1章のポイント

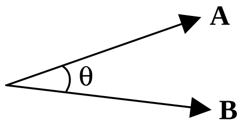
[1]ベクトルの大きさ |**A**|

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \text{ の時,} \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.1}$$

[2]単位ベクトル **A**

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad , \quad |\mathbf{a}| = 1 \tag{1.2}$$

[3]内積 **A**·**B**

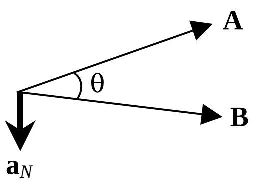


$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\overbrace{|\mathbf{B}|\cos\theta}^{\text{B ベクトルの A ベクトル上へのスカラー投影}} \quad \Rightarrow \quad \text{スカラー} \tag{1.3}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot(B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{1.5}$$

[4]外積 **A**×**B**



外積の方向

（**A** から **B** に右ねじを回したときに進む方向. **A** と **B** を含む平面に垂直な方向）

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{a}_N|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \text{ベクトル} \tag{1.6}$$

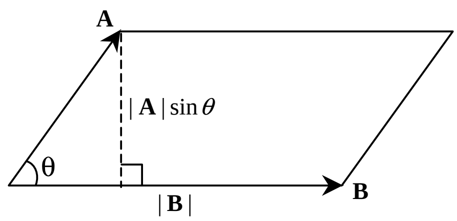
$\mathbf{a}_N$：外積の方向を示す単位ベクトル

N ： 法線（Normal）

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z \\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.7}$$

注）**B**×**A** は **A**×**B** の反対方向（$-\mathbf{a}_N$）を向く.

[5]三角形の面積（外積の応用）



$$\text{平行四辺形の面積} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| \tag{1.8}$$

これより

$$\text{三角形の面積} = \frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| \tag{1.9}$$

[6]他の座標系のまとめ

■直交座標系(x, y, z)と円筒座標系(ρ, ϕ, z)の変換

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\phi \\
y &= \rho\sin\phi \\
z &= z
\end{aligned}
\qquad (1.10) \qquad \Leftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\
z &= z
\end{aligned}
\qquad (1.11)
$$

■直交座標系(x, y, z)と球座標系(r, θ, ϕ)の変換

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (1.12) \qquad \Leftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}
\end{aligned}
\qquad (1.13)
$$

■円筒座標ベクトル　$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$

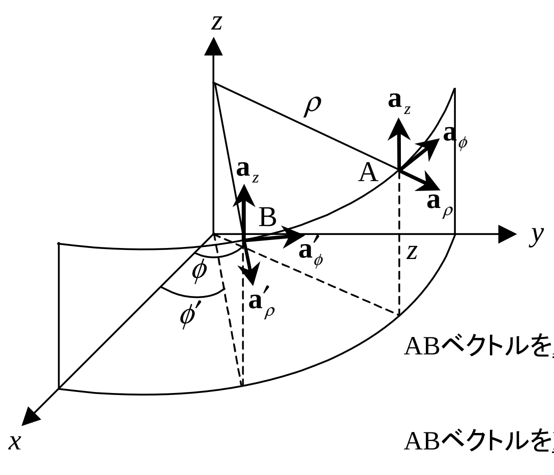
直交座標ベクトル($\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$)を円筒座標ベクトルで表すには(教科書 P.17)

$$
\begin{aligned}
A_\rho &= A_x\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\
A_\phi &= A_x\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x(-\sin\phi) + A_y\cos\phi \\
A_z &= A_z
\end{aligned}
\qquad (1.14)
$$

■球座標ベクトル　$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$

直交座標ベクトル($\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$)を球座標ベクトルで表すには(教科書 P.20)

$$
\begin{aligned}
A_r &= A_x\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r + A_y\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r + A_z\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \\
A_\theta &= A_x\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta + A_y\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta + A_z\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi + A_z(-\sin\theta) \\
A_\phi &= A_x\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x(-\sin\phi) + A_y\cos\phi
\end{aligned}
\qquad (1.15)
$$



