モノポール背景場をもつ余剰次元における相転移構造

学籍番号：127s103s
素粒子宇宙論研究室　池田毅

参考文献

Wu, Tai Tsun Yang, Chen Ning (1976), "Dirac monopole without strings: monopole harmonics", *Nuclear Physics. B* **107** (3): 365–380,

Seiho Matsumoto, Makoto Sakamoto, Shogo Tanimura (2001),"Spontaneous breaking of the rotational symmetry induced by monopoles in extra dimensions"

Physics Letters. B **518** (2001) 163–170

目的

S^2を余剰次元に持つ $M^4 \times S^2$ スカラー場の理論を考える。

この時、S^2 にモノポール背景場を入れると相転移構造が現れ、真空期待値が座標依存性を持つ

流れ

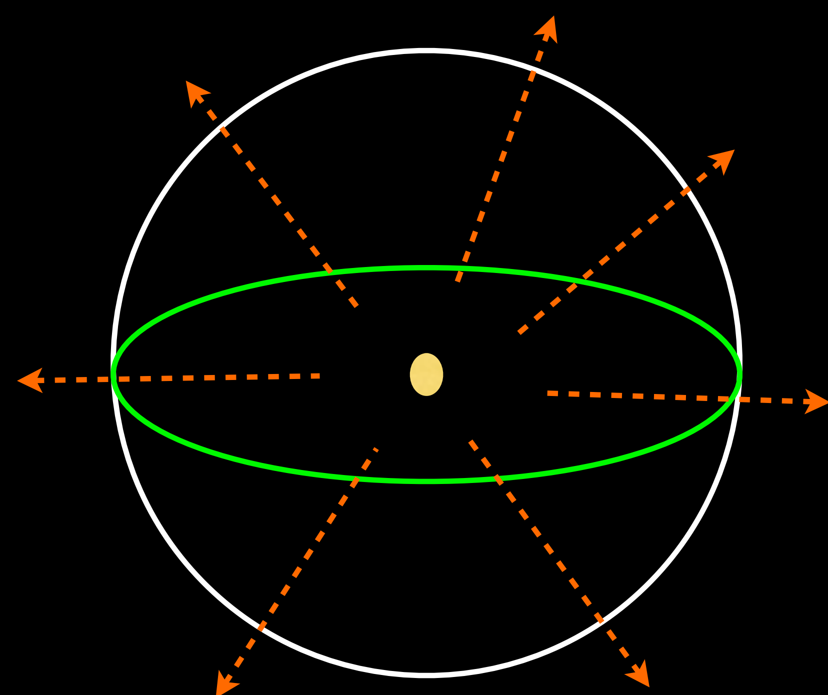
- 単電荷と同様に放射状で一様な磁場を持つモノポールを考え、そのときegが量子化されることを示す

