A large, oval-shaped map of the Cosmic Microwave Background (CMB) showing temperature fluctuations. The map is filled with a dense pattern of small, irregular shapes in shades of blue and orange, representing the distribution of the CMB across the sky. The background is a light, textured blue with scattered orange and yellow spots.

2016年6月22日 神戸大学 宇宙論研究室セミナー

Cosmic microwave background beyond linear order: Gravitational lensing and others

齊藤 遼 (京大基研)

共同研究者：平松尚志, 佐々木節, 樽家篤史 (京大基研)
成子篤 (東工大), 並河俊弥 (Stanford U), 山内大介 (神大)

今日の内容

1. 導入 – 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)

2. Curve-of-sight法 – CMBの精密計算法

RS, A. Naruko, T. Hiramatsu, and M. Sasaki, JCAP1410 (2014) 051

3. 応用1: 非ガウス性

T. Hiramatsu, RS, A. Naruko, and M. Sasaki, in preparation

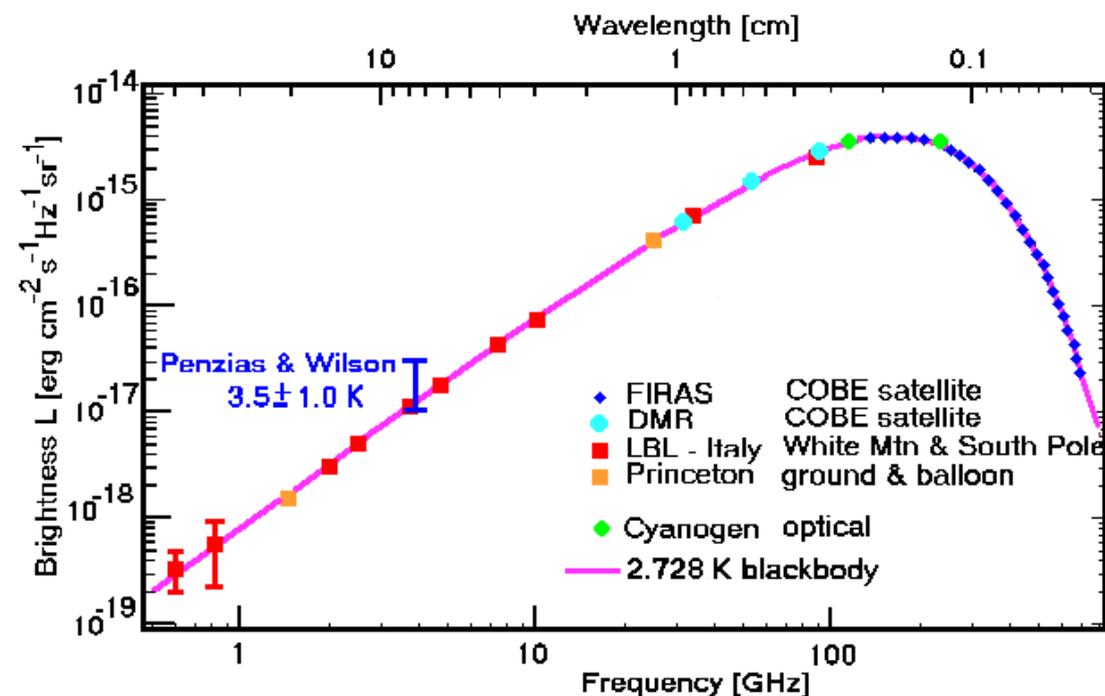
4. 応用2: Bモード偏光

RS, D. Yamauchi, T. Namikawa, A. Naruko, and A. Taruya, in preparation

宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background)

