今日の内容

/// レポート回収

/// 前回の復習

§6 運動方程式の共変性

§7 荷電粒子の運動

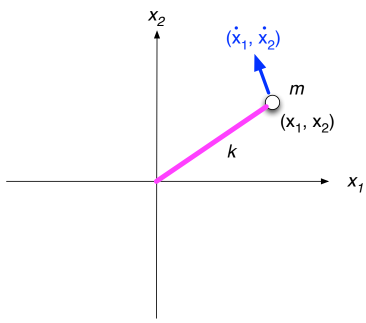
/// レポート課題

- q_i に共役な一般化運動量 p_i
- 循環座標と保存則 $L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \implies p_2$ が保存
- ラグランジアンの不定性： $L \implies L' = L + \mathrm{const.}$
- $L \implies L' = L + dW/dt$

Chapter 6

運動方程式の共変性

6.1 共変性



次のような問題をこの講義ではこれまで 2 回考えた：「平面上を運動する質量 m の質点がばね定数 k、自然長 0 のバネと原点でつながれている。この質点の運動方程式を導け。」

まず最初は、この問題を解くための一般化座標 (q_1, q_2) をカーテシアン座標 (x, y) にとった。ラグランジアンは

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) \tag{6.1}$$

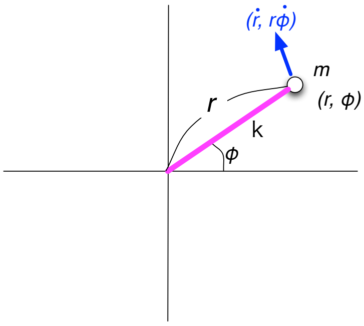
であった。二回目には同じ問題を一般化座標 (q_1, q_2) を極座標 (r, ϕ) として解いた。このときのラグランジアンは

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{k}{2}\, r^2 \tag{6.2}$$

であった。上の二種類の一般化座標は座標変換

$$x = x(r, \phi) = r\cos\phi \tag{6.3}$$

$$y = y(r, \phi) = r\sin\phi \tag{6.4}$$



で結ばれている。逆変換は

$$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.5}$$
$$\phi = \phi(x, y) = \arctan(y/x) \tag{6.6}$$

である。

式 (6.1) と (6.2) の二つのラグランジアンは、関数の形は違うが、ラグランジュの運動方程式の形はどちらも

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{6.7}$$

である。ニュートン力学では、座標系を変えると方程式の形が変わってしまったことを思い出すと、これは実に驚くべき簡単さだとは思わないだろうか。変数の変換に対して方程式が形を変えないときその変換に対して「共変」であるという。解析力学が便利なのは、様々な座標変換に対してラグランジュの運動方程式が共変だからである。

6.2 時間に依存しない点変換

座標 $q_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ で記述された自由度 N の系を考える。この系を別の座標 $Q_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ で記述するために座標変換

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2, \cdots, q_N) \\ Q_2 &= Q_2(q_1, q_2, \cdots, q_N) \\ &\vdots \\ Q_N &= Q_N(q_1, q_2, \cdots, q_N) \end{aligned}$$

しよう。もちろん、二つの座標系の全ての点は一対一に対応しているものとする[1]。つまり逆の変換

$$
\begin{aligned}
q_1 &= q_1(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N) \\
q_2 &= q_2(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N) \\
&\vdots \\
q_N &= q_N(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)
\end{aligned}
$$

が存在する。このような変換を「点変換」という。

ラグランジュの運動方程式は点変換に対して共変である。それを今から確認しよう。目標は

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \tag{6.8}
$$

という式である。この式は座標 $q_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ でラグランジュの運動方程式が成り立てば、座標 $Q_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ でも成り立つということを意味している。

では式 (6.8) を導出しよう。まずは、

$$
\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \tag{6.9}
$$

だから

$$
\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \tag{6.10}
$$

という関係が成り立つことを確認しよう。この関係はこのあと何度か使う。

ラグランジアン $L(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ に対応するラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.11}
$$

が成り立っているならば、点変換によって、ラグランジアンが $L(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$ となったとき、このラグランジアンに対応するラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.12}
$$

も成り立つことを示す。

(6.10) を時間微分して

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k}\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_j \tag{6.13}
$$

[1] Q_i での微分もできるとする。

式 (6.9) より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} \dot{Q}_j$$

この式と (6.13) を比較して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k}\right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \tag{6.14}$$