- モノポールの周りの電子の角運動量の固有値が　$l=|q|,|q|+1,|q|+2,...$　とることを示す。

- S^2を余剰次元に持つ６次元スカラー場を考え、モノポールがある場合、相転移構造が現れること具体例で示す

モノポールの設定

単電荷と同様の放射状の磁場を作る

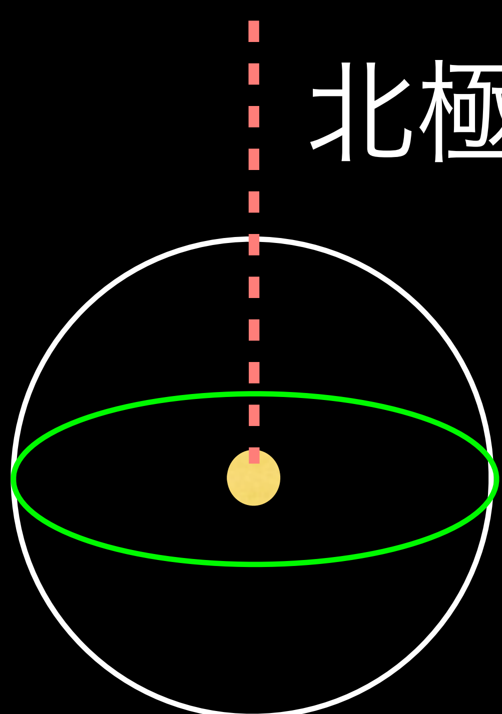


$$\boxed{\vec{B} = \frac{g}{r^3}\vec{r}}$$

特異線

$$(A_r) = (A_\theta) = 0$$

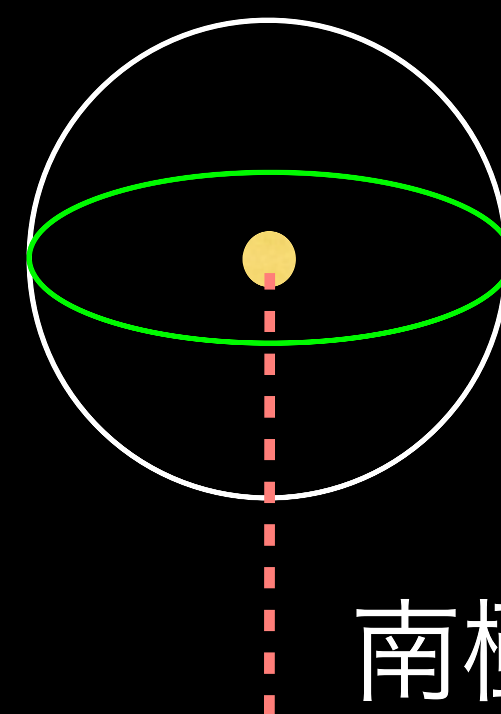
$$A_\phi = \frac{-g}{r \sin\theta}(1 + \cos\theta)$$



北極に特異線

$$(A_r) = (A_\theta) = 0$$

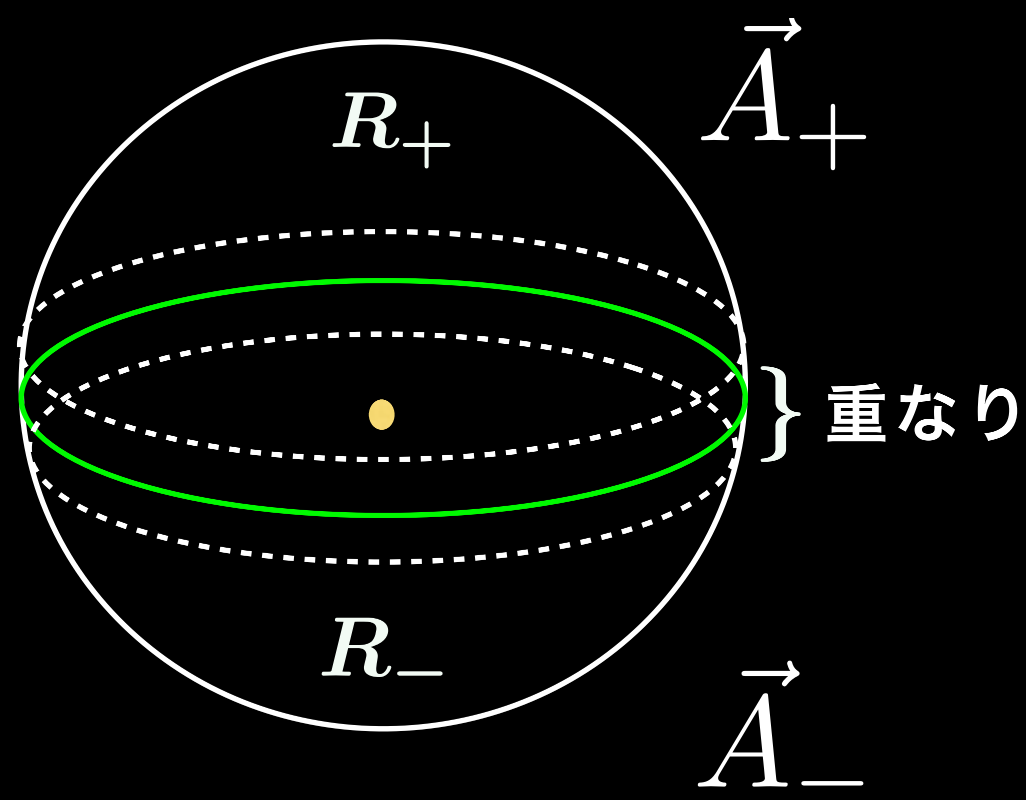
$$A_\phi = \frac{g}{r \sin\theta}(1 - \cos\theta)$$