ビッグバン宇宙論

➡ 宇宙を遡ると高温になり、水素原子は電離してプラズマ状態になる



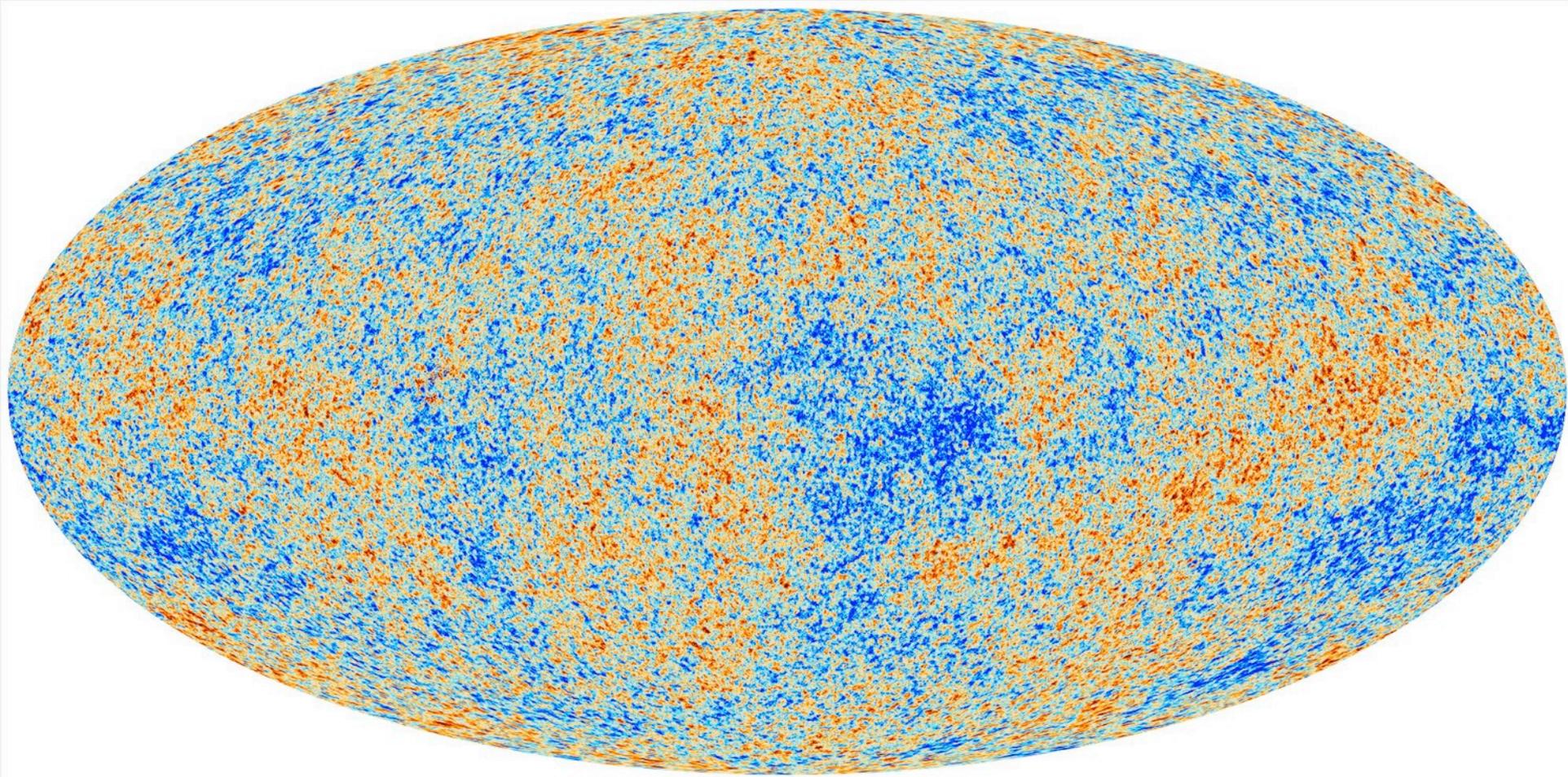
プラズマから放射された黒体放射



宇宙マイクロ波背景放射
(CMB)

ビッグバン宇宙の証拠

宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background)



プランク衛星によって観測されたCMB温度マップ

宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background)

