今回の内容

/// 事務連絡：来週休講

/// レポート回収・解説

/// 復習

Chap. 4 対称性と保存則

前回の復習

自由度 N、一般化座標 $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ の系のラグランジアンは

$$L = K - U = \text{（運動エネルギー）} - \text{（ポテンシャル）}$$

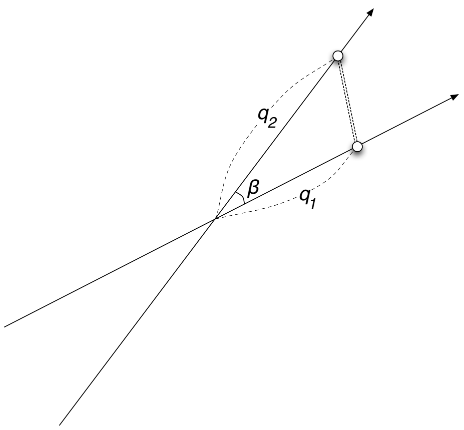
$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$$

が与えられているとき、ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

3.5 多自由度系（続き）

3.5.2 例 1：バネ＝質点 2 自由度系



原点で角度 β をもって交差する直線 1 と直線 2 がある。質量 m をもつ質点 1 が直線 1 の上を、同じ質量 m をもつ質点 2 が直線 2 の上を摩擦なしに滑る。質点 1 と質点 2 の間をバネ（ばね定数 k、自然長 0）がつないでいる。質点 1 の（直線

1 上の）座標を q_1、質点 2 の（直線上 2 上の）座標を q_2 として、ラグランジュの運動方程式を導こう。

この系の運動エネルギー K は二つの質点がもつ運動エネルギーの和なので

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)$$

である。系のポテンシャル U はバネのポテンシャルだから

$$U = \frac{k}{2}\ell^2$$

である。余弦定理より

$$\ell^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2\cos\beta$$

である。従ってラグランジアンは

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2\cos\beta\right)$$

である。

この 2 質点系について、ラグランジュの運動方程式を求めよう。例によっていつもの手続きに従って、まず

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i \qquad \text{(i=1,2)}$$

を計算して、次に

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = m\ddot{q}_i \qquad \text{(i=1,2)}$$

を計算する。次は q_1 と q_2 とで少し形が違うのでそれぞれ計算しよう。

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -k\left(q_1 - q_2\cos\beta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -k\left(q_2 - q_1\cos\beta\right)$$

従って運動方程式は、

$$\{m\ddot{q}_1\} - \{-k\left(q_1 - q_2\cos\beta\right)\} = 0$$

と

$$\{m\ddot{q}_2\} - \{-k\left(q_2 - q_1\cos\beta\right)\} = 0$$

である。$\omega^2 = k/m$ を定義すると、

$$\ddot{q}_1 + \omega^2\left(q_1 - q_2\cos\beta\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2\left(q_2 - q_1\cos\beta\right) = 0 \tag{3.3}$$

