数理物理工学ガイダンス（復習問題）

2015 年 4 月 9 日

問 1（粒子・波動二重性）

・「粒子」とは、運動量 p と運動エネルギー E でその運動が表されるものをいう。

・「波動」とは、波数 $k\ (=2\pi/\lambda)$ と角周波数 ω でその運動が表されるものをいう。

量子力学の言う「粒子・波動二重性」を表す 2 つの式を、上の 4 つの変数（ p ， E ， k ， ω ）とプランク定数 $\hbar = h/2\pi$ を用いて書き表しなさい。

これらをド・ブロイの関係式とよぶ。またこれらを使って、運動エネルギー E と波数 k の関係式（分散関係）を求めなさい。

問 2（シュレディンガー方程式）

量子力学では、運動量 p とエネルギー E は波動関数に作用する演算子と考える。その運動量演算子とエネルギー演算子の式は次のように与えられる。

・ $p \to \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ あるいは $p \to \dfrac{\hbar}{i}\nabla$

・ $E \to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$

シュレディンガー方程式は、電子の全エネルギー $E = \dfrac{p^2}{2m} + V$ を上記の演算子で表わし、その両辺を波動関数 φ に左から作用させた波動方程式である。シュレディンガー方程式を以下に書きなさい。

問 3（エネルギー量子化）

図 1 の無限大井戸型ポテンシャルに閉じ込められた電子波の基底状態（最低エネルギー準位）と第一励起状態の波動関数の概形を図中に描きなさい。また、それらの固有エネルギーの式 E_1, E_2 を以下に書きなさい。ただし井戸幅は L、電子の質量は m とする。

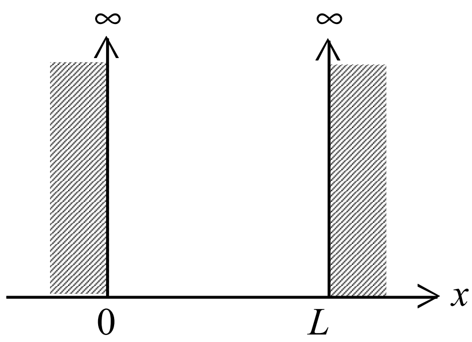

図 1. 井戸型ポテンシャル

問 4（エルミート演算子）

ある演算子 **A** が次の関係を満たすとき、演算子 **A** はエルミート演算子とよばれる。

$$\int \varphi^* \mathbf{A} \psi \, d\mathbf{v} = \int (\mathbf{A}\varphi)^* \psi \, d\mathbf{v}$$

(1) エルミート演算子の固有値 $a\ (= \int \varphi^* \mathbf{A} \varphi \, d\mathbf{v})$ は実数であることを示しなさい（$\mathbf{A}\varphi = a\varphi$ とした ）。

(2) 運動量演算子 $p = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ はエルミート演算子であることを示しなさい。