南極に特異線

一つのベクトルポテンシャルだと
困難がある。

二つの領域



重なりではゲージ変換によって
$\vec{A}$が結ばれている必要がある

$$\vec{A}_+ = \vec{A}_- + \nabla\chi$$

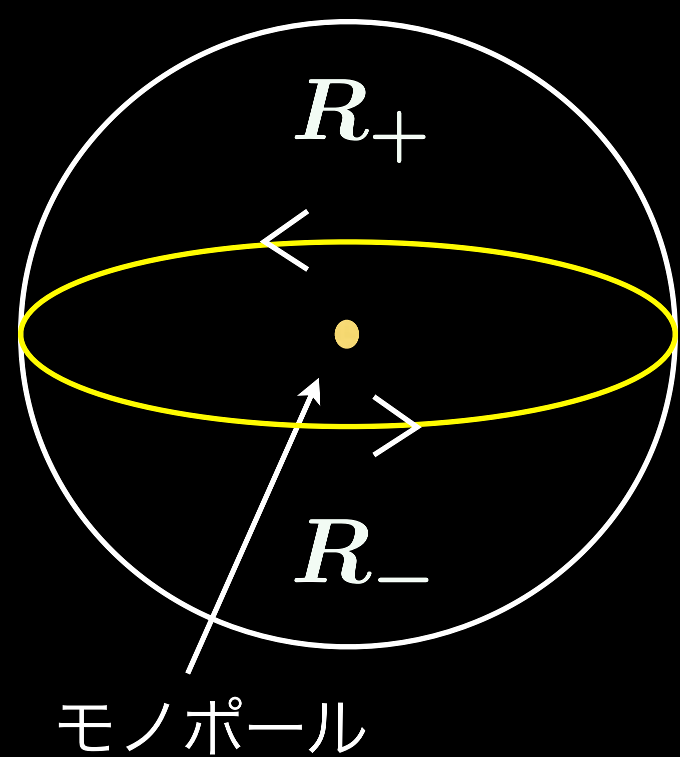
量子化条件

$$eg = \frac{1}{2}\hbar c \cdot n$$

を求める

総磁束

二つの領域における磁束を数える

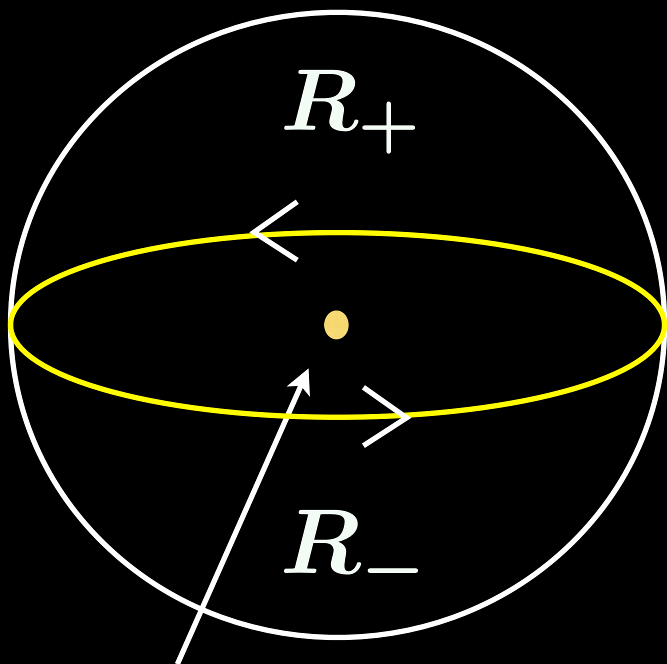


$$\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_+ + \Phi_-$$

左辺 $= \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{g}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi g$

右辺 $= \Phi_+ + \Phi_- = \int \left(\vec{B}_+ + \vec{B}_- \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$= \oint_c \left(\vec{A}_+ - \vec{A}_- \right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



$\boxed{\vec{A}_+ = \vec{A}_- + \nabla\chi}$ より

$$= \oint_c \nabla\chi \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \chi_f - \chi_i$$

