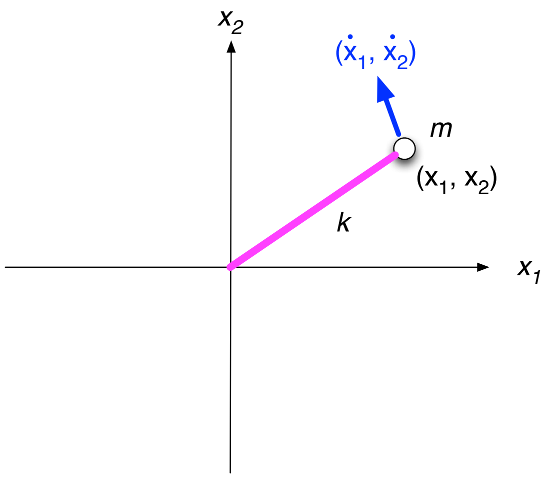
である。バネの自然長が 0 なら

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

となる。

2.3.5 調和振動子

次に自由度が 2 の系を考えてみよう。x_1-x_2 平面で調和振動子系を考える。つまりバネ定数 k、自然長 $\ell_0 = 0$ の線形バネが、質量 m の質点と、そして他端が原点に固定されている。質点の位置座標を (x_1, x_2) とすると、質点の速度は $(x_1(t), x_2(t))$



である。系の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\,(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

ポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2}\,(x_1^2 + x_2^2).$$

従ってこの系のラグランジアンは

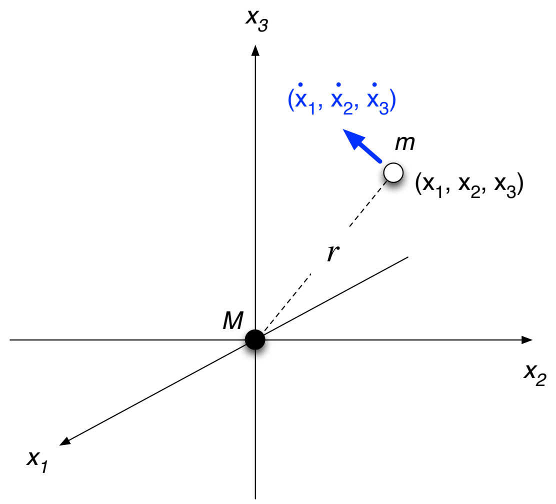
$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\,(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.5}$$

である。

2.3.6 万有引力

次に万有引力（逆自乗力）の下での質点の運動を考えよう。原点に質量 M の太陽がある。太陽は動かないとする。太陽の引力の下での質量 m の地球（質点）の運動を考える。カーテシアン座標系 x_1-x_2-x_3 を使って、地球の位置を座標 (x_1, x_2, x_3) と書く。すると速度は $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ である。地球の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j$$



重力のポテンシャルは

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j x_j}}$$

であるここで G は万有引力定数

$$G = 6.67384 \times 10^{-11} \quad (\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}})$$

である。従って、この系のラグランジアン L は

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m}{2}\dot{x}_j \dot{x}_j + \frac{GMm}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j x_j}}$$

である。

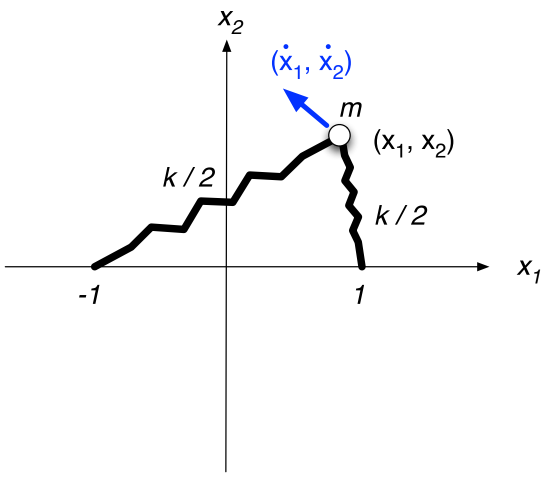
2.3.7 バネが二つある場合

2.3.5 章で x_1-x_2 平面上のバネ質点系を考えた。今度は、質点が二つのバネに質点（質量 m）がつながれている場合を考えてみよう。バネを二つにするのでバネ定数は半分の $k/2$ としてみる。自然長 0 のままとする。一方のバネの端は x_1 軸上の点 $(x_1, x_2) = (-1, 0)$ に固定されており、もう一方のバネの端は $(x_1, x_2) = (+1, 0)$ に固定されているものとする。質点の位置を (x_1, x_2)、速度を $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ とすると、系の運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$$

である。これは以前と変わりない。一方、系のポテンシャル U は、二つのバネのポテンシャル

$$U_1 = \frac{k}{4}\left\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2\right\}$$