円筒座標系，球座標系での注意点

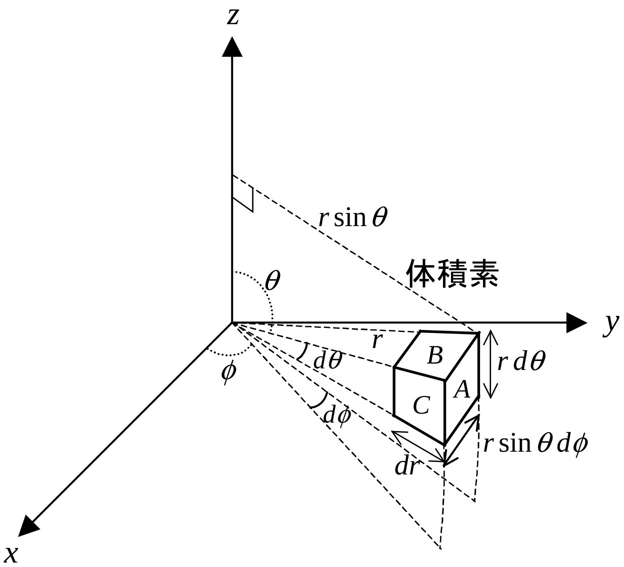
ABベクトルを<u>A点の単位ベクトル</u>を使って円筒座標ベクトル表示

$\neq$

ABベクトルを<u>B点の単位ベクトル</u>を使って円筒座標ベクトル表示

図 1.1

[7]球座標の体積素



$$
\begin{aligned}
A\text{面の面積} &= r\sin\theta\, d\phi \times r d\theta \\
&= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
B\text{面の面積} &= \\
C\text{面の面積} &=
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{体積素の体積} &= A\text{面の面積} \times dr \\
&= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

図 1.2

例：式(1.17)を用いて，半径 R の球の体積を求めてみよう。

$$
V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{R} r^2 dr = \tag{1.18}
$$

■練習問題 1.29 の閉曲面のイメージ図

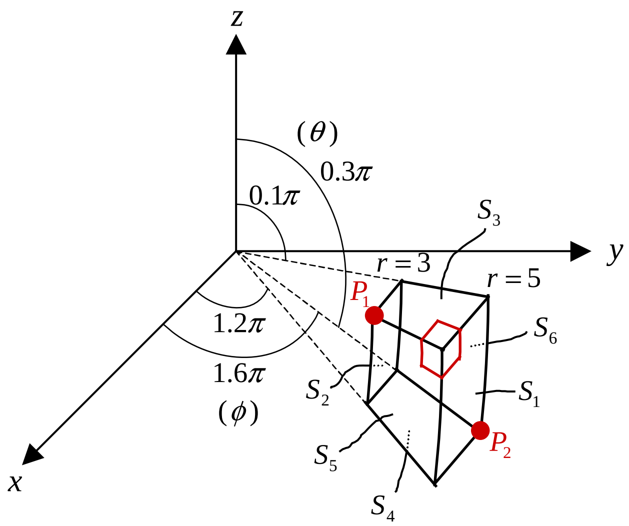
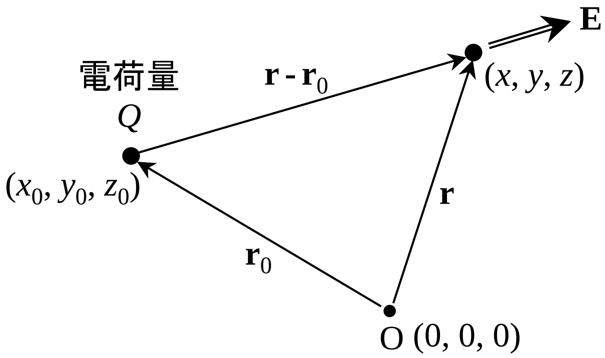


図 1.3

2 章のポイント

[1]点電荷による電界



1. 電荷量 Q
2. 距離 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$
3. 単位ベクトル $\mathbf{a}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}$（方向）

注意：電界はベクトルであり向きを持つ

図 2.1 点電荷による電界.

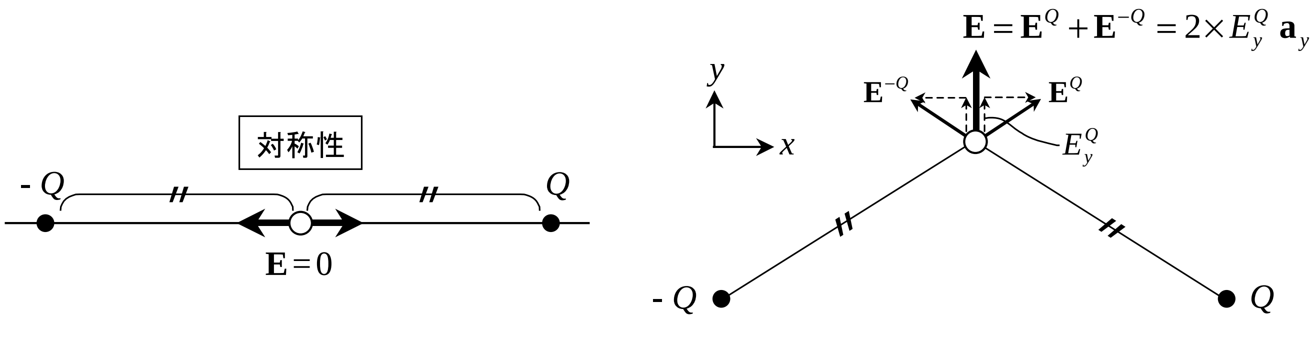
$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\mathbf{a}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}, \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}\text{ ：}\mathbf{r}\text{ - }\mathbf{r}_0\text{ 方向の単位ベクトル} \tag{2.1}$$