ここまでが準備である。いよいよ今から証明に入る。ラグランジュの運動方程式を導出するときにいつもするように、ラグランジアン L を $\dot{Q}_k$ で偏微分することから始めよう。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \tag{6.15}$$

である。これを時間微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right) && (6.16) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} && (6.17) \end{aligned}$$

次に

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \tag{6.18}$$

式 (6.16) から (6.18) を引いて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \end{aligned}$$

従って、(6.11) が成り立つなら (6.12) も成り立つ。

もう一度強調しておこう。ラグランジュの運動方程式は点変換に対して共変である。一般化座標をどのようにとってもラグランジュの運動方程式の形が変わらないというこの共変性のおかげで、ラグランジュの力学では、問題に応じて解きやすい一般化座標を自由にとれる。

6.3 時間依存の点変換

上で考えた点変換は時間に依存しない場合であった。しかし、時間に陽に依存する点変換

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= Q_1(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t), t) \\
Q_2 &= Q_2(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t), t) \\
&\vdots \\
Q_N &= Q_N(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t), t)
\end{aligned}
$$

に対してもラグランジュの運動方程式は共変である。例えば回転する座標系をとってもよい。一定角速度で回転する回転系にあらわれる見かけの力（コリオリ力と遠心力）はこの時間に依存する点変換によって自然に導くことができる。

Chapter 7

荷電粒子の運動

7.1 ラグランジアン

電磁気学で習ったように、電荷 $+e$ をもつ点電荷が静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ の中にあるとき、そのポテンシャルエネルギーは、静電ポテンシャル U を使って

$$U(\boldsymbol{x}) = e\phi(\boldsymbol{x})$$

であることはすでに習ったはずである。静電場 $\boldsymbol{E}$ と静電ポテンシャル U には

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x})$$

という関係がある。点電荷の質量を m とするとこの系のラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \sum_{j=1}^{3} \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j - e\phi(\boldsymbol{x})$$

である。これを短く

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - e\phi(\boldsymbol{x})$$

と書くこともある

次に磁場がある場合を考えよう。時間的にも空間的にも変化する一般的な電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ があるときの電荷 $+e$、質量 m の質点（点電荷）のラグランジアンは、

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - e\phi \tag{7.1}$$

である。ここで $\boldsymbol{A}$ と ϕ はベクトルポテンシャルと（スカラー）ポテンシャルと呼ばれるもので、時間と空間の関数である：

$$A_i = A_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

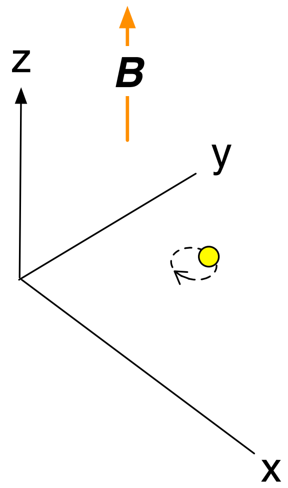
電場、磁場とは

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.3}$$

という関係がある。式 (7.1) のラグランジアンは質点の位置座標 x_i の関数であることに注意しよう。ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが x_i の関数になっていることから合成関数として間接的に入っている。

7.1.1　例



一様磁場中の荷電粒子の運動を考えてみよう。カーテシアン座標をとり、ベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, x, 0) \tag{7.4}$$

とする。このとき、磁場は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = (0, 0, 1)$$

である。つまり z 軸方向の一様磁場を意味する。この磁場の下で運動する荷電粒子（質量 m、電荷 e とする）を考えよう。（サイクロトン運動をすることは既知であろう。）ラグランジアンは、式 (7.1) より

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + ex\dot{y}$$

である。y と z が循環座標なので、それぞれに共役な一般化運動量

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + ex = m\dot{y} + eA_y \tag{7.5}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{7.6}$$

がそれぞれ保存する。式 (7.6) は z 方向の運動量保存（z 方向へは一定速度で移動すること）を意味するが、式 (7.5) の一般化運動量はニュートン力学の意味でいう y 方向への運動量とは異なる。

7.2 荷電粒子の運動方程式

ラグランジアン (7.1) から、ラグランジュの運動方程式を導出するとよく知られた

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\left\{\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}\right\} \tag{7.7}$$

