格子超対称量子力学の定式化と非摂動論的解析

素粒子宇宙理論研究室
巽　健太郎

[1] Taming the Leibniz rule on the lattice
M. Kato, M. Sakamoto, H. So, JHEP, 05(05):057
[2] A criterion for lattice supersymmetry: cyclic Leibniz rule
M. Kato, M. Sakamoto, H. So, R. Narayanan, H. Neuberger, JHEP, 2013(5):89

導入

$\boxed{\text{超対称性理論}}$ 標準模型を超えた理論として有力

- 超対称粒子はまだ見つかっていない

→ 低エネルギーでは超対称性が破れている

- 超対称性の破れは非摂動効果で起こると期待されている

→ 格子理論 最も有力な手法の１つ

導入

Witten index Δ_Wとは

エネルギーが0のボゾニックな状態数 $N^B_{E=0}$ と
フェルミオニックな状態数 $N^F_{E=0}$ の差

$$\Delta_W := N^B_{E=0} - N^F_{E=0}$$

- 超対称性の自発的破れの指数

導入

Witten index Δ_Wとは

- 超対称性の自発的破れの指数

超対称性が自発的に破れる

$$\Downarrow$$

$$\Delta_W \neq 0$$

(0エネルギー解の差)

:= 真空$|0\rangle$が超対称変換で変換する

$$\Updownarrow$$

$\Leftarrow$ 0エネルギー解が存在しない（基底状態が存在する）

厳密計算な必要が必要

導入

Witten index Δ_Wとは

単純な経路積分表示！

$$\Delta_W := \mathcal{N}^B_{E=0} - \mathcal{N}^F_{E=0}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right]$$

厳密には定義されていない

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d\tau L_E}$$

経路積分の厳密計算には格子理論が必要

導入

目標

経路積分を用いた

Witten index Δ_Wの厳密な計算

目次

1. 連続理論と超対称変換
2. 格子理論と超対称変換
3. Witten indexの計算

1．連続理論と超対称変換

超対称量子力学模型（ユークリッド時間）

$$L_E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}F^2 - iP(x)F + i\bar{c}\dot{c} - iP'(x)\bar{c}c$$

$$\begin{cases} x(\tau), F(\tau) : \text{ボーズ的変数} \\ c(\tau), \bar{c}(\tau) : \text{フェルミ的変数} \end{cases}$$

$P\big(x(t)\big)$: ポテンシャル

$$P\big(x(t)\big) = mx + g_3 x^2$$

$$P'\big(x(t)\big) = m + 2g_3 x$$

1．連続理論と超対称変換

超対称量子力学模型（ユークリッド時間）

$$L_E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}F^2 - iP(x)F + i\bar{c}\dot{c} - iP'(x)\bar{c}c$$

超対称変換

$$\begin{cases} \delta x = \bar{c} \\ \delta c = i\dot{x} + F \\ \delta \bar{c} = 0 \\ \delta F = -i\dot{\bar{c}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\delta} x = ic \\ \bar{\delta} c = 0 \\ \bar{\delta} \bar{c} = -\dot{x} - iF \\ \bar{\delta} F = -\dot{c} \end{cases}$$