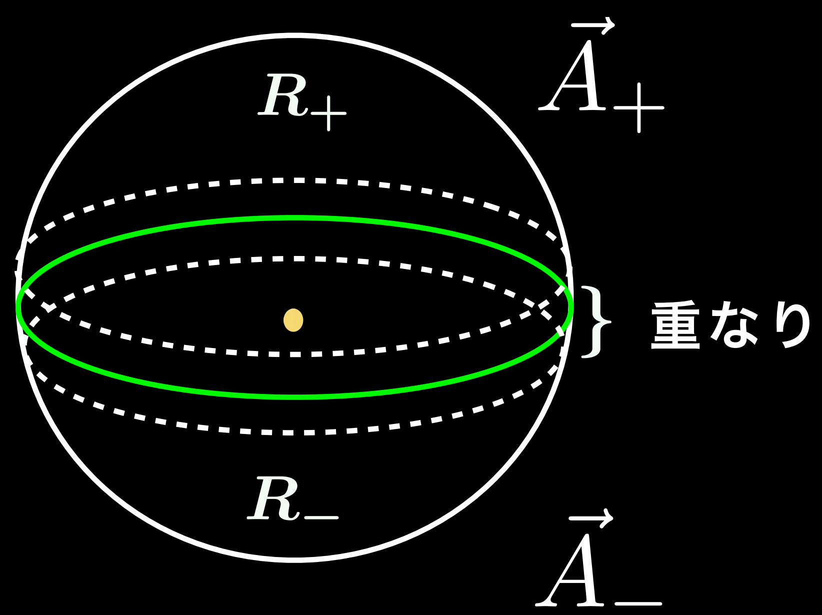
ゲージパラメタと磁荷の関係

$$\boxed{\chi_f - \chi_i = 4\pi g}$$

波動関数

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla+\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\vec{A}\right)^2+V(\vec{r})$$

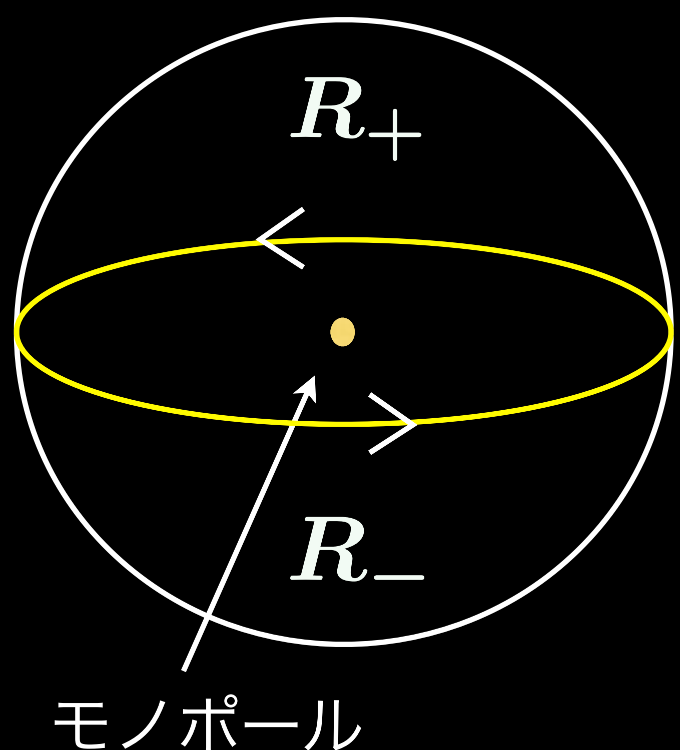
重なりの領域においてゲージ変換
で結ばれている必要があるので



$\vec{A}_+=\vec{A}_-+\nabla\chi$ より

$$\psi_+=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\chi\right)\psi_-$$

波動関数の一価



ψ_+ と ψ_- は一価であることから

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\chi\right) = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{e}{\hbar c}(\chi_f - \chi_i) = 2n\pi}}$$