■n 個の点電荷による電界（単独の電荷による電界の和）

$$\mathbf{E}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0|^2}\mathbf{a}_{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0|^2}\mathbf{a}_{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0}+\cdots\cdots+\frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_0|^2}\mathbf{a}_{\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_0} \tag{2.2}$$

■対称性の利用

図 2.2 のような複数の点電荷の配置では対称性を利用して計算する。



(a) (b)

図 2.2 対称性の利用.

[2]体積電荷密度と総電荷

■直交座標系 $$Q=\int_{z=z_1}^{z=z_2}\int_{y=y_1}^{y=y_2}\int_{x=x_1}^{x=x_2}\rho_v(x,y,z)\ dxdydz \tag{2.3}$$

■円筒座標系 $$Q=\int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{z=z_1}^{z=z_2}\rho_v(\rho,\phi,z)\ \rho d\rho d\phi dz \tag{2.4}$$

■球座標系 $$Q=\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=r_1}^{r=r_2}\rho_v(r,\theta,\phi)\ r^2\sin\theta d\theta d\phi dr \tag{2.5}$$

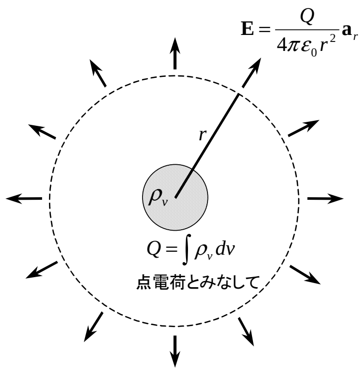


図 2.3 総電荷と電界.

$$\rho_v = \rho_v(r) \text{のとき} \quad Q = \underbrace{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \int_{r=r_1}^{r=r_2} \rho_v(r)\, r^2 dr = \int_{r=r_1}^{r=r_2} \rho_v(r)\, 4\pi r^2 dr \tag{2.6}$$

$$\rho_v = \rho\,(\text{一定}) \text{のとき} \quad Q = \int_{r=r_1}^{r=r_2} \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4\pi(r_2^3 - r_1^3)}{3} \tag{2.7}$$

[3]面電荷と線電荷による電界

■線電荷による電界（図 2.4 のように ρ_L が $x = x_0,\ z = z_0$ に置かれている場合）

$$\mathbf{E}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x_0)\mathbf{a}_x + (z - z_0)\mathbf{a}_z}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{2.8}$$

1. x, z 面内に放射線状に分布
2. y 方向成分なし

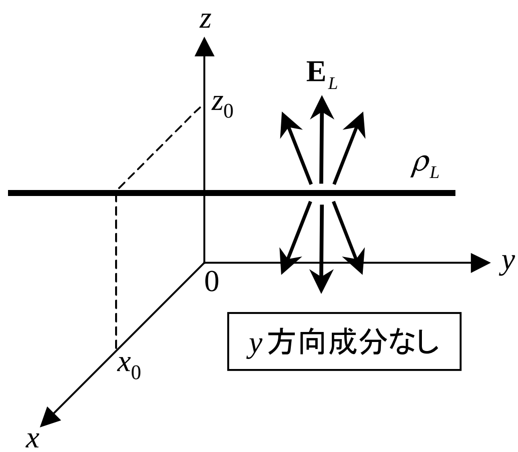


図 2.4 線電荷による電界.

■面電荷による電界（図 2.5）

$$\mathbf{E}_S = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \mathbf{a}_N \tag{2.9}$$

1. $\mathbf{a}_N$:単位ベクトル ＝ 面に垂直で外向き方向を示す
2. 位置に依存しない

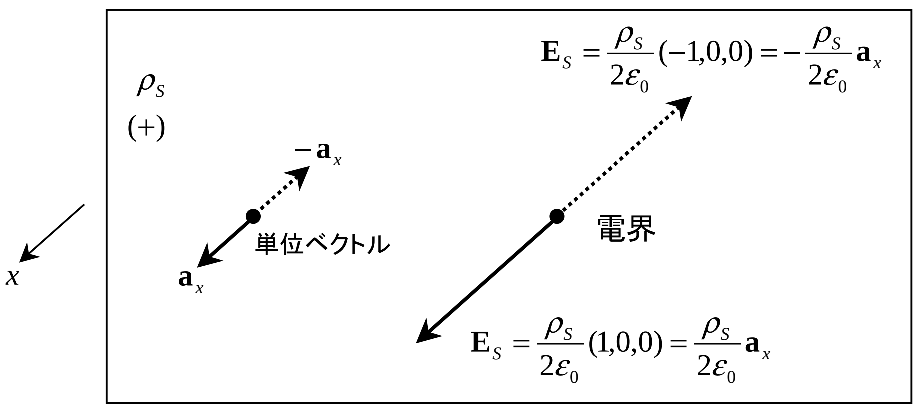


図 2.5 面電荷による電界. 電界の向きに注意すること.