$\delta, \bar{\delta}$: 超対称変換生成子

$$\Rightarrow$$

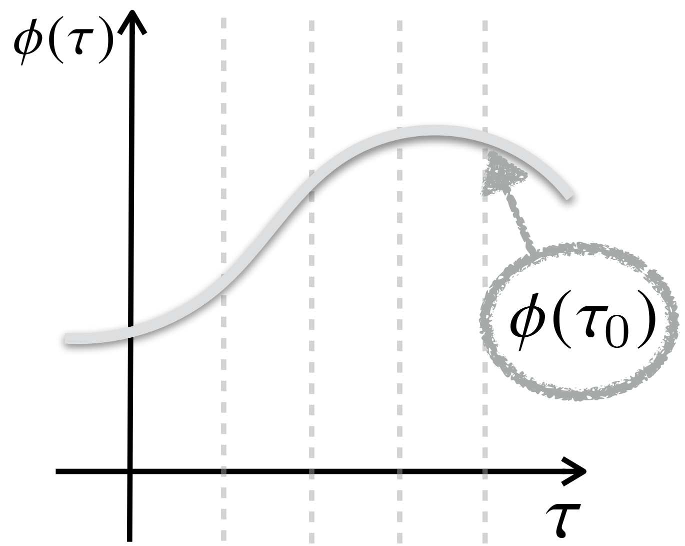
超対称代数

$$\{\delta, \bar{\delta}\}A = -2\frac{dA}{d\tau},$$

$$\delta\delta A = \bar{\delta}\bar{\delta}A = 0$$

2．　格子理論と超対称変換

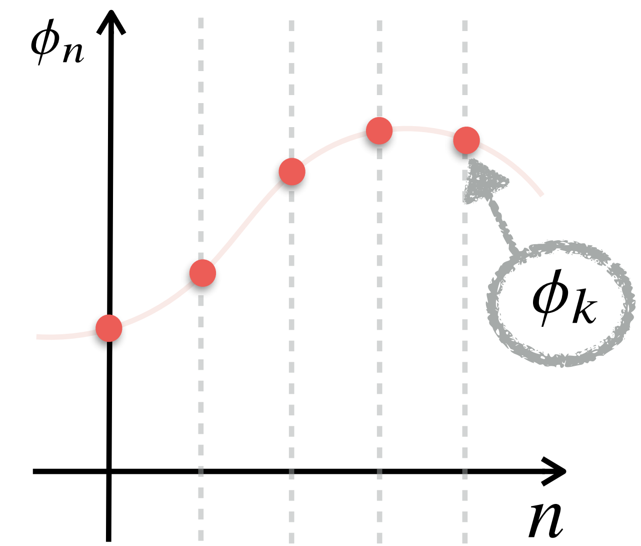
連続から格子へ



連続

$$\frac{d}{d\tau}\phi(\tau) = \phi(\tau)^2$$

離散化



格子

$$\sum_n \Delta_{kn}\phi_n = \sum_{nm} M_{knm}\phi_n\phi_m$$

任意性！

2. 格子理論と超対称変換

格子上の超対称量子力学模型

- ナイーブに離散化
- 微分の対称差分化

$$\frac{d}{d\tau} \to \varDelta_{kn} \left(= -\varDelta_{nk} \right)$$

- ポテンシャルを広げる

$$P(x) \to \sum_n m_{kn} x_n + g_3 \sum_{nm} M_{knm} x_n x_m$$

例

$$\sum_n \varDelta_{kn} \phi_n = \frac{\phi_{k+1} - \phi_{k-1}}{2}$$

2．格子理論と超対称変換

格子上の超対称量子力学模型

$$S = S_0 + S_m + S_{\rm int}$$

$$S_0 = \frac{1}{2}(\varDelta x, \varDelta x) + \frac{1}{2}(F, F) + i(\bar{c}, \varDelta c)$$

$$S_m = -i(x, mF) - i(\bar{c}, mc)$$

$$S_{\rm int} = -ig_3(F, \{x, x\}) + 2ig_3(c, \{x, \bar{c}\})$$

$$P(x(t)) \to \sum_n m_{kn} x_n + g_3 \sum_{n,m} M_{knm} x_n x_m$$

$$(g, h) := \sum_k g_k h_k \qquad \{g, h\}_k := \sum_{nm} M_{knm} g_n h_m \qquad (\varDelta g)_k := \sum_n \varDelta_{kn} g_n$$

2．格子理論と超対称変換

格子上の超対称変換

$$\begin{cases} \delta x_n = \bar{c}_n \\ \delta c_n = i(\Delta x)_n + Fn \\ \delta \bar{c}_n = 0 \\ \delta F_n = -i(\Delta \bar{c})_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\delta} x_n = i c_n \\ \bar{\delta} c_n = 0 \\ \bar{\delta} \bar{c}_n = -(\Delta x)_n - iF_n \\ \bar{\delta} F_n = -(\Delta c)_n \end{cases}$$

格子上の作用の不変性

$$\delta S_0 = \bar{\delta} S_0 = \delta S_m = \bar{\delta} S_m = 0$$

$$P(x(t)) \to \sum_n m_{kn} x_n + g_3 \sum_{n,m} M_{knm} x_n x_m$$

$$(g, h) := \sum_k g_k h_k \qquad \{g, h\}_k := \sum_{nm} M_{knm} g_n h_m \qquad (\Delta g)_k := \sum_n \Delta_{kn} g_n$$

2．格子理論と超対称変換

相互作用項

$$S_{\text{int}} = -ig_3(F, \{x, x\}) + 2ig_3(c, \{x, \bar{c}\})$$

不変性を要請

$$\delta S_{\text{int}} = 0$$

$$\Rightarrow (\varDelta f, \{g, h\}) + (\varDelta g, \{h, f\}) + (\varDelta h, \{f, g\}) = 0$$

$$\bar{\delta} S_{\text{int}} = 0$$

$$\Rightarrow (\varDelta f, \{g, h\}) + (f, \{\varDelta g, h\}) + (f, \{g, \varDelta h\}) = 0$$

$$P(x(t)) \to \sum_n m_{kn} x_n + g_3 \sum_{n,m} M_{knm} x_n x_m$$

$$(g, h) := \sum_k g_k h_k \qquad \{g, h\}_k := \sum_{nm} M_{knm} g_n h_m \qquad (\varDelta g)_k := \sum_n \varDelta_{kn} g_n$$