$n =$ 整数

量子化条件

初めと１周後のゲージパラメタの差

$$\boxed{\chi_f - \chi_i = 4\pi g}$$

$$+$$

波動関数の１価性

$$\boxed{\frac{e}{\hbar c}(\chi_f - \chi_i) = 2n\pi}$$

$$\Downarrow$$

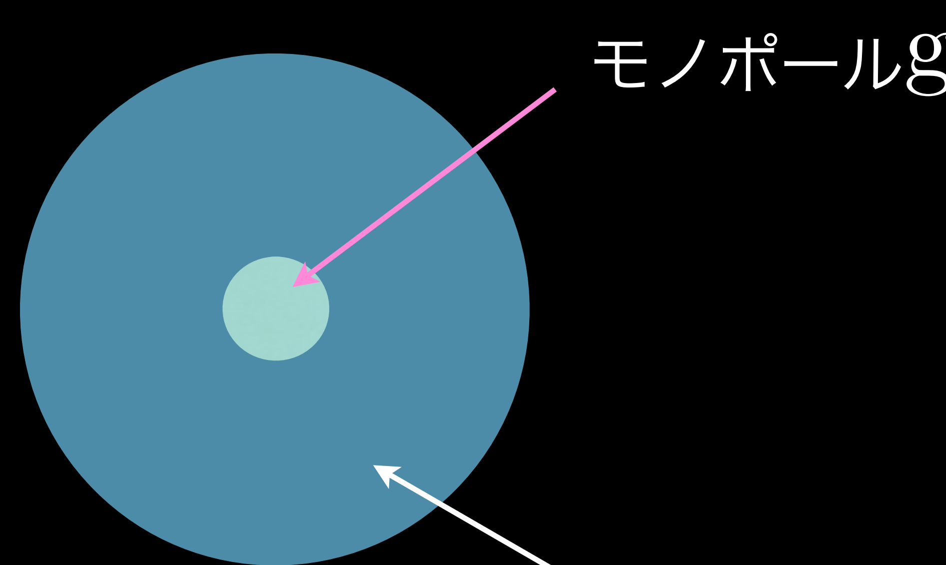
モノポールの存在するときの量子化条件

$$\underline{eg = \frac{1}{2}\hbar c \cdot n}$$

$n =$ 整数

モノポールの周りの電子のふるまい

- 角運動量のとりうる固有値を示す。
- 角運動量の固有方程式を示す。



波動関数

以降は自然単位系で考える

また　$q = \mathrm{e}g = \frac{1}{2}n$　とおく

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \mathrm{e}\mathbf{A}_{\pm})^2\psi_{\pm} + V\psi_{\pm} = H\psi_{\pm}$$

ベクトルポテンシャル

$$(A_r) = (A_\theta) = 0$$

$$(A_\phi)_+ = \frac{g}{r\sin\theta}(1 - \cos\theta)$$

$$(A_\phi)_- = \frac{-g}{r\sin\theta}(1 + \cos\theta)$$

ゲージ変換

$$\vec{A}_+ = \vec{A}_- + \nabla\chi$$

$$\psi_+ = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q\phi}\psi_-$$

$$\psi = R(r)Y(\theta, \phi)$$

と分解することができ、角度方向のみ考える。特に角運動量を考える

角運動量オペレーター

この系において $[L_i, L_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}L_k$ を満たし、

保存量である角運動量オペレーターは

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - Ze\boldsymbol{A}) - \frac{q\boldsymbol{r}}{r}}$$

と表される。

この角運動量に対する固有値
と固有方程式を示す

角運動量固有値

$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}L_k$ より

$$\mathrm{L}^2\, Y_{q,l,m} = l(l+1)Y_{q,l,m}$$
$$L_z Y_{q,l,m} = mY_{q,l,m}$$
$$\Rightarrow \quad m = -l, -l+1, \ldots.., l$$

固有値の取りうる値

$\boldsymbol{L}^2 = [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - Ze\boldsymbol{A})]^2 + q^2$ および $\boldsymbol{L}^2 Y = l(l+1)Y$ から

$$\Rightarrow \quad l(l+1) - q^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l = |q|, |q|+1, |q|+2, \ldots}$$

固有方程式

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - Ze\boldsymbol{A}) - \frac{q\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - Ze\boldsymbol{A})]^2 + q^2$$ より

$$(L^2 - q^2)Y_\pm = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - iq(\pm 1 - \cos\theta)\right)^2\right)Y_\pm$$