[4]電荷(電荷密度 ρ)に働く力

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} \tag{2.10}$$

3章のポイント

[1]電束と電束密度

■電束 Ψ

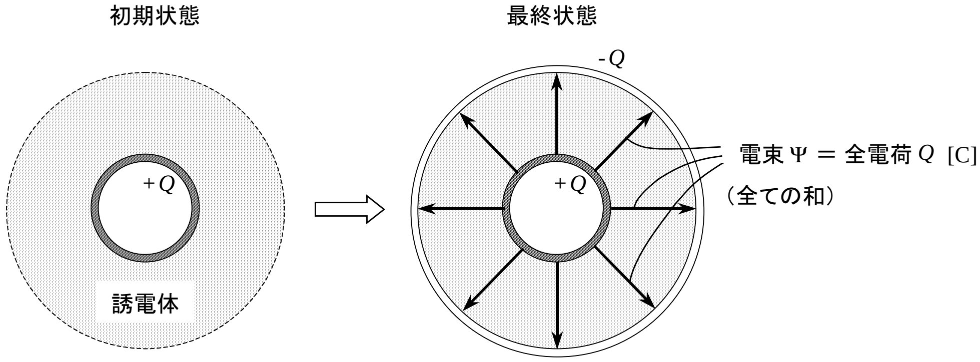


図 3.1 電束.

> r: 球状電荷(の中心)からの距離
> ρ: 円筒状電荷(の中心)からの距離

■電束密度 D

球状(点状)電荷の場合

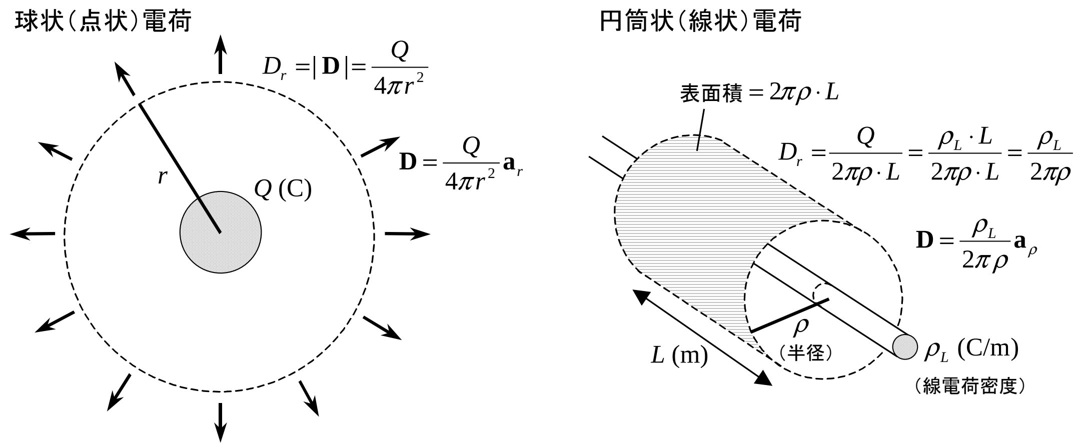
$$D=\underset{\text{（大きさのみ）}}{\frac{\text{電束}}{\text{表面積}}} = \frac{\Psi}{4\pi r^2}=\frac{Q}{4\pi r^2}=\varepsilon_0\underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{E}=\varepsilon_0 E \qquad (3.1)$$

円筒状(線状)電荷の場合

$$D=\frac{\text{電束}}{\text{表面積}} = \frac{Q}{2\pi\rho\cdot L}=\frac{\rho_L\cdot L}{2\pi\rho\cdot L}=\frac{\rho_L}{2\pi\rho}=\varepsilon_0\underbrace{\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}}_{E}=\varepsilon_0 E \qquad (3.2)$$

電束密度は，単位面積当りの電束の数であり，電界と同じ向きをもつベクトルである。つまり

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E} \quad \text{（自由空間）} \qquad (3.3)$$



(a) (b)

図 3.2 電束密度.