とも書ける。

この連立微分方程式を解いてみよう。二つの変数

$$s_p = \frac{q_1 + q_2}{2} \tag{3.4}$$

$$s_m = \frac{q_1 - q_2}{2} \tag{3.5}$$

と定義すると、式 (3.2) と (3.3) の和と差から

$$\ddot{s}_p + \omega_m^2 s_p = 0 \tag{3.6}$$

$$\ddot{s}_m + \omega_p^2 s_m = 0 \tag{3.7}$$

を得る。ここで

$$\omega_p = \omega\sqrt{1 + \cos\beta} \tag{3.8}$$

$$\omega_m = \omega\sqrt{1 - \cos\beta} \tag{3.9}$$

はそれぞれ定数である。式 (3.6) と (3.7) はすぐに解けて …

レポート課題

1 下の (a) から (d) を埋めよ。

2 【任意記入（つまり書かなくても可）】今日の講義に関する質問あるいは感想を書け。

提出方法： 11/12 の講義で提出。

$$s_p = \boxed{\text{(a)}} \tag{3.10}$$

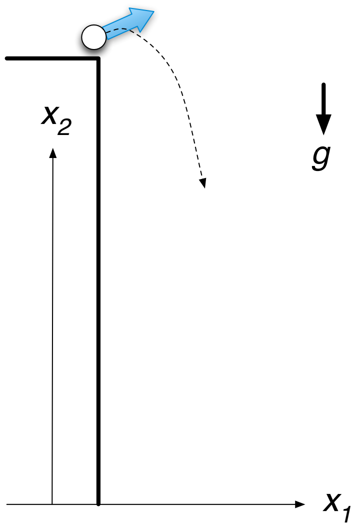
$$s_m = \boxed{\text{(b)}} \tag{3.11}$$

である。（c_1 から c_4 は定数。）式 (3.4) と (3.5) を使って元の変数 q_1 と q_2 に戻せば、

$$q_1(t) = s_p + s_m = \boxed{\text{(c)}} \tag{3.12}$$

$$q_2(t) = s_p - s_m = \boxed{\text{(d)}} \tag{3.13}$$

という解が得られる。q_1 と q_2 は、二つの角振動数 ω_p と ω_m が重なった面白い振動運動を見せることが分かる。



3.5.3 例 2：放物運動

ビルの屋上からボールを投げる問題を考えよう。水平方向（ボールを投げる方向）に x_1 軸をとり、鉛直上向きに x_2 軸をとる。この系は 2 自由度系である。運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right)$$

である。ポテンシャルは

$$U = mgx_2$$

なので、ラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) - mgx_2 \tag{3.14}$$

である。

ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + mg = 0$$

という二つの式が出ることは容易に確認できる。これはまたニュートン力学と同じである。

Chapter 4

対称性と保存則

4.1　循環座標と保存則

4.1.1　共役運動量と循環座標

ラグランジアン $L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}, \ldots, \dot{q}_N)$ から定義される

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を一般化座標 q_i に共役（きょうやく）な運動量、または一般化運動量という。一般化運動量はこの講義の後半で話すハミルトン力学では基本変数になるが、ここではとりあえず言葉の定義だけしておく。

もう一つ言葉を定義しておく。$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ が q_1 に依存しないとき、つまり

$$L = L(q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

のとき、q_1 を循環座標という。

4.1.2　角運動量の保存

ポテンシャル U が原点からの距離だけに依存するとき、このポテンシャルから導かれる力は中心力と呼ばれる。中心力のもとで運動する一つの質点を考えよう。2 次元極座標 $\{r, \phi\}$ で考える。速度の半径（r）方向成分は $v_r = \dot{r}$、方位角（ϕ）方向成分は $v_\phi = r\dot{\phi}$ である。従って

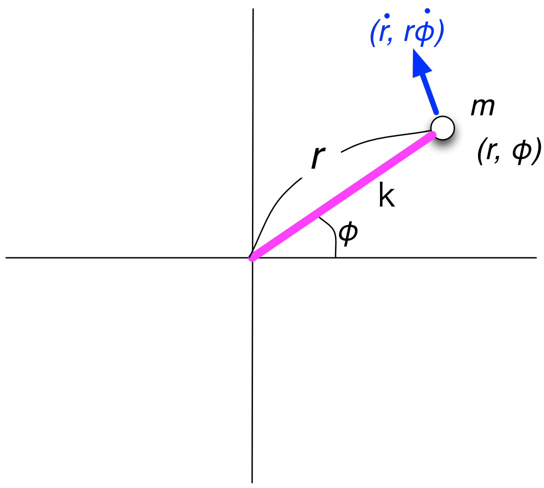
$$v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r\dot{\phi}^2$$

である。ラグランジアンは

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r)$$

である。このとき、一般化座標 ϕ に対するラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0$$



である。これから ϕ に共役な一般化運動量

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

は一定、つまり保存量であることがわかる。これは角運動量である。この系では ϕ が循環座標になっているために ϕ に共役な一般化運動量が保存し、それは角運動量の保存則を意味するということがわかった。このような循環座標と保存則の関係は一般化できる。

4.1.3 循環座標と保存量

前に述べたように、$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}, \ldots, \dot{q}_N)$ が q_k に依存しないとき、q_k を循環座標という。循環座標 q_k に共役な一般化運動量

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

は時間変化しない。つまり保存する。なぜなら、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

と

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

より、

$$\frac{dp_k}{dt} = 0$$

だからである。

4.2 運動量の保存

二つの質点からなる系を考える。この系をカーテシアン座標で記述し、二つの質点の座標を

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$$

ラグランジアンを

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$$

とする。

座標軸の原点の取り方を任意にずらしても（座標を任意の方向に任意の距離だけ並行移動しても）現象の記述は変わらないはずである。（別の位置に立つ人が同じ現象を見たら同じように見えるということである。）このようなずらし方を空間並進という。いまそのずらす量を微小とし、$\delta\boldsymbol{r}$ と書くと、それぞれの座標はそれぞれ

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}' = (x + \delta r_x, y + \delta r_y, z + \delta r_z)$$

$$\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{X}' = (X + \delta r_x, Y + \delta r_y, Z + \delta r_z)$$