$$= [l(l+1) - q^2]Y_\pm$$

後に使う

以上から

$$\boldsymbol{eg = \frac{1}{2}\hbar c \cdot n} \qquad n = \text{整数}$$

$$\boxed{l = |q|, |q|+1, |q|+2, \ldots}$$

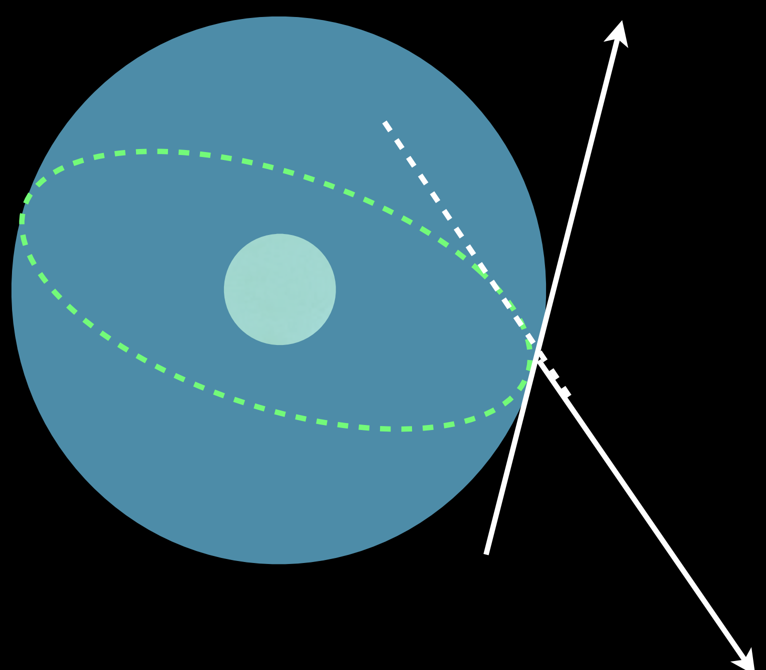
$$\begin{aligned}(L^2 - q^2)Y_\pm &= -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - iq(\pm 1 - \cos\theta)\right)^2\right)Y_\pm \\ &= [l(l+1) - q^2]Y_\pm\end{aligned}$$

モノポール背景場をもつ 余剰次元における相転移構造

$M^4 \times S^2$ スカラー場

作用は以下のようになる

$$S = \int d^4x d\theta d\phi r^2 \sin\theta \left\{ -\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \theta}\right| - \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left|\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \phi} - iq(\pm 1 - \cos\theta)\Phi_\pm\right|^2 \right.$$
$$\left. + \eta^{\mu\nu}\frac{\partial \Phi_\pm^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial x^\nu} + \mu^2 \Phi_\pm^* \Phi_\pm - \lambda(\Phi_\pm^*\Phi_\pm)^2 \right\}$$



(θ, ϕ)は余剰次元の座標

rは余剰次元の半径、定数

$U(1) \times SU(2)$

M^4方向は対称性を破らない古典的なエネルギーについて考える。

M^4方向を最小化するエネルギーE

$$E = \int d\theta d\phi r^2 \sin\theta \left\{ \underline{\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial\theta}\right|^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left|\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial\phi} - iq(\pm 1 - \cos\theta)\Phi_\pm\right|^2} \right.$$

$$\left. - \mu^2 \Phi_\pm^* \Phi_\pm + \lambda(\Phi_\pm^*\Phi_\pm)^2 \right\}$$

$$\downarrow$$

$$E = \int d\theta d\phi r^2 \sin\theta \left\{ \underline{\Phi_\pm^* \frac{L^2 - q^2}{r^2} \Phi_\pm} - \mu^2 \Phi_\pm^* \Phi_\pm + \lambda(\Phi_\pm^*\Phi_\pm)^2 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{l(l+1) - q^2}{r^2}\Phi_\pm \quad \begin{cases} l = |q|, |q|+1, |q|+2, \ldots\ldots \\ m = -l, -l+1, \ldots.. \end{cases}$$

$l=|q|$ の状態のみで近似的に考える

$$|q|(|q|+1)-|q|^2=|q|$$

$$\boxed{E \geq \int d\theta d\phi \sin\theta \left\{ \left(|q|-\mu^2 r^2\right) |\Phi_\pm|^2 + \lambda r^2 |\Phi_\pm|^4 \right\}}$$

- $|q|-\mu^2 r^2 \geq 0$

  $<\Phi>=0$

- $|q|-\mu^2 r^2 < 0$

  $<\Phi>\neq 0$

$$\boxed{r_q=\frac{\sqrt{|q|}}{\mu} \quad \text{臨界半径}}$$

$q=0$ の場合

$$E \geq \int d\theta d\phi \sin\theta \left\{ \left(|q| - \mu^2 r^2\right) |\Phi_\pm|^2 + \lambda r^2 |\Phi_\pm|^4 \right\}$$ より

$$< \Phi_\pm >= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\mu \qquad U(1) \times SU(2) \Rightarrow SU(2)$$

相転移

- $q \neq 0$

$$U(1) \times SU(2) \Rightarrow ?$$

$$< \Phi > = 0 \qquad < \Phi > \neq 0$$

0 $\qquad r_q \qquad$ r

- $q = 0$

$$SU(2)$$

$$< \Phi_{\pm} > = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \mu$$

0 $\qquad$ r

$q = 1/2$ の場合を考え、対称性を見る

$$\Phi^{1/2}_{\pm}(\theta,\phi) = v\Big[-\mathrm{e}^{-(\phi-\gamma)/2}\sin(\beta/2)\cos(\theta/2)$$
$$+\,\mathrm{e}^{i(\phi-\gamma)/2}\cos(\beta/2)\sin(\theta/2)\Big]\,\mathrm{e}^{\pm\phi/2}$$