[参考]電束密度を求める問題の基本的な考え方（点状、線状電荷の場合）

1. 閉曲面を通過する電束＝全電荷量を求める。
2. 1. で求めた電束を与えられた閉曲面の面積で割る。
3. 電束密度の方向を示す単位ベクトルをかける。

※ 無限に広がる面電荷の場合は、式(3.3)と式(2.9)を使って電束密度 **D** を求めることができる。

[2]ガウスの定理

“ 閉曲面を通過する電束は，その面で囲んだ全電荷量に等しい ”

$$\Leftrightarrow \quad \Psi = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = Q \tag{3.4}$$

多数の点電荷 $Q = \sum_n Q_n$

線電荷 $Q = \int \rho_L dL$

面電荷 $Q = \int \rho_S dS$

体積電荷分布 $Q = \int \rho_v dv$

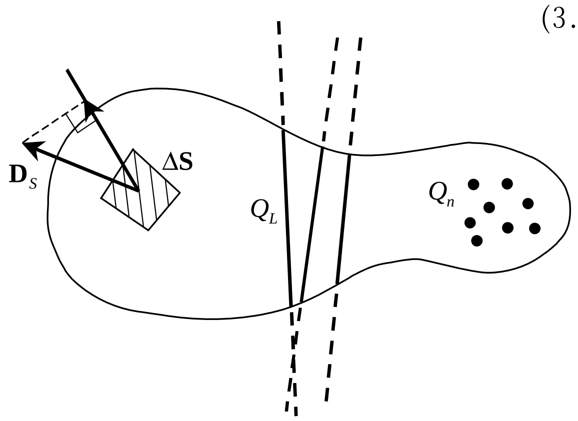


図 3.3 ガウスの定理.

■ガウスの定理の応用：体積素

$$Q = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \qquad (\Delta v = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z) \tag{3.5}$$

■ガウスの定理の微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_v \qquad \Leftrightarrow \qquad Q = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dv \tag{3.6}$$

ナブラ演算子： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$

■発散

$$\nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{（直交座標）} \tag{3.7}$$

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho D_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{（円筒座標）} \tag{3.8}$$

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \, D_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{（球座標）} \tag{3.9}$$

上式で $D_x, D_y, D_z, D_\rho, D_\phi$ 等は各座標系での各方向成分を表す（以下の式参照)。

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D} = D_\rho\mathbf{a}_\rho + D_\phi\mathbf{a}_\phi + D_z\mathbf{a}_z$$

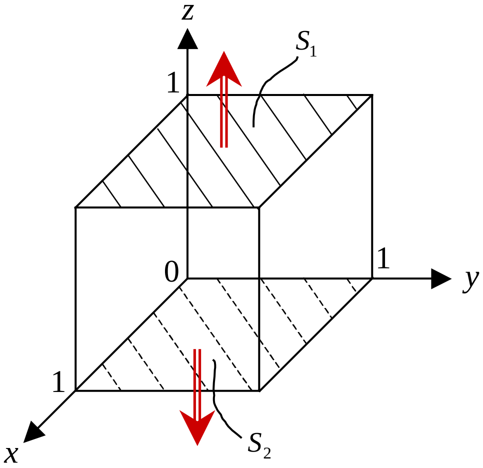
$$\mathbf{D} = D_r\mathbf{a}_r + D_\theta\mathbf{a}_\theta + D_\phi\mathbf{a}_\phi$$

電束密度 D から全電荷量を計算する例（図 3.4）

$$Q=\oint \mathbf{D}_S\cdot d\mathbf{S}$$

$d\mathbf{S}$: 面素ベクトル → その方向は面の外方向への法線方向（P.52）

$$=\underbrace{\int_0^1\int_0^1(D_z\mathbf{a}_z)_{z=1}\cdot(dxdy\,\mathbf{a}_z)}_{S_1\text{を通過する全電束}}+\underbrace{\int_0^1\int_0^1(D_z\mathbf{a}_z)_{z=0}\cdot(-dxdy\,\mathbf{a}_z)}_{S_2\text{を通過する全電束}}$$
$$+\int_0^1\int_0^1(D_x\mathbf{a}_x)_{x=1}\cdot(dydz\,\mathbf{a}_x)+\int_0^1\int_0^1(D_x\mathbf{a}_x)_{x=0}\cdot(-dydz\,\mathbf{a}_x)$$
$$+\int_0^1\int_0^1(D_y\mathbf{a}_y)_{y=1}\cdot(dxdz\,\mathbf{a}_y)+\int_0^1\int_0^1(D_y\mathbf{a}_y)_{y=0}\cdot(-dxdz\,\mathbf{a}_y) \quad (3.10)$$



円柱はどうか？
考えてみよ。

図 3.4 立方体内の全電荷量を電束密度 **D** から求める.

