Chapter 3

ラグランジュの運動方程式（続き）

今回の内容

/// 前回の復習

/// note（近似）

3.3 ラグランジュの運動方程式（演習）

3.5 多自由度系

/// レポート課題

前回の復習

- ラグランジュの運動方程式

自由度が 1 で、一般化座標が q のラグランジアン

$$L(q, \dot{q})$$

に対する、ラグランジュの運動方程式は、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (3.1)}$$

Note: 微小量があるときの便利な近似式

微小量を扱うときに知っておくと便利な近似式をここで復習しておく。x の関数 $f(x)$ のテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

を使うと、実数 α と $|x| < 1$ に対する一般二項定理

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots$$

を得る。ランダウのオーダー記号 $\mathcal{O}$ を使うと

$$(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\,\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

なので、ϵ が微小な時、つまり $|\epsilon| \ll 1$ ならば $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ を無視して

$$(1+\epsilon)^\alpha \sim 1 + \alpha\,\epsilon \tag{3.2}$$

と近似できる。これは便利な近似式である。

いくつか例を挙げる。

$$(1+\epsilon)^2 \sim 1 + 2\epsilon \tag{3.3}$$

$$(1+\epsilon)^3 \sim 1 + 3\epsilon \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} \sim 1 - \epsilon \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2} = (1+\epsilon)^{-2} \sim 1 - 2\epsilon \tag{3.6}$$

$$\sqrt{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \sim 1 - \frac{\epsilon}{2} \tag{3.8}$$

その他、よく使うのは

$$\sin\epsilon \sim \epsilon \tag{3.9}$$

$$\cos\epsilon \sim 1 \tag{3.10}$$

等がある。

練習

富士山の山頂は地球の中心から遠いので、地球の重力が少し弱いはずである。富士山山頂では体重がどれだけ軽くなるであろうか？富士山の標高は

$$h = 3776 \text{ [m]}$$

地球の半径は

$$R = 6371 \text{ [km]}$$

である。地球の中心から富士山頂までの距離を r とすると、

$$r = R + h$$

である。重力は半径の -2 乗に比例するから

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \sim \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

ここで式 (3.6) を使った。従って山頂では地表（海水面上）に比べて

$$\frac{2h}{R} = \frac{2 \times 3.78 \times 10^3}{6.37 \times 10^6} = 1.19 \times 10^{-3} \sim 0.1\%$$

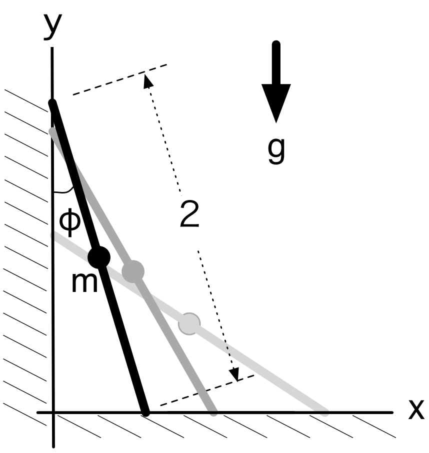
だけ重力が弱い。体重 60 [kg] なら 60 [g] である。

Chapter 3

ラグランジュの運動方程式（続き）

3.3　演習

3.3.1　滑りながら倒れる棒



問題

長さ 2 の重さのない棒の中心に固着した質量 m の質点がある。鉛直下方の一様重力（重力定数 g）の下、この棒を壁に (斜めに）立て掛けた。床面に沿って x 軸、壁面に沿って y 軸をとる。棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないよう

に（摩擦なしで）滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。棒と壁のなす角度 ϕ を一般化座標とする。

(1) ラグランジアン $L(\phi, \dot{\phi})$ を求めよ。

(2) $\phi(t)$ の運動方程式を書け。

(3) $|\phi| \ll 1$ のときの解を書け。

解答

(1) 質点の位置を (x, y) とすると

$$(x, y) = (\sin\phi, \cos\phi)$$

速度は

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\cos\phi\,\dot{\phi}, -\sin\phi\,\dot{\phi})$$

である。棒は質量を持たないので、この系の運動エネルギー K は、質点だけが持っている。従って、

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2$$

同様に棒はポテンシャルを持たないので、系のポテンシャル U は、質点の重力ポテンシャル

$$U = mgy = mg\cos\phi$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi$$

である。運動方程式を導こう。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = m\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = mg\sin\phi$$

これらをラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

に代入すると、

$$\left\{m\ddot{\phi}\right\} - \{mg\sin\phi\} = 0$$

整理すると

$$\ddot{\phi} - g\sin\phi = 0$$

これが ϕ の満たすべき運動方程式である。

(2) $|\phi| \ll 1$ の時、$\sin\phi \sim \phi$ より、運動方程式は

$$\ddot{\phi} = g\phi$$

となる。この微分方程式の一般解は

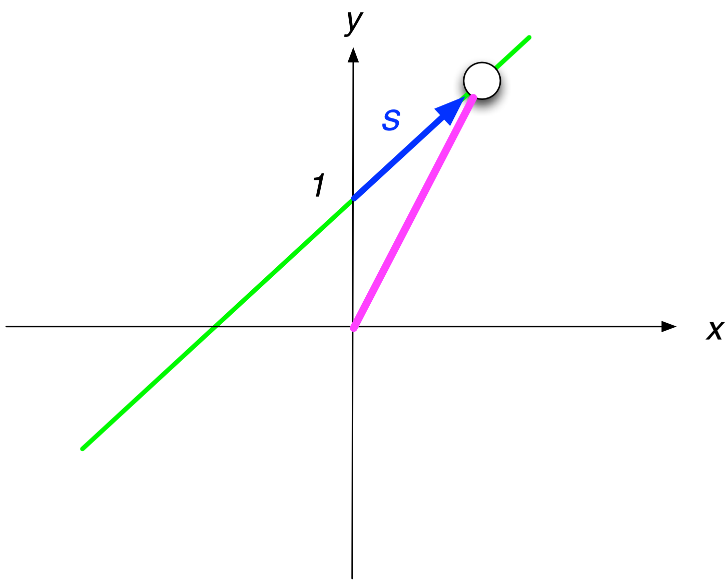
$$\phi(t) = c_1 e^{\sqrt{g}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{g}\,t}$$

である。このうち、自然な（棒が倒れていく）解は $c_2 = 0$、つまり

$$\phi(t) = c_1 e^{\sqrt{g}\,t}$$

である。つまりこの棒が倒れるとき、角度が $\sqrt{g}$ の成長率で指数関数的に増大する。

3.3.2 レポート課題（第 01 回）



x-y 平面上の直線 $y = x + 1$ がある。質量 m の質点がこの直線上を滑らかに（摩擦なしで）動く。バネ定数 k で、自然長 ℓ_0 がゼロ（$\ell_0 = 0$）のバネがあり、その一端は原点に、もう一端は質点に固定されている。直線と y 軸との交点からの（符号付きの）距離を s を質点の一般化座標とする。

1 この系のラグランジアン $L(s, \dot{s})$ を書け。

2 ラグランジュの運動方程式を書け。

3 【任意記入（つまり書かなくてもよい）】これまでの講義の中で私が「この言葉（あるいは考え方や手法）は、当然知っていますね？」と言ったなかで、実は知らなかったものがあれば書け。

4 【任意記入（つまり書かなくてもよい）】これまでの講義の中で私の説明が冗長な（くどすぎる）ところがあれば書け。もう他の講義を通じて知っているなど。

3.4 多自由度系

3.4.1 復習

念のため、偏微分の復習から始める。変数 x, y, z の 3 つの関数

$$\alpha(x,y,z),$$

$$\beta(x,y,z),$$

$$\gamma(x,y,z),$$

があり、f が α, β, γ の関数とする。つまり

$$f = f(\alpha(x,y,z), \beta(x,y,z), \gamma(x,y,z)).$$

このとき f の x, y, z に関する偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

である。

x, y, z と α, β, γ の代わりに、x_1, x_2, x_3 と α_1, α_2, α_3 を使うと上の関係は簡潔に書ける。つまり変数 x_1, x_2, x_3 の関数が 3 つ

$$\alpha_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

あり、f が α_i の関数 $(i = 1, 2, 3)$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

とする。このとき f の偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

である。

一般に、変数 $x_i \quad (i = 1, \ldots, N)$ の関数が M 個

$$\alpha_j(x_1, x_2, \cdots, x_N) \quad (j = 1, 2, \cdots, M)$$

あり、f が α_j の関数

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M)$$

とする。合成関数 f の偏微分は以下の通りである：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

3.4.2 多自由度系のラグランジアンと運動方程式

自由度が 2 以上の系のラグランジアンの作り方も、これまでにみた 1 自由度系と全く同じで

$$L = K - U$$

である。たとえば、自由度が 2 の場合、ラグランジアンは一般化座標 q_1 と q_2 を使って

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

である。そして、q_1 と q_2 に対するラグランジュの運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

である。この二つはまとめて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

と書くことが多い。

自由度 N の系に対しては、一般化座標を $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ とすれば、ラグランジアンは

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$$

と書ける。自由度 N の系のラグランジュの運動方程式は、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)} \tag{3.1}$$

である。