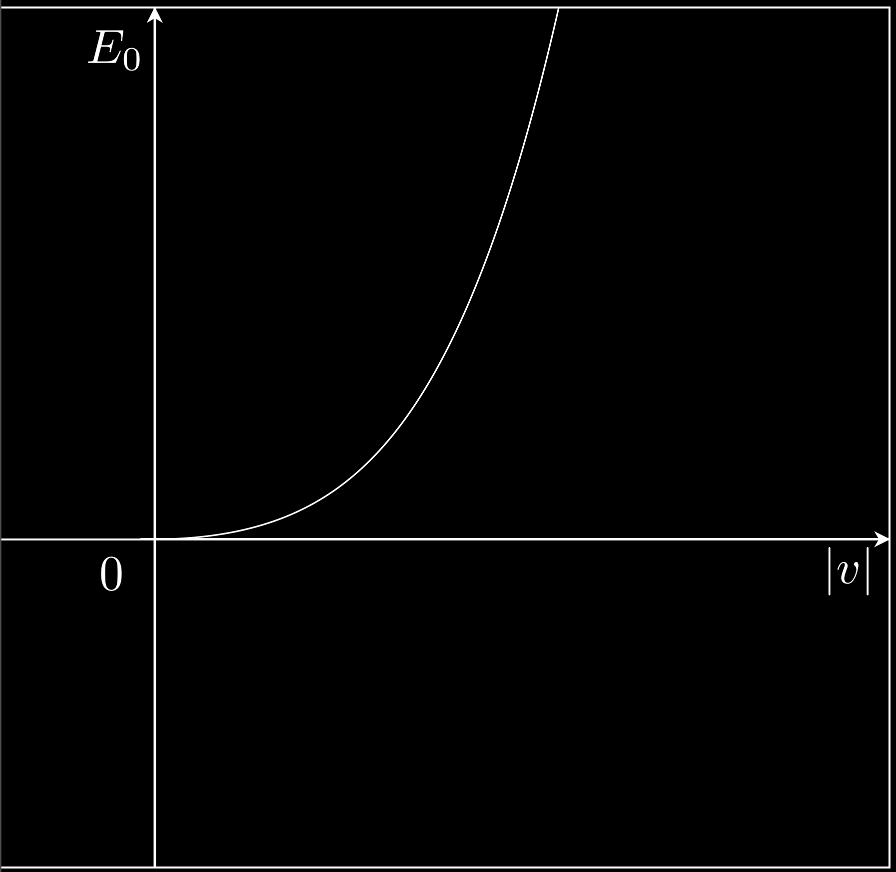
北極点にゼロ点を置く

$$\Phi^{1/2}_{\pm}(\theta,\phi) = v\mathrm{e}^{-i(1\pm 1)\phi/2}\sin(\theta/2)$$

$E \geq \int d\theta d\phi \sin\theta \left\{ \left(|q| - \mu^2 r^2\right)|\Phi_{\pm}|^2 + \lambda r^2 |\Phi_{\pm}|^4 \right\}$ より