D → Q を求める問題

1. $Q=\oint \mathbf{D}_S\cdot d\mathbf{S}$

2. $\rho_v=\nabla\cdot\mathbf{D} \;\rightarrow\; Q=\int\rho_v dv$

4 章のポイント

[1]仕事

電荷 Q を B 点から A 点まで動かすのに必要な仕事は次式で定義される。

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \qquad \boxed{\text{仕事 } W \text{ は静電界中に選んだ経路には無関係である}} \tag{4.1}$$

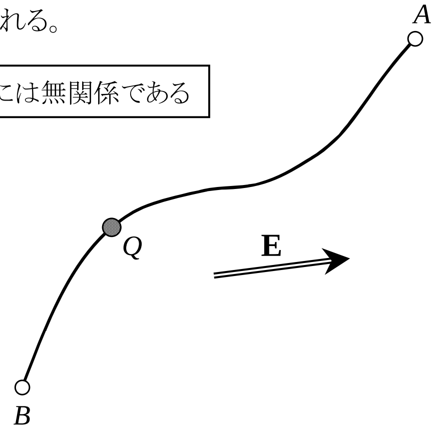


図 4.1 電界 $\mathbf{E}$ 中の電荷 Q の BA 間経路.

■3 つの座標系の dL

$$d\mathbf{L} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z \qquad \text{(直交座標)}$$
$$d\mathbf{L} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\, d\phi\,\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z \qquad \text{(円筒座標)} \tag{4.2}$$
$$d\mathbf{L} = dr\,\mathbf{a}_r + r\, d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(球座標)}$$

式(4.1)の右辺に“－”が付く理由

電界中で電荷を電界にさからって動かすには，電界の作用力に等しい反対の力を作用させなければならないことによる。例えば，電荷 Q (>0)を電界 $E_x(>0)$内で動かすときの力を計算してみる（図 4.2）。電荷を位置 x_A から x_B へ動かす場合の仕事は

$$W = -Q\int_{x_A}^{x_B} E_x dx = -QE_x(x_B - x_A) = QE_x(x_A - x_B) \ > \ 0$$

となり，これはエネルギーの消費，すなわち仕事を必要とする。逆に，電荷を位置 x_B から x_A へ動かす場合は

$$W = -Q\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -Q\int_{x_B}^{x_A} E_x dx = -QE_x(x_A - x_B) \ < \ 0$$

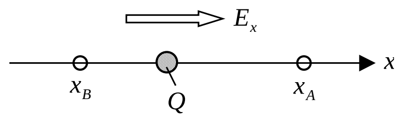


図 4.2 電界と仕事.

となり，エネルギーの消費は負となり，電界から仕事が与えられることになる。

[2]電位差

単位電荷（Q = 1C）を B 点から A 点まで動かす仕事に相当する。

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \tag{4.3}$$

B 点をゼロ電位（基準）にすると，電位差 V_{AB} は単に電位 V と表すことができる。

例 1：点電荷 Q の場合

$$\begin{aligned} V_{AB} &= -\int_B^A \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r\cdot(dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi) \\ &= -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

例 2:線電荷 ρ_L の場合

$$
\begin{aligned}
V_{AB} &= -\int_B^A \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\, d\phi\,\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z) \\
&= -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} d\rho \\
&= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

[3]電位の勾配 ＝ 電界

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} = -\nabla V = -\,\mathrm{grad}\, V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) && \text{(直交座標)} \\
&= -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) && \text{(円筒座標)} \\
&= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right) && \text{(球座標)}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

■電位 V と電位 E の関係

$$
V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\nabla V = -\,\mathrm{grad}\, V \tag{4.7}
$$

（線積分の関係）　　　　　（微分の関係）

[4]電気双極子（$d << R_1, R_2$）

大きさが等しく反対符号の 2 つの点電荷があり，それらが電位や電界を求めようとしている点 P までの距離に比べて短い距離に存在するとき，その 2 つの点電荷を**電気双極子**とよぶ。そのときの点 P での電位と電界は，次のような近似式で与えられる。

電位

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \text{（正確な式）} \\ &\cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r \cdot r} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{（双極子近似式）} \end{aligned} \tag{4.8}$$

電界

$$\begin{aligned} E &= -\nabla V_P = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right) \\ &\cong \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right) \qquad \text{（双極子近似式）} \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\mathbf{a}_{R_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\mathbf{a}_{R_2} \qquad \text{（正確な式）}$$

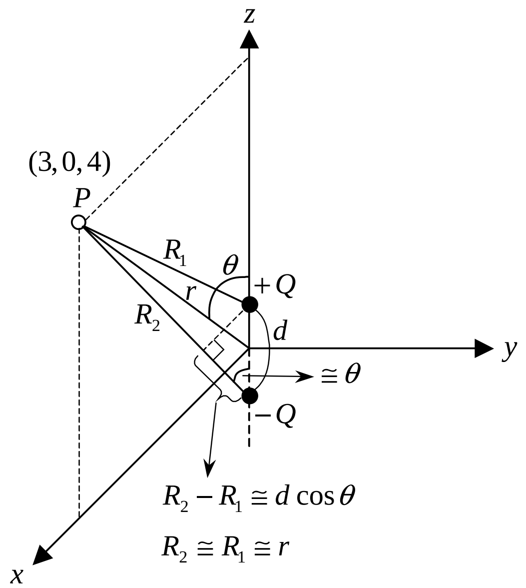


図 4.3 電気双極子の構成図.