が得られる。

練習問題：式 (7.7) を導出せよ。

解答：
まずはラグランジアン (7.1) から運動方程式の x_1 成分を作る。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + e\,A_1$$

から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 + e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_1}{\partial x_j}\dot{x}_j + e\,\frac{\partial A}{\partial t}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_j}{\partial x_1}\dot{x}_j - e\,\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

である。したがって、運動方程式の x_1 成分は、

$$\left\{m\ddot{x}_1 + e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_1}{\partial x_j}\dot{x}_j + e\,\frac{\partial A}{\partial t}\right\} - \left\{e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_j}{\partial x_1}\dot{x}_j - e\,\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\} = 0$$

ここで j について 1 から 3 までの和をとるときに $j=1$ では $\partial A_1/\partial x_j$ と $\partial A_j/\partial x_1$ の二つは同じなのでキャンセルして

$$\left\{m\ddot{x}_1 + e\,\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\dot{x}_2 + e\,\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\dot{x}_3 + e\,\frac{\partial A}{\partial t}\right\} - \left\{e\,\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\dot{x}_2 + e\,\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\dot{x}_3 - e\,\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\} = 0$$

となる。つまり

$$m\ddot{x}_1 = e\left\{\dot{x}_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) - \dot{x}_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\right\} - e\,\frac{\partial A}{\partial t} - e\,\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

ここで

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_3=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

と

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_2=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

を使うと

$$m\ddot{x}_1=e\left\{\dot{x}_2\,(\nabla\times\boldsymbol{A})_3-\dot{x}_3\,(\nabla\times\boldsymbol{A})_2\right\}-e\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)$$

である。式 (7.2) と (7.3) より、

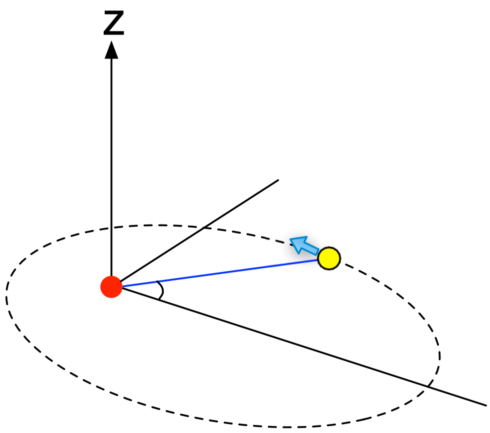
$$m\ddot{x}_1=e\,(\dot{x}_2\,B_3-\dot{x}_3\,B_2)+e\,E_1$$

である。これは

$$m\ddot{x}_1=e\,(\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_1+e\,E_1$$

と書ける。他の成分（x_2 成分と x_3 成分）についても同様である。こうして式 (7.7) が導かれた。

7.3 例



前回の講義で、中心力のポテンシャル $U(r)$ の下で運動する質点を考えた。

$$U(r)=-eQ/r\qquad（e\text{ は定数}）$$

の場合、これは原点に固定された電荷 $-Q$ が作るスカラーポテンシャル

$$\Phi(r)=-\frac{Q}{r}$$

の下での電荷 e をもつ質点のポテンシャルである [1]。この時の運動方程式の解の一つとして楕円軌道が得られることは既知であろう。では、この系にさらに磁場をかけてみよう。

今度は円筒座標 $\{r, \phi, z\}$ で考えてみよう。時間的に変化しない次のベクトル $\boldsymbol{A}$ をとる。

$$\boldsymbol{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = (0, rB_0/2, 0) \qquad (B_0 \text{ は定数}) \tag{7.8}$$

ベクトル解析の公式集をみれば分かる通り、一般に円筒座標では

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \tag{7.9}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \tag{7.10}$$

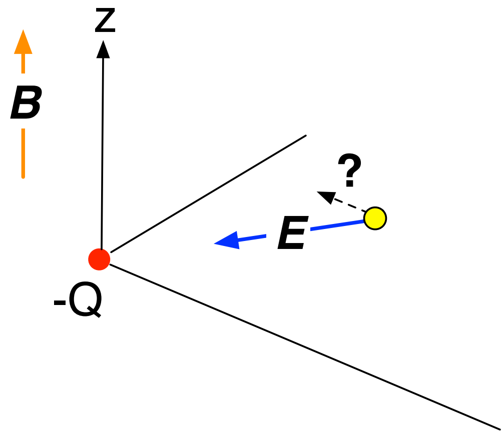
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \tag{7.11}$$