$$\boxed{E_0 = -2\pi(\mu^2 r^2 - 1/2)v^2 + \frac{2}{3}2\pi\lambda v^4}$$

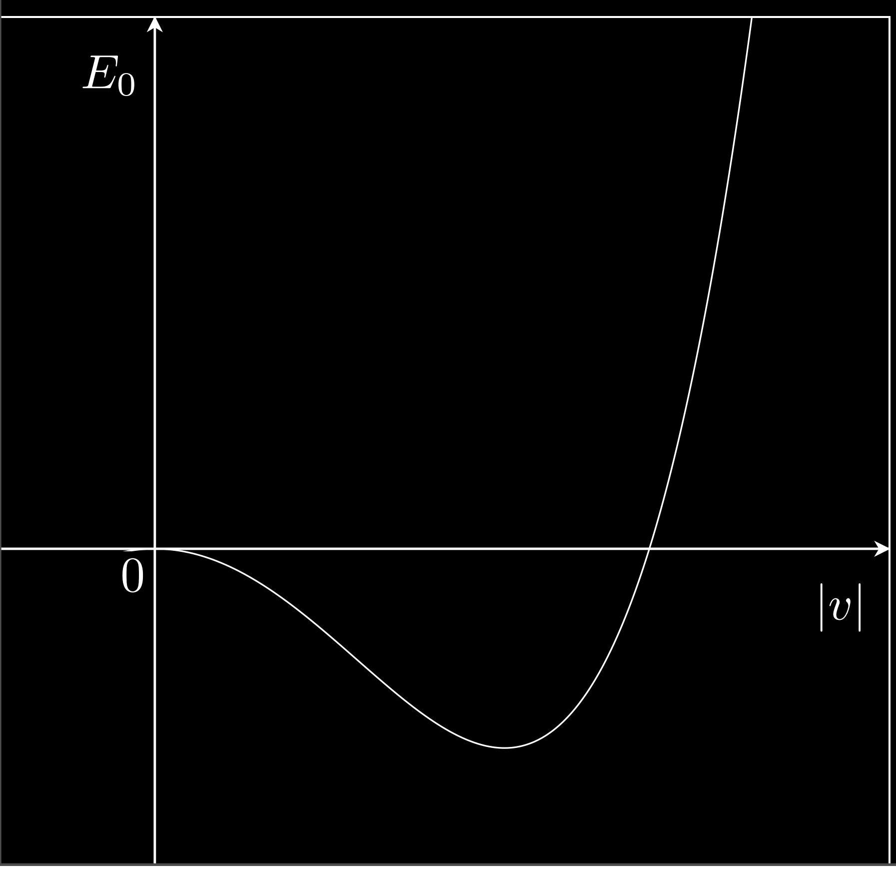
$E_0 = -2\pi(\mu^2 r^2 - 1/2)v^2 + \frac{2}{3}2\pi\lambda v^4$ のグラフ



- $r \le (\sqrt{2}\mu)^{-1}$

$v = 0$ にて極小

真空期待値 $<\Phi>=0$



- $r > (\sqrt{2}\mu)^{-1}$

$v = \frac{3}{4\lambda r^2}(\mu^2 r^2 - 1/2)$ にて極小

$$<\Phi_\pm>=\sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}(\mu^2 r^2 - 1/2)}\mathrm{e}^{i(1\pm 1)\phi/2}\sin(\theta/2)$$

対称性

- $r > (\sqrt{2}\mu)^{-1}$

$$\left(\Phi_+^{1/2}, \Phi_-^{1/2}\right)(\theta,\phi) \longrightarrow \mathrm{e}^{it}\left(\mathrm{e}^{it}\Phi_+^{1/2}, \mathrm{e}^{-it}\Phi_-^{1/2}\right)(\theta,\phi-2t)$$

という $U(1)(\equiv U'(1))$ 対称性を持つ

$$< \Phi_+ > = \sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}}(\mu^2 r^2 - 1/2)\mathrm{e}^{i\phi}\sin(\theta/2)$$

$$< \Phi_- > = \sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}}(\mu^2 r^2 - 1/2)\sin(\theta/2)$$

$q = 1/2$のまとめ

- $r \leq (\sqrt{2}\mu)^{-1}$

$$< \Phi >= 0 \quad \Rightarrow \quad U(1) \times SU(2)$$

- $r > (\sqrt{2}\mu)^{-1}$

$$< \Phi_{\pm} >= \sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}(\mu^2 r^2 - 1/2)} \mathrm{e}^{i(1\pm1)\phi/2} \sin(\theta/2) \quad \Rightarrow \quad U'(1)$$

$U(1) \times SU(2)$

$U'(1)$

$< \Phi >= 0$

$< \Phi_{\pm} >= \sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}(\mu^2 r^2 - 1/2)} \mathrm{e}^{i(1\pm1)\phi/2} \sin(\theta/2)$

0

$r_{1/2}$

r

対称性まとめ

- $q = 1/2$

$$U(1) \times SU(2) \quad \Rightarrow \quad U'(1)$$

$$< \Phi >= 0$$

$$< \Phi_{\pm} >= \sqrt{\frac{3}{4\lambda r^2}(\mu^2 r^2 - 1/2)}\mathrm{e}^{i(1\pm 1)\phi/2}\sin(\theta/2)$$

$0 \qquad r_{1/2} \qquad r$

- $q = 0$

$$SU(2)$$

$$< \Phi_{\pm} >= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\mu$$

$0 \qquad r$

結論

この時、S^2 にモノポール背景場を入れると相転移構造が現れ、真空期待値が座標依存性を持つことを示した。