と少しだけ変わるが、ラグランジアンは変わらないと期待できる。この座標変換によるラグランジアンの変化は少し丁寧に書くと

$$\begin{aligned}
\delta L &= L(\boldsymbol{x}', \dot{\boldsymbol{x}}', \boldsymbol{X}', \dot{\boldsymbol{X}}') - L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) \\
&= \frac{\partial L}{\partial x}\delta r_x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta r_y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta r_z + \frac{\partial L}{\partial X}\delta r_x + \frac{\partial L}{\partial Y}\delta r_y + \frac{\partial L}{\partial Z}\delta r_z
\end{aligned}$$

である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{X}$ に共役な運動量を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{P}$ と書けば、この式は、

$$\begin{aligned}
\delta L &= \dot{p}_x\delta r_x + \dot{p}_y\delta r_y + \dot{p}_z\delta r_z + \dot{P}_x\delta r_x + \dot{P}_y\delta r_y + \dot{P}_z\delta r_z \\
&= \frac{d}{dt}\left(p_x + P_x\right)\delta r_x + \frac{d}{dt}\left(p_y + P_y\right)\delta r_y + \frac{d}{dt}\left(p_z + P_z\right)\delta r_z \\
&= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{P}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

任意の微小ベクトル $\delta\boldsymbol{r}$ に対して $\delta L = 0$ とであることから、

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{P}\right) = 0$$

である。これは運動量保存則である。

上では二つの質点の系について運動量保存則を示したが、これが二個ではなく任意個数の質点系に対しても成り立つことは上の導出を見れば明らかであろう。ラグランジアンが空間並進に不変（これを空間並進に対して対称という）なら、その系の全運動量が保存する。

4.3 ネーターの定理

一般化座標 q_i に対して、ラグランジアンがある無限小変換

$$q_i \Rightarrow q_i' = q_i + \delta q_i$$

に対して変化しない、つまり

$$L \Rightarrow L' = L$$

のとき

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

は保存量である。空間並進対称性に対応する保存量は運動量、空間回転対称性に対応する保存量は角運動量、時間並進対称性に対応する保存量はエネルギーである。

上では無限小変換を考えたが、もっと一般にはラグランジアンが変換

$$q_i \Rightarrow q_i' = q_i + \Delta q_i$$

に対して

$$L \Rightarrow L' = L + \frac{dJ}{dt}$$

と変換される時（このとき運動方程式は変わらない）、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i - J$$

は保存量であるということが示せる。これをネーターの定理という。

4.4 ラグランジアンの不定性：定数分の不定性

ポテンシャルは「微分する（勾配 gradient をとる）と力になるスカラー関数」として定義された量なので、定数分だけ異なるポテンシャルは「同じ」と見なして良い。つまりポテンシャル U は定数分だけ不定である。

これまでラグランジアン L を $L = K - U$ として定義してきたので、ラグランジアンも定数分だけ不定のはずである。これは実際その通りで、一般に自由度 N のある力学の系のラグランジアン

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$$

に対して、これに定数 c だけ加えた「別の」ラグランジアン

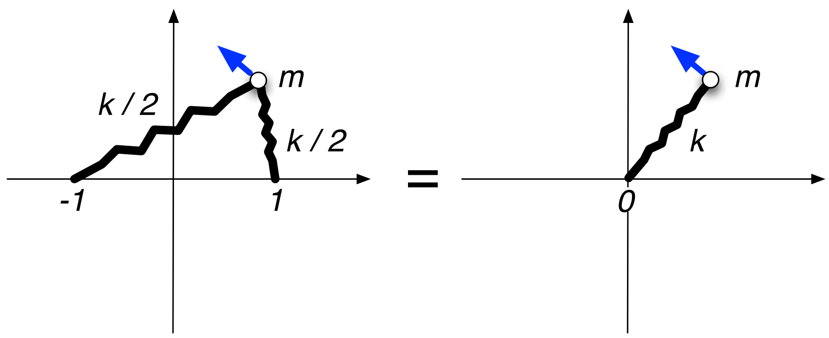
$$L'(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N) := L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N) + c$$

として作ったとしても、このラグランジアン L' から作ったラグランジュの運動方程式は元の $L(q, \dot{q})$ から作った運動方程式と同じである。なぜならラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

には、ラグランジアンの微分だけが関係するからである。つまりラグランジアンは定数分だけ不定である。

4.5 例



1 つの質点バネ＝質点系を 2 種類考える。一つだけのバネが原点につながれたときのラグランジアンは

$$L_a(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

である。一方、バネ定数が半分の二つのバネにつながれたときのラグランジアンを計算すると

$$L_b(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{k}{2}$$

である。この二つは定数 $\frac{k}{2}$ だけの差しかない。ラグランジアンは定数分だけ不定なので、この二つの系での質点の運動方程式は同じである。つまり初期条件が同じなら同じ運動をする。

