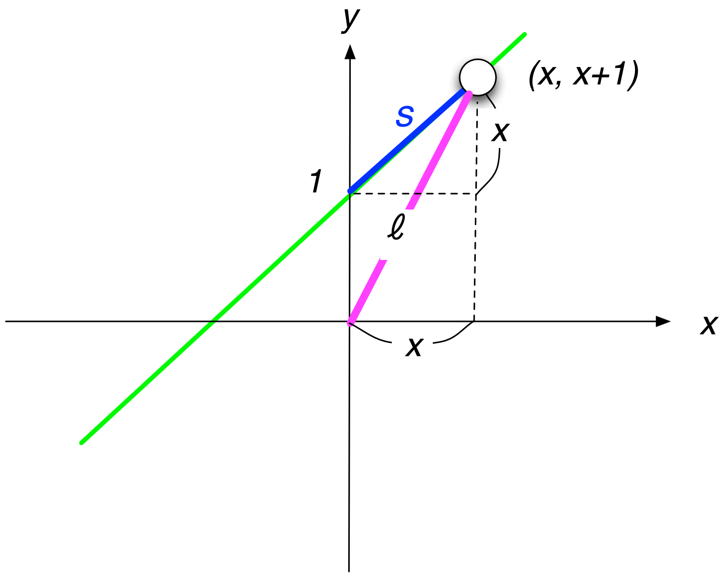
解析力学B 第01回レポート 解答例



[1] 運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2$$

ポテンシャルは

$$U = \frac{k}{2}\,\ell^2$$

である。ℓ^2 を一般化座標 s を使って書こう。図から明らかに

$$s = \sqrt{2}\,x$$

である。これは符号も含めて成り立つ関係である。質点のカーテシアン座標を $(x, x+1)$ とすると、図から

$$\ell^2 = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

なので、結局、ラグランジアンは

$$L(s, \dot{s}) = K - U = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 - \frac{k}{2}\left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right)$$

である。定数部分を除いて

$$L(s, \dot{s}) = K - U = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 - \frac{k}{2}\,s\left(s + \sqrt{2}\right)$$

等としてもよい。

[2]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s}$$

である。次に

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -k\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

なのでラグランジュの運動方程式は

$$\{m\ddot{s}\} - \left\{-k\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = 0,$$

つまり

$$\ddot{s} + \frac{k}{m}\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

が答え。

　なお、この運動方程式は

$$s' = s + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

という新しい一般化座標を定義すると簡単に解ける。（s' の図形的な意味は何であろうか？）