と

$$U_2 = \frac{k}{4}\left\{(x_1+1)^2 + x_2^2)\right\}$$

の和である。従って

$$U = \frac{k}{2}\left[\left\{(x_1-1)^2 + x_2^2)\right\} + \left\{(x_1+1)^2 + x_2^2)\right\}\right]$$

である。従ってこの系のラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{4}\left[\left\{(x_1-1)^2 + x_2^2)\right\} + \left\{(x_1+1)^2 + x_2^2)\right\}\right] \tag{2.6}$$

である。

ニュートン力学では、「力ベクトル」とか「加速度ベクトル」というベクトル量が基本的な役割を果たす。そのために力（ポテンシャル）の源が複数ある時には解法が複雑になることが多い。ベクトル量が基本だと、ベクトルの成分を分解して考える必要があり、そのために計算が煩雑になることが多い。一方、解析力学では、ラグランジアンというスカラー関数が基本的な役割を果たす。ラグランジアンの構成に必要なポテンシャルは、複数の源があってもそれを単に足せばいいだけなので、計算は簡単である。

2.3.8 ラグランジアンの比較

一つだけのバネが原点につながれたときのラグランジアン (2.5) と、上のラグランジアン (2.6) を比べてみよう。見やすいようにここにもう一度書くと、一つのバネだけの時のラグランジアンは

$$L_a(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{2.7}$$

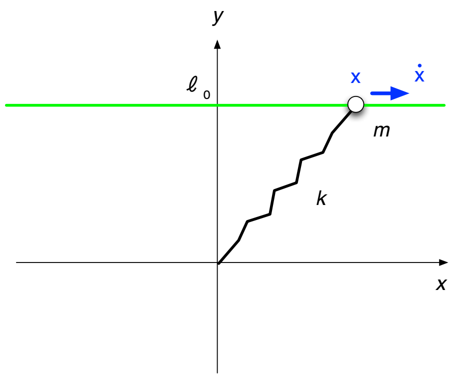
であった。バネが二つの時のラグランジアン (2.6) を整理すると、

$$L_b(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{k}{2} \tag{2.8}$$

である。この二つのラグランジアンは定数 $\frac{k}{2}$ だけの差しかない。これは「二つの系は本質的に同じ」ということを意味する。つまり質点はどちらも同じ運動をする。どうしてそう言えるかというと、次回紹介する「ラグランジュの運動方程式」を見れば自明となる。なぜなら、ラグランジュの運動方程式の中でラグランジアンは常に微分した関数が使われるので、ラグランジアンが定数分だけ変わってもラグランジュの運動方程式には全く影響しないからである。

2.4 演習とレポート

2.4.1 演習



x-y 平面上に $y = \ell_0$ の直線がある。質量 m の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数 k で、自然長がちょうど ℓ_0 のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。質点の x 座標と x 方向の速度 $\dot{x}$ を使い、この系のラグランジアン $L(x, \dot{x})$ を書け。

2.4.2 解答

運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

であり、ポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$$

である。ここで

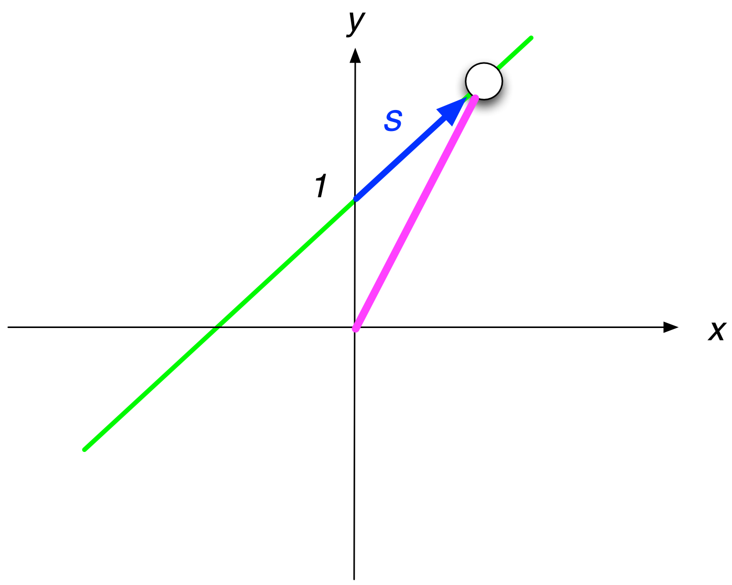
$$\ell = \sqrt{x^2 + \ell_0^2}$$

だから、ラグランジアンは

$$L(x,\dot{x}) = K - U = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\,\left(\sqrt{x^2+\ell_0^2} - \ell_0\right)^2$$

である。U に出てくる 2 乗の部分を展開しても構わない。

2.4.3 挑戦課題



x-y 平面上の直線 $y = x + 1$ がある。質量 m の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数 k で、自然長 ℓ_0 がゼロ（$\ell_0 = 0$）のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。直線と y 軸との交点からの（符号付きの）距離を s を座標として質点の位置を表現する。この系のラグランジアン $L(s, \dot{s})$ を書け。