非常にわずかながら (0.001%) 異方性を持つ

$$2.7\text{K} + \mathcal{O}(10)\mu\text{K}$$

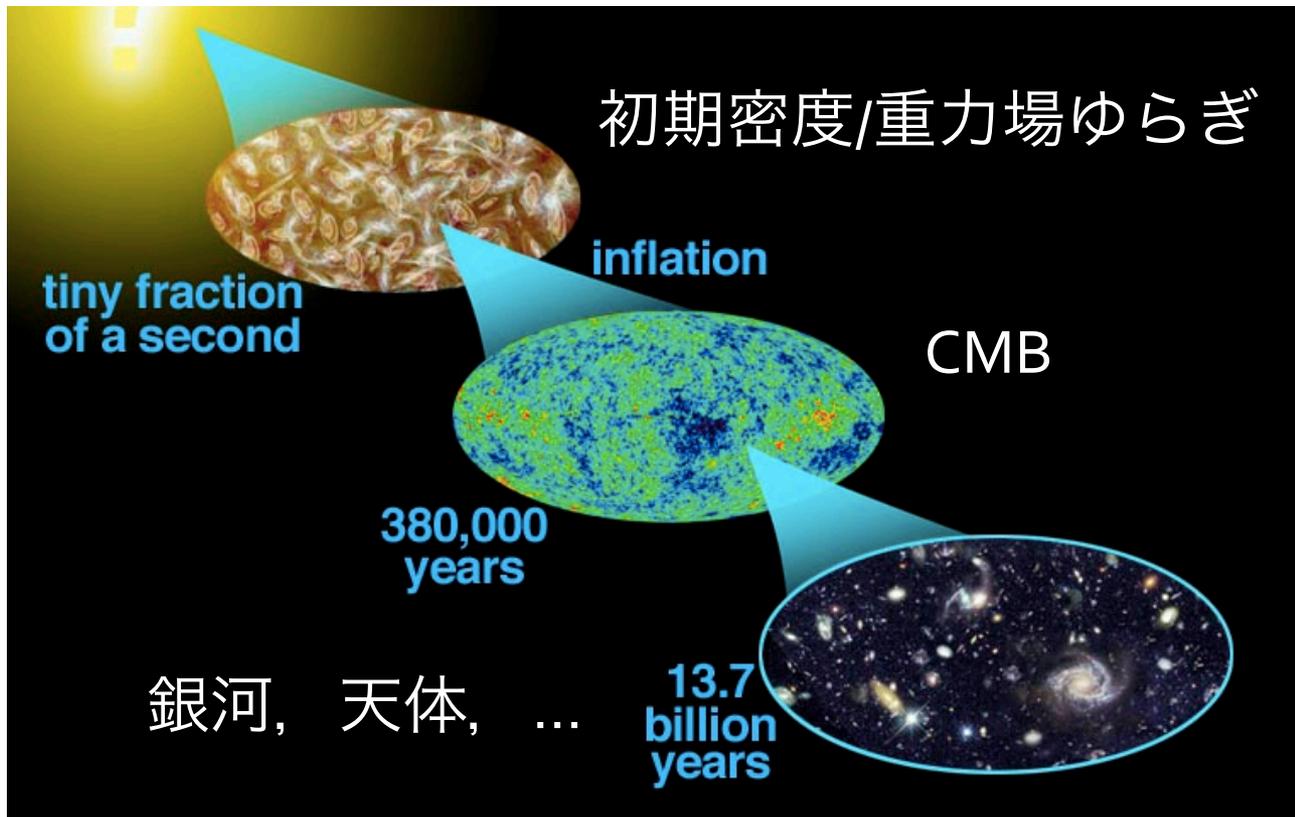
この“ゆらぎ”は初期宇宙に関する有用な情報を持っている

プランク衛星によって観測されたCMB温度マップ

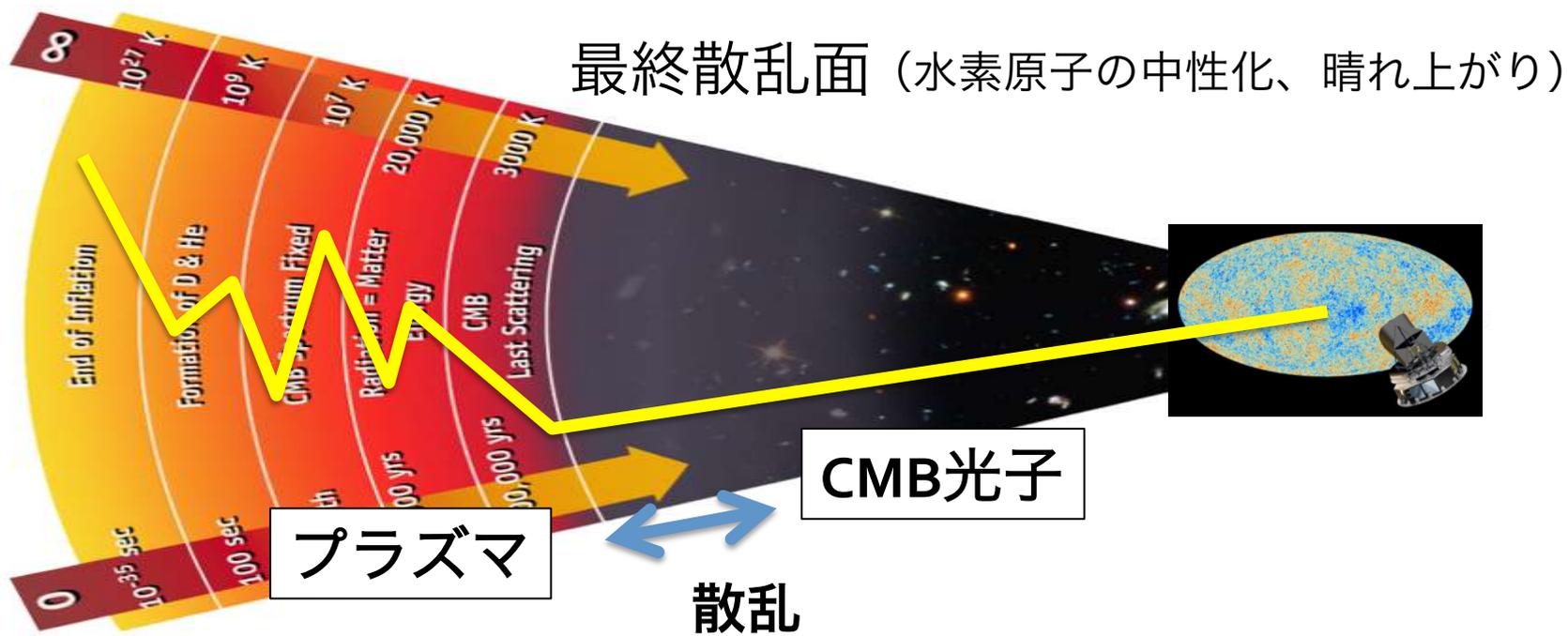
ゆらぎの進化の標準シナリオ

宇宙のごく初期に起きた急速な加速膨張（インフレーション）によって量子ゆらぎから宇宙論的スケールの**初期密度/重力場ゆらぎ**が生まれる

➡ この初期ゆらぎがCMBや銀河といった宇宙の**非一様等方**な構造をつくった



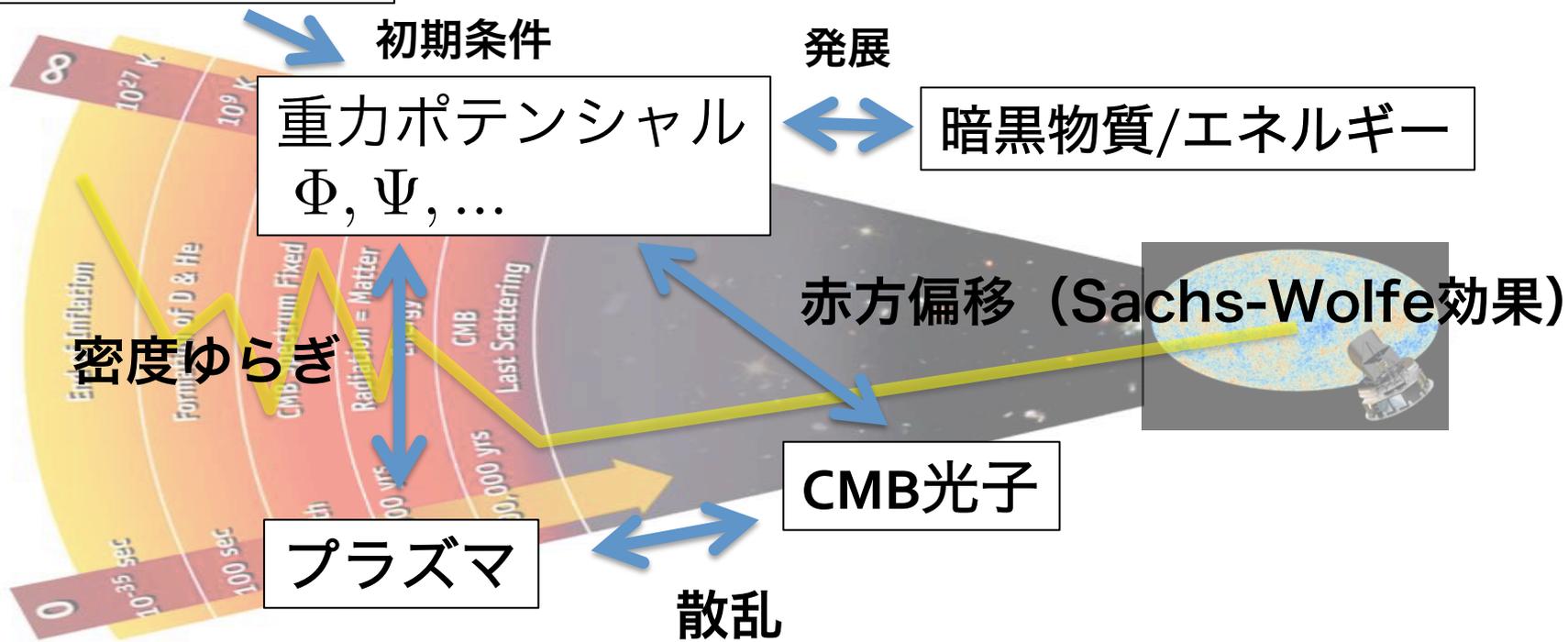
初期ゆらぎによるCMB温度ゆらぎの生成



初期ゆらぎによるCMB温度ゆらぎの生成

プラズマによる散乱や赤方偏移を通して、CMBの温度分布はゆらぎを持つ

インフレーション



CMB温度ゆらぎはインフレーションや暗黒物質/エネルギーの情報を持つ

CMBの発展

CMBの発展を記述する方程式

- アインシュタイン方程式（重力）
- 流体方程式（暗黒物質/エネルギー）
- ボルツマン方程式（光子）

CMBの発展は、これらの**非線形方程式**を摂動的に解くことで、追うことができる（ゆらぎの大きさ $\sim 0.001\%$ ）

近年の観測技術の進展により、線形摂動では現れない**非線形効果**を観測・議論できるようになっている

非線形効果を含めてCMBを計算する高次摂動論の整備が必要

[Pitrou], [Huang & Vernizzi], [Portsmouth group], [Cambridge group], [Kyoto group]

CMB温度ゆらぎの計算：線形摂動論

現在のCMBの分布を知るためには、ボルツマン方程式（7次元微分方程式）を解く必要がある：