[5]静電界のエネルギー

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,d\mathbf{v} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{v} = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\mathbf{D}|^2}{\varepsilon_0} d\mathbf{v} \tag{4.10}$$

エネルギー密度

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \tag{4.11}$$

5 章のポイント

[1]電流密度

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} = \rho_v(-\mu \mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} \qquad (5.1)$$

ρ_v ：体積電荷密度
$\mathbf{v}$ ：電子速度
μ ：移動度
σ ：導電率

[2]導体における静電界

“ 導体内部の任意の点には電荷も電界も存在しない。電荷は面電荷密度として表面に現れる。(教科書 p. 115) ”

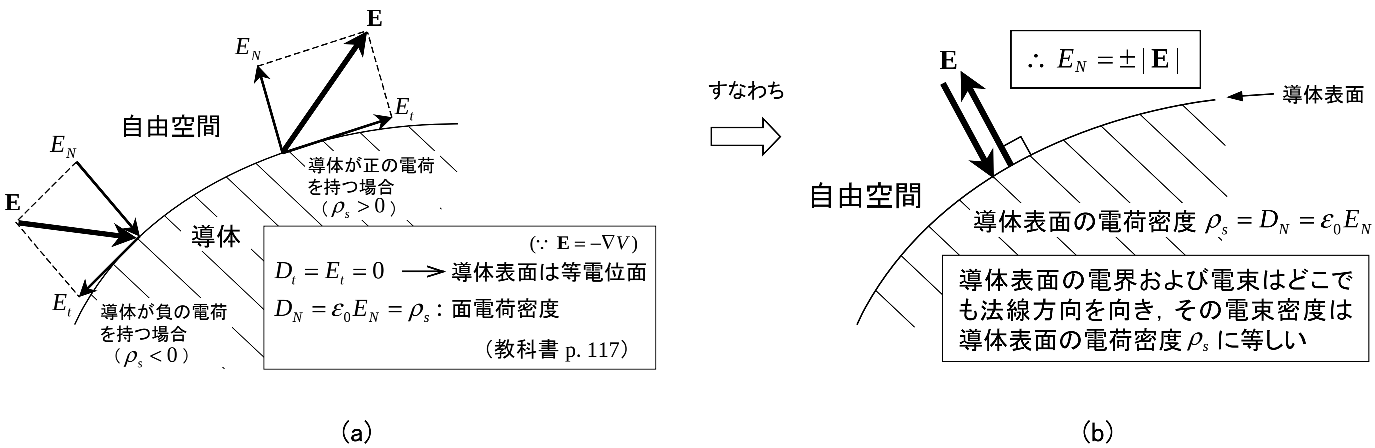


図 5.1 導体と自由空間の間の境界条件.

[3]誘電体の性質

誘電体に電界をかけると，分子の正負の電荷が変位し双極子として作用するようになる。これを分極とよび，電束密度は分極ベクトル $\mathbf{P}$ を含む次式に修正される。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \mathbf{E} \qquad (5.2)$$

ε_R ：比誘電率

すなわち	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$	→	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \mathbf{E}$
	(真空)		(誘電体)

[4]2 つの完全誘電体間の境界条件

<u>**D**の境界条件</u>

法線成分は連続　　$D_{N1} = D_{N2}$

接線成分は不連続　$\dfrac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

（教科書 p. 129-130）

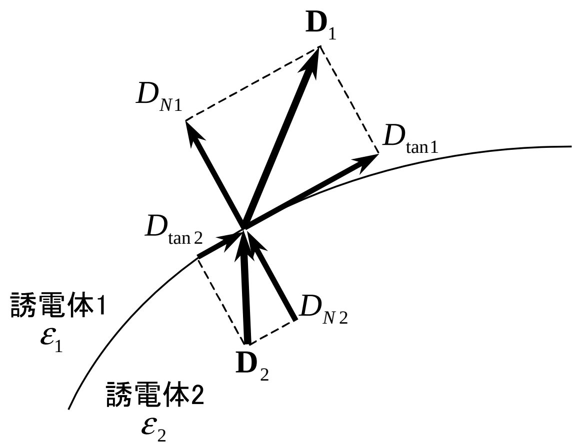


図 5.2　2 つの完全誘電体間の境界条件.