2． 格子理論と超対称変換

ライプニッツ則

$$(\Delta f, \{g, h\}) + (f, \{\Delta g, h\}) + (f, \{g, \Delta h\}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{(f, \Delta\{g, h\}) = (f, \{\Delta g, h\}) + (f, \{g, \Delta h\})}$$

①並進対称性
②局所性
③ライプニッツ則

を満たす差分演算子は
存在しない！

[1] M. Kato, M. Sakamoto, H. So, JHEP, 05(05):057

δ不変性：$(\Delta f, \{g, h\}) + (f, \{\Delta g, h\}) + (f, \{g, \Delta h\}) = 0$

2． 格子理論と超対称変換

δ不変性を要請

$$(\varDelta f, \{g, h\} + (\varDelta g, \{h, f\}) + (\varDelta h, \{f, g\}) = 0$$

①並進対称性

②局所性

~~③ライプニッツ則~~

を満たす差分演算子は

存在する！

[2] M. Kato, M. Sakamoto, H. So, R. Narayanan, H. Neuberger, JHEP, 2013(5):89

☆ $$(\varDelta f)_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2}$$

★ $$\{g, h\}_k = \frac{2g_{k+1}h_{k+1} + g_{k+1}h_{k-1} + g_{k-1}h_{k+1} + 2g_{k-1}h_{k-1}}{6}$$

単純ではない

$\bar{\delta}$不変性：$(\varDelta f, \{g, h\}) + (f, \{\varDelta g, h\}) + (f, \{g, \varDelta h\}) = 0$

2．格子理論と超対称変換

格子上の超対称変換

$$\delta \begin{pmatrix} x_n \\ c_n \\ \bar{c}_n \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_n \\ i(\varDelta x)_n + F_n \\ 0 \\ -i(\varDelta \bar{c})_n \end{pmatrix}$$

$$\xcancel{\bar{\delta} \begin{pmatrix} x_n \\ c_n \\ \bar{c}_n \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic_n \\ 0 \\ -(\varDelta x)_n - iF_n \\ -(\varDelta c)_n \end{pmatrix}}$$

結論

超対称変換は半分（δ）しか実現できない

3. Witten indexの計算

Witten index の経路積分表示

$$\Delta_W = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}F e^{\left[-\left(S_0+S_m+S_{\mathrm{int}}\right)\right]}$$

$$S_0 = \frac{1}{2}(\varDelta x, \varDelta x) + \frac{1}{2}(F, F) + i(\bar{c}, \varDelta c)$$

$$S_m = -i(x, mF) - i(\bar{c}, mc)$$

$$S_{\mathrm{int}} = -ig_3(F, \{x, x\}) + 2ig_3(c, \{x, \bar{c}\})$$

$$\mathcal{D}x = \prod_k \frac{dx_k}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} = \prod_k idc_k d\bar{c}_k, \quad \mathcal{D}F = \prod_k \frac{dF_k}{\sqrt{2\pi}}$$

３． Witten indexの計算

Witten index の経路積分表示

$$\Delta_W = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}F e^{\left[-\left(S_0+S_m+S_{\rm int}\right)\right]}$$

有限の大きさの格子上で厳密に計算可能！

テクニック

- localization

場の経路積分への寄与を「局所的」にする手法

3．Witten indexの計算

localization

超対称量子力学模型の分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-S_{\mathrm{kinetics}} - S_{\mathrm{int}}\right]$$

$$\boxed{=} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\boxed{\mu S_{\mathrm{kinetics}}} - S_{\mathrm{int}}\right]$$

★ 経路積分に寄与するのは，定数倍しても変わらない部分

→ 差分演算子Δの０固有値モード

経路積分には０固有値モードしか寄与しない

3. Witten indexの計算

localization

$$S_0 \to \boxed{\mu} S_0, \quad S_m \to S_m, \quad S_{\mathrm{int}} \to S_{\mathrm{int}}$$

$$\begin{aligned} Z \to \underline{Z_{\boxed{\mu}}} &= \int \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}F e^{\left[-\left(\boxed{\mu} S_0 + S_m + S_{\mathrm{int}}\right)\right]} \\ &\underline{= Z} \end{aligned}$$

Z_μ は μ 依存性を持たない！

★ $S_0 = \dfrac{1}{2}\delta(c, -i\varDelta x + F)$

★ $\mathcal{D}(x + \delta x)\mathcal{D}(c + \delta c)\mathcal{D}(\bar{c} + \delta\bar{c})\mathcal{D}(F + \delta F)$
$= \mathcal{D}x\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\ F$