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\eta} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{dn^i}{d\eta} \frac{\partial}{\partial n^i} \right) f(\eta, \mathbf{x}, q, \mathbf{n}) = \mathcal{C}[f; \eta, \mathbf{x}, q, \mathbf{n}]$$

位置
運動量（周波数）
進行方向

● q（周波数）依存性

- 温度1パラメータで特徴付けられる

● x依存性 (or k依存性 *フーリエ変換)

- 一様等方性より|k|依存性のみを持ち、各フーリエ成分は独立

● n依存性 (or l依存性 *球面調和関数展開)

- 各多重極係数は独立でない

CMB計算の困難 - ボルツマン方程式の階層性

ボルツマン方程式は無限個の連立微分方程式を成す (Boltzmann hierarchy):

$$\dot{\Delta}_l - ikC^{+,l} \Delta_{l+1} + ikC^{-,l} \Delta_{l-1} = \dot{\tau}C_l + D_l$$
$$(l = 0, 1, 2, \dots)$$

* ボルツマン方程式をフーリエ変換 + 球面調和関数展開

Δ_l : CMBの輝度揺らぎの l 次の多重極係数

$$1 + \Delta \equiv \frac{B}{\bar{B}}; \quad B \equiv \int dq q^3 f(\eta, \mathbf{x}, q, \mathbf{n}) \propto T^4$$

$\dot{\tau}C_l + D_l$: コンプトン散乱 / 重力による散乱に起因する衝突項

観測されている多重極 ($l \approx 2500$) まで解くのは困難

フーリエ変換

$$\Delta(\eta_0, \mathbf{k}, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta' [e^{-\tau} D - \dot{\tau} e^{-\tau} (\Delta - C)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_0 (\eta' - \eta)}$$

被積分関数の具体形を書くと、

- 重力による衝突項 [Sachs-Wolfe項 (赤方偏移効果)]

$$D = -4(\dot{\Phi} + ik\mu\Psi) \quad \mu \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}_0$$

- コンプトン散乱による衝突項

$$S \equiv \Delta - C = -4\Delta_{00} + 16iv_e\mu - \frac{2}{5}(\Delta_{20} - \sqrt{6}E_{20})P_2(\mu)$$

✓ Δ_{lm} は6つの関数で完全に決定できる: $\Phi, \Psi, \Delta_{00}, \Delta_{20}, E_{20}, v_e$

✓ 観測される高次の多重極の情報はすべて既知関数である

$$\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_0 (\eta' - \eta_0)]$$

に含まれる

(球面調和関数展開後は球ベッセル関数: $j_l[k(\eta' - \eta_0)]$)

フーリエ変換

$$\Delta(\eta_0, \mathbf{k}, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta' [e^{-\tau} D - \dot{\tau} e^{-\tau} (\Delta - C)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_0 (\eta' - \eta)}$$

被積分関数の具体形を書くと、

- 重力による衝突項 [Sachs-Wolfe項 (赤方偏移効果)]

$$D = -4(\dot{\Phi} + ik\mu\Psi) \quad \mu \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}_0$$

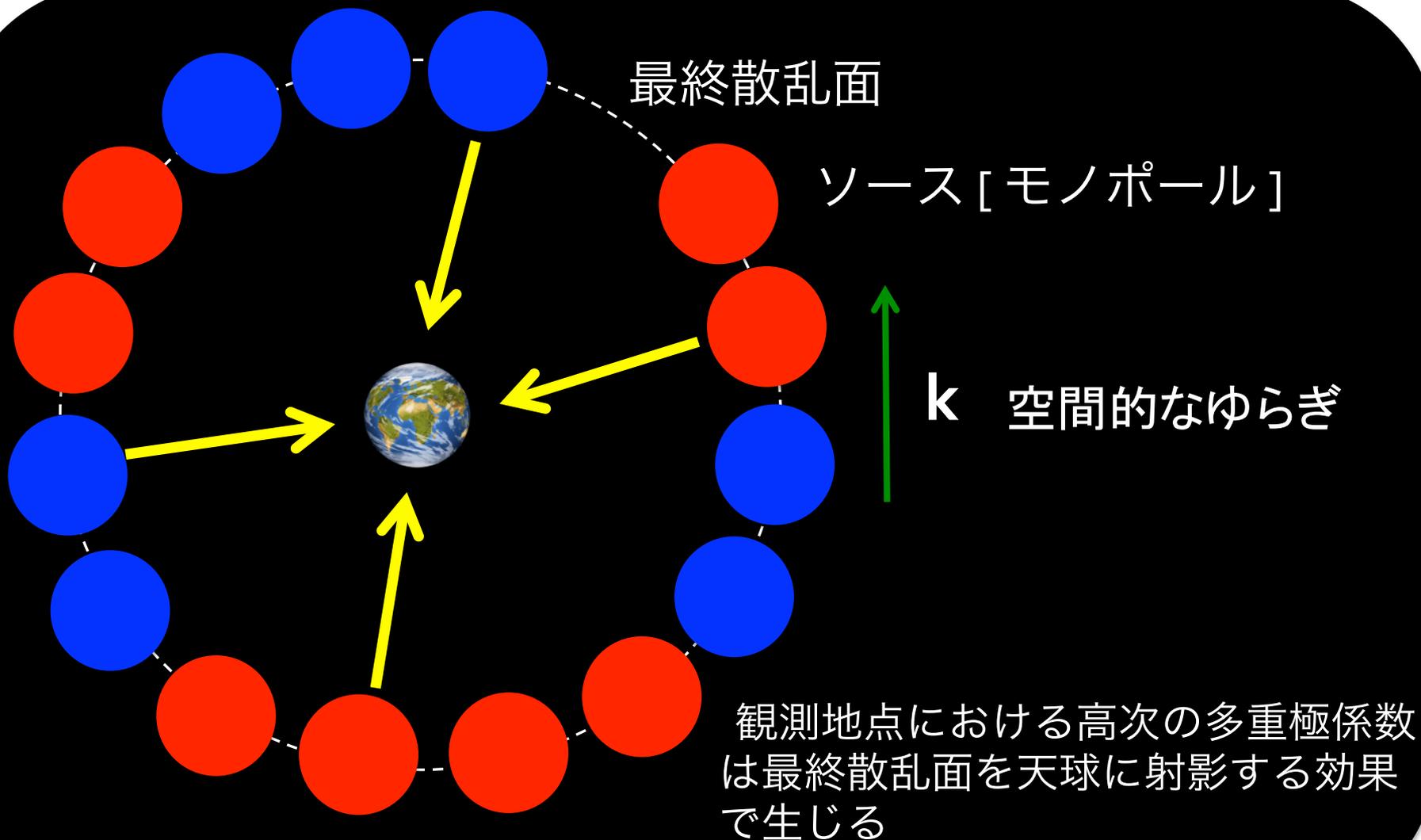
- コンプトン散乱による衝突項

$$S \equiv \Delta - C = -4\Delta_{00} + 16iv_e\mu - \frac{2}{5}(\Delta_{20} - \sqrt{6}E_{20})P_2(\mu)$$

✓ Δ_{lm} は6つの関数で完全に決定できる: $\Phi, \Psi, \Delta_{00}, \Delta_{20}, E_{20}, v_e$

数千個の連立微分方程式を解かなくてもよい！

直感的な理解



Line-of-sight法の高次摂動への拡張

単純にLine-of-sight法を使うことはできない：

$$\Delta(\eta_0, \mathbf{k}, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta' \left[e^{-\tau} D - \dot{\tau} e^{-\tau} (\Delta - C) \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_0 (\eta' - \eta)}$$

$$D \equiv \left[\underbrace{4\delta \left(\frac{d \ln q}{d\eta} \right)}_{\sim \Phi, \Psi} - \underbrace{\delta \left(\frac{dx^i}{d\eta} \right)}_{\sim \Phi, \Psi} \partial_i - \underbrace{\delta \left(\frac{dn^i}{d\eta} \right)}_{\sim \Phi, \Psi} \partial_{n^i} \right] (1 + \Delta)$$

重力レンズ効果などによって光子の軌道が曲げられる
(重力ポテンシャルによる光子の散乱)

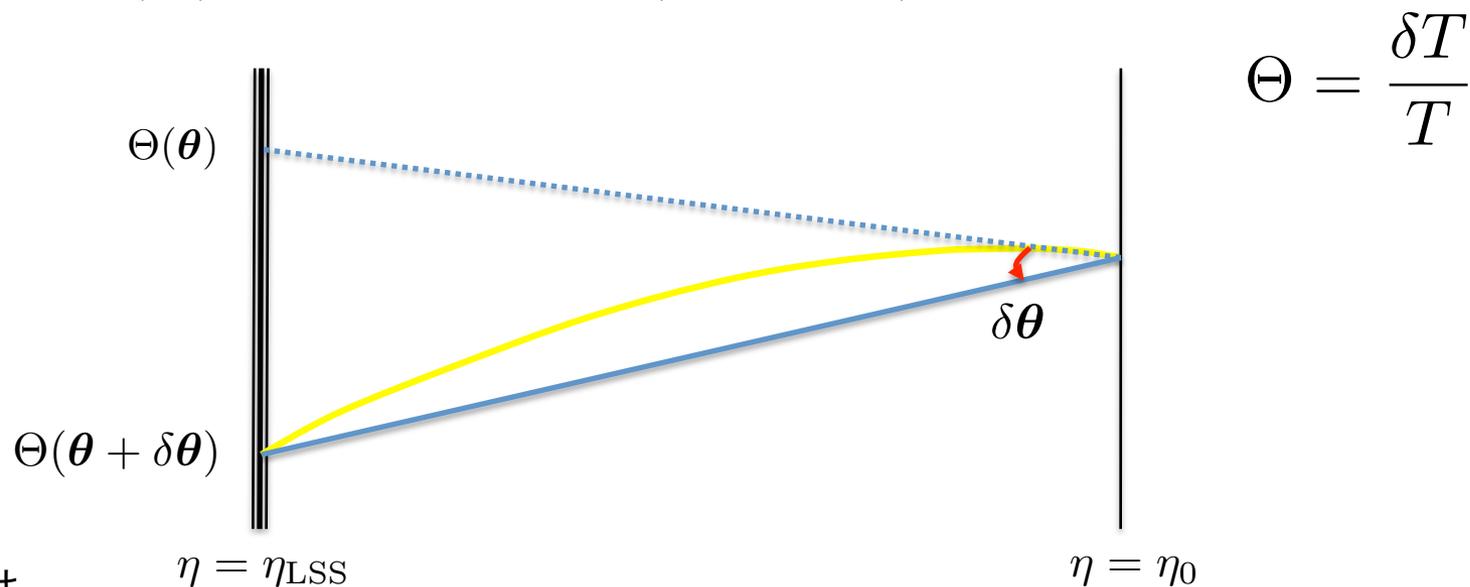
被積分関数に高次の多重極係数が現れてしまう

標準的な方法：リマッピング

[Cf, Lewis & Challinor 06]

見かけの到来方向の変化として、重力レンズの効果を取り入れる：

$$\Theta_{\text{lensed}}(\boldsymbol{\theta}) = \Theta_{\text{unlensed}}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})$$



レンズ効果は

$\eta = \eta_{\text{LSS}}$

$\eta = \eta_0$

インフレーション起源のシグナル（非ガウス性、Bモード偏光）を隠してしまう
晴れ上がり以降の宇宙（暗黒エネルギー、ニュートリノ）を探る道具となる

こうした効果（非線形伝播効果）をより厳密にとり扱えないだろうか？

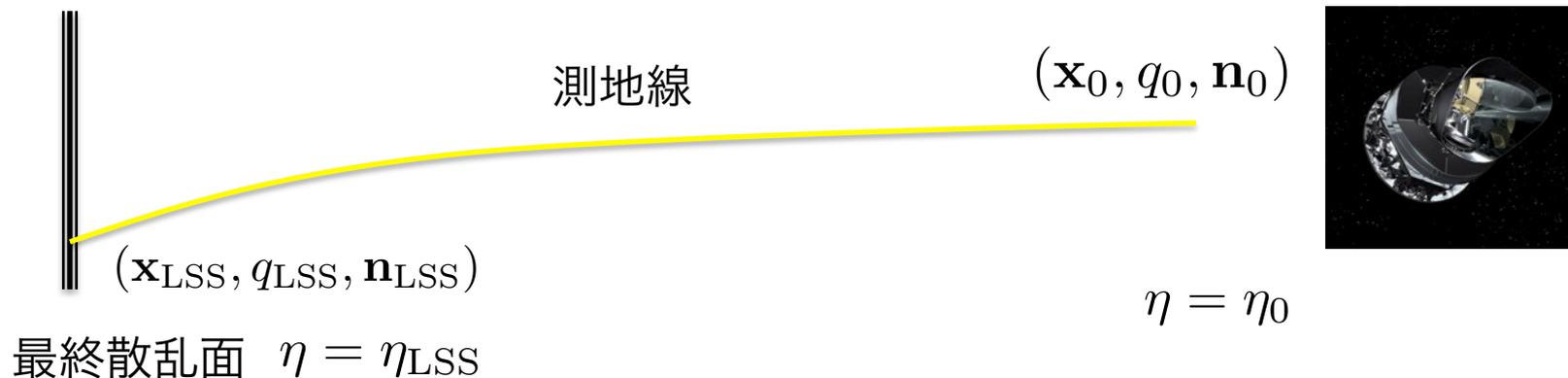
“Curve”-of-sight法

RS, A. Naruko, T. Hiramatsu, and M. Sasaki, JCAP1410 (2014) 051

基礎となるアイデア: リュウビルの定理

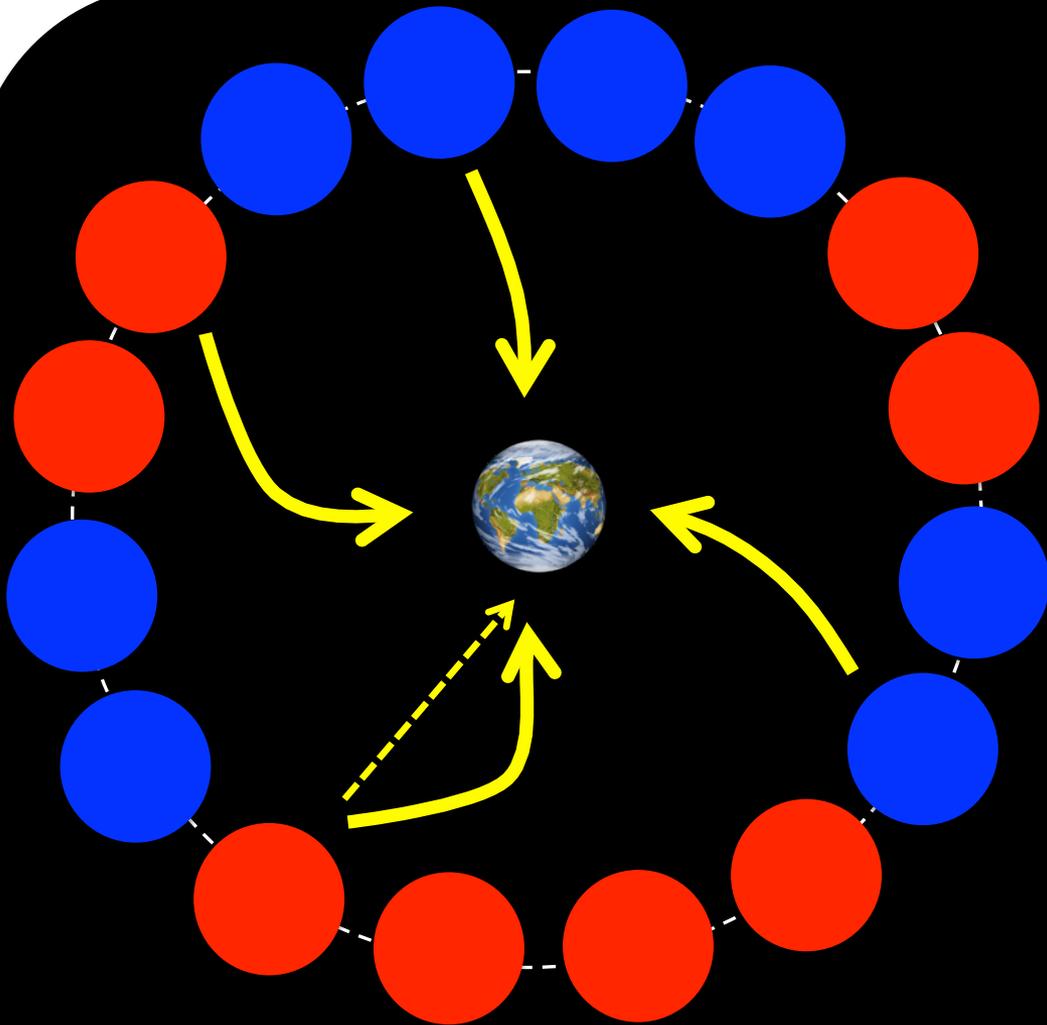
衝