[5]影像法

影像法は図 5.3(b)のように導電面（＝導体，等電位面）が存在するときに，点電荷や線電荷による電界等を求めるときに便利な計算法である。図 5.3(a)のように，1 個の孤立電荷が自由空間中に置かれている場合は，その電界が

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \tag{5.3}$$

と与えられる。しかし，図 5.3(b)のように導電面が存在するときには，電界分布は大きく変化する。すなわち，導電面内の電界成分 E_t はゼロになるため，導電面上の電界はどの位置でも必ず垂直になる。このときの導電面の上部にできる電界分布は，導電面の下部に 1 個の負電荷をおいた場合の分布（図 5.3(c)）と同じになっている。図 5.3(c)では，2 つの電荷が作る電界を足し合わせることで全体の電界を求めることができるので，計算は非常に簡単になる。このことを利用して，導電面の上部にできる電界を計算する方法を**影像法**とよぶ。また，図 5.3(c)で導電面の下部においた反対の極性をもつ電荷を**影像電荷（image charge）**とよんでいる。

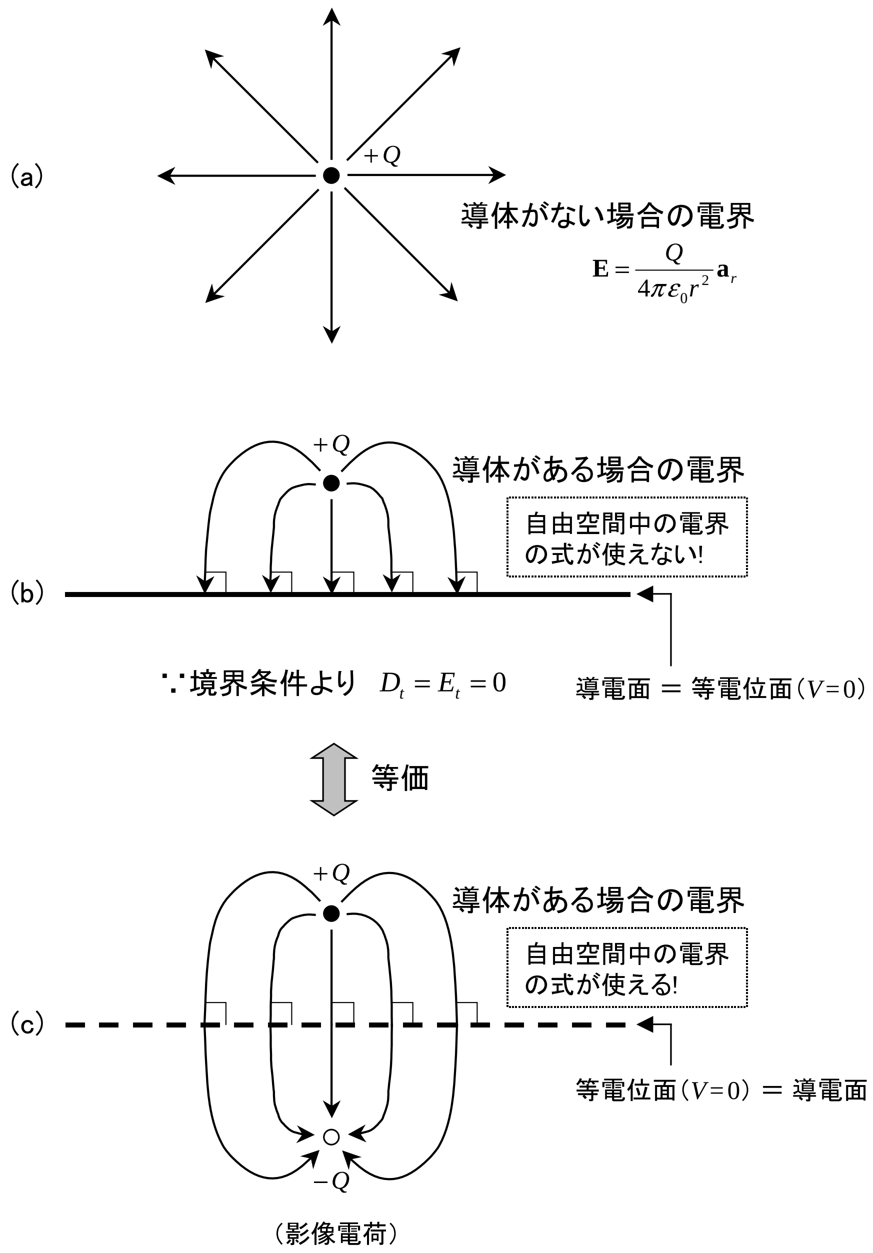


図 5.3 影像法.