3．Witten indexの計算

localization（証明）

$$\partial_\mu \int \mathcal{D}\phi e^{-\mu A[\phi]}$$

$$= - \int \mathcal{D}\phi A[\phi] e^{-\mu A[\phi]}$$

$$= - \int \mathcal{D}\phi \delta\left(\mathcal{A}[\phi] e^{-\mu A[\phi]}\right)$$

$$= - \left(\int \mathcal{D}\phi \mathcal{A}[\phi + \delta\phi] e^{-\mu A[\phi+\delta\phi]} - \int \mathcal{D}\phi \mathcal{A}[\phi] e^{-\mu A[\phi]} \right)$$

$$= - \left(\int \mathcal{D}(\phi + \delta\phi) \mathcal{A}[\phi + \delta\phi] e^{-\mu A[\phi+\delta\phi]} - \int \mathcal{D}\phi \mathcal{A}[\phi] e^{-\mu A[\phi]} \right)$$

$$= 0$$

本質的な関係式

- ★ $\delta\delta = 0$
- ★ $A[\phi] = \delta\mathcal{A}[\phi]$
- ★ $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}(\phi + \delta\phi)$

3． Witten indexの計算

Witten index（**一般の多項式ポテンシャル**）

$$\Delta_W = Z$$
$$= Z_\mu$$
$$= \lim_{\mu\to\infty} Z_\mu$$
$$= \int \frac{d\xi_0}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}{\xi_0}^2\right]}$$

μ 依存性なし

localization

(0モードが寄与)

X_0 : 0モード（定数）

$(\varDelta X_0)_k = 0$

$\tilde{g}_p$: ポテンシャル $P(x)$の最高次の相互作用定数

変数変換：$X_0 \to \xi_0 = \mu^{-1/2}\left(\tilde{m}X_0 + \cdots + \tilde{g}_p {X_0}^{p-1}\right)$

３．Witten indexの計算

Witten index（一般の多項式ポテンシャル）

$$\Delta_W = \int \frac{d\xi_0}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}{\xi_0}^2\right]}$$

$$\xi_0 = \mu^{-1/2}\left(\tilde{m}X_0 + \cdots + \tilde{g}_p {X_0}^{p-1}\right)$$

X_0	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	
$\xi_0 \quad p$: 遇, $\tilde{g}_p$: 正	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$+1$
$\xi_0 \quad p$: 遇, $\tilde{g}_p$: 負	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	-1
$\xi_0 \quad p$: 奇, $\tilde{g}_p$: 正	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞	0
$\xi_0 \quad p$: 奇, $\tilde{g}_p$: 負	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	

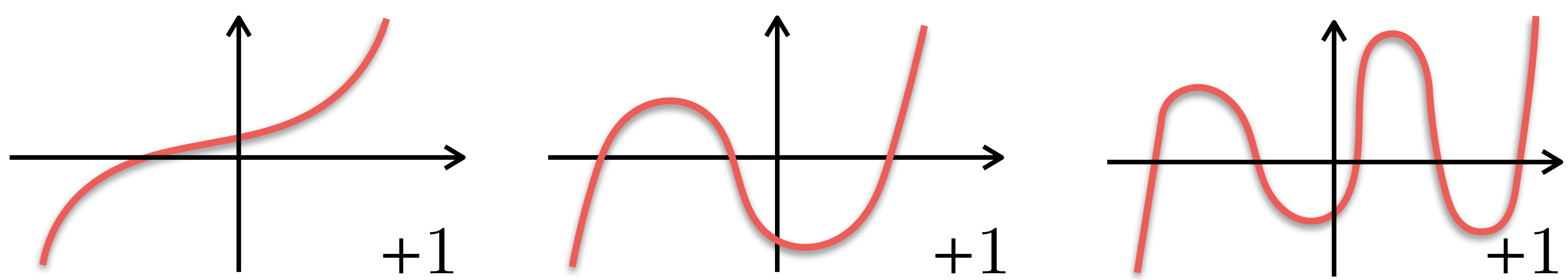
$\tilde{g}_p$: ポテンシャル $P(x)$ の最高次の相互作用定数

X_0 : 0モード（定数，格子によらない）

3．Witten indexの計算

Witten index（一般の多項式ポテンシャル）

$P(x)$の最高次の冪数	奇数次	偶数次	
相互作用定数	任意	正	負
Δ_W	0	+1	−1



Δ_Wは位相不変量

ポテンシャルの両端の位置によってのみ決まる

結論　課題

1. 格子上では,
   超対称変換は半分のみ再現できる

   → 次元・フレーバーを増やし，場の理論に応用

2. 経路積分を用いることで,
   Witten index を厳密に計算できた

   → 場の理論等の複雑な理論での計算を進める
   → 超対称不変な作用 S は常に $S = \delta\mathcal{S}$ とかけるのか