4.6 ラグランジアンの不定性：一般的な不定性

まずは簡単のため自由度 1 の場合を考える。一般化座標 q のラグランジアン $L(q, \dot{q})$ が与えられているとき、q の任意の関数 $W(q)$ の時間微分を加えた別のラグランジアン

$$L'(q, \dot{q}) := L(q, \dot{q}) + \frac{dW(q)}{dt}$$

を考える。

$$\frac{dW(q)}{dt} = \frac{dW(q)}{dq}\dot{q}$$

であることに注意すると、この二つのラグランジアンの差 $dW(q)/dq$ に起因するラグランジュの運動方程式の差は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dW}{dt}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dW}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dW(q)}{dq}\right) - \frac{d^2W(q)}{dq^2}\dot{q} \\
&= \frac{d^2W(q)}{dq^2}\dot{q} - \frac{d^2W(q)}{dq^2}\dot{q} \\
&= 0
\end{aligned}$$

である。つまりラグランジアンは q の任意関数 $W(q)$ の時間微分 $dW(q)/dt$ 分だけ不定である。

たとえば、これまで演習などで導出したラグランジアンの一つ

$$L(q, \dot{q})$$

を（どれでもよいので）もってきて、それに（適当に作った）$W(q) = \sin(q^3)$ から作られる

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\sin(q^3)}{dt} = 3q^2\dot{q}\cos(q^3)$$

という（変な）項を足しても運動方程式は変わらないというわけである。

多自由度系の場合にも同様である。一般化座標 $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ の任意の関数 $W(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ を時間で微分した

$$\frac{dW(q_1, q_2, \ldots, q_N)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial W}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial W}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

をラグランジアン L に足しても運動方程式は変わらないことを確認しよう。

$$L^*(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) = L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \frac{dW(q_1, \ldots, q_N)}{dt}$$

に対して、ラグランジュの運動方程式を導出してみると、

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial W}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W(q_1, \ldots, q_N)}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j$$

一方、式 (4.6) より、

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j$$

従って L^* から導かれる運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} = 0$$

は、

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j\right\} = 0$$

つまり、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

となる。これは L から導かれるラグランジュの運動方程式そのものである。

ある系を記述するラグランジアンは一つではない。一般化座標 $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ の系に対応するラグランジアン L が既知の時、任意の関数 $W(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ から

$$L' = L + \frac{dW}{dt} \tag{4.1}$$

として「別の」ラグランジアン L' を構成すると、この新しい L' も L から導かれるものと全く同じ運動方程式を導く。つまりある系のラグランジアンは無数にある。

これまで、この講義では「ラグランジアン L は、系の運動エネルギー K からポテンシャル U を引いたものである」と説明してきたが、実は、正確に言えば、これは「その系の（無数にある）ラグランジアンのうちの一つは、そのようにして作ることができる」という意味だったのである。

付け加えると、ラグランジアンの不定性は上の $dW(q)/dt$ というタイプに限られているわけではない。一自由度の質点系でポテンシャルが存在しない系（自由粒子という）のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$

であるが、

$$L'(q, \dot{q}) = \mathrm{e}^{\sqrt{m}\dot{q}}$$

というラグランジアンも L と同じ運動方程式を導く。

4.7 エネルギーの保存

これまでずっとラグランジアン $L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$ が時間に陽には依存しない場合を考えてきた [1]。このような場合、

$$h := \sum_{j=1}^{N} p_j \dot{q}_j - L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N) \tag{4.2}$$

[1] ラグランジアンが時間に陽に依存する場合というのは例えば $L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q^2 + \cos t$ のような場合。このような場合でもラグランジュの運動方程式の導出手続きは同じである。この点については後で述べる予定である。

という量は時間変化しない（保存する）。なぜなら

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{N} p_j \dot{q}_j - L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} p_j \ddot{q}_j - \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \qquad [\text{第 2 項と第 4 項がキャンセル}] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \dot{p}_j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad [\text{定義}\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\text{より}] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_j \\
&= 0 \qquad \text{（ラグランジュの運動方程式より）}
\end{aligned}$$

これは一般的な（どんな）ラグランジアンについても成り立つ話である。特に

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N) = K - U$$

という形に書けて、U が $\dot{q}_i$ には依存せず、

$$K = \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\dot{q}_j \dot{q}_j$$

と書ける場合には h の意味が分かりやすくなる。この場合

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$

となる。（カーテシアン座標ならこれはよく知られた運動量の定義そのものである。）このとき h は

$$h = \sum_{j=1}^{N} m\dot{q}_j\dot{q}_j - (K - U) = \sum_{j=1}^{N} m\dot{q}_j\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\dot{q}_j\dot{q}_j + U = K + U$$

つまり運動エネルギーとポテンシャルの和、全エネルギーを表す。上で確認した $dh/dt = 0$ という式はエネルギー保存則を意味する。