である。従って今の場合、磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ は z 成分だけが非ゼロで、

$$\boldsymbol{B} = (B_r, B_\phi, B_z) = (0, 0, B_0)$$

である。つまり上のベクトルポテンシャル (7.8) は、z 軸方向の一様な磁場のベクトルポテンシャルである。式 (7.4) のベクトルポテンシャルも全く形は違うが一様磁場を導く。

いま x-y 平面内の運動だけに限定し、極座標 $\{r, \phi\}$ を使って考えよう。磁場の強さ B_0 がゼロの場合を考えると、荷電粒子は楕円軌道を描くはずである。一方、B_0 が強い極限では、原点の電荷 $-Q$ からの引力は無視できて、この時はサイクロトロン運動をする。この中間の状況での運動について調べるためにラグランジアンを作ってみよう。



[1] これまでポテンシャルを ϕ と書いてきたが、この後、一般化座標で ϕ の文字を使うのでここでは大文字の Φ とした。

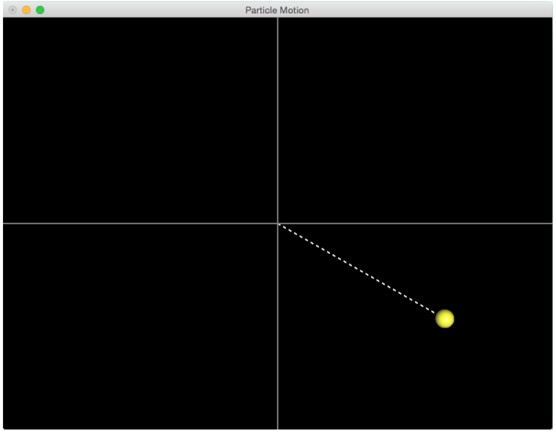


図 7.1: 一様磁場中の荷電粒子の運動

荷電粒子の速度は円筒座標で書けば

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (v_r, v_\phi, v_z) = (\dot{r}, r\dot{\phi}, v_z)$$

である。ベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A} = (A_r, A_\phi, A_z) = (0, rB_0/2, 0)$$

なので、この系のラグランジアンは式 (7.1) より

$$L(r,\phi) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{eB_0}{2}r^2\dot{\phi} + \frac{eQ}{r} \tag{7.12}$$

である。このラグランジアンを見ると、ϕ は循環座標になっているので、ϕ に共役な一般化運動量

$$p_\phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} + \frac{eB_0}{2}r^2$$

は保存する。通常の意味での角運動量 $mr^2\dot{\phi}$ は保存しないが、一般化運動量 p_ϕ は保存するのである。この一般化運動量は

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} + eA_\phi$$

とも書ける。

レポート課題

ラグランジアン［式 (7.12)］から一般化座標 r と ϕ に対する運動方程式を導け。

7.4 ゲージ変換

ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの定義 (7.2) と (7.3)

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

をよく見ると、任意のスカラー場 $\Lambda(\boldsymbol{x}, t)$ から構成する

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda \tag{7.13}$$

$$\phi \Rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{7.14}$$

という変換で新しいベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}'$ とスカラーポテンシャル ϕ' を作っても、そこから得られる電場と磁場は元と変わらないことが分かる：

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B}' = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

この (7.13) と (7.14) を電磁場のゲージ変換という。

電磁場中の荷電粒子の運動を記述するラグランジアン (7.1)

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - e\phi$$

がゲージ変換によってどう変わるか見てみよう。

$$\begin{aligned} L \Rightarrow L' &= \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A}' \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - e\phi' \\ &= \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + e\left(\boldsymbol{A} + \nabla \Lambda\right) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - e\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial} t\right) \\ &= \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - e\phi + e\left(\nabla \Lambda \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla \Lambda \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{d\Lambda(\boldsymbol{x}, t)}{dt}$$

であることに注意すると、

$$L' = L + \frac{d(e\Lambda)}{dt}$$

であることが分かる。これは前回の講義で示した運動方程式に影響を与えないラグランジアンの変換

$$L \implies L' = \frac{dW}{dt}$$

の

$$W = e\Lambda$$

の場合に相当する。つまりゲージ変換を施しても（ラグランジアンの見た目は変わるが）そこから導かれる運動方程式はその形を変えない。ゲージ変換に対して運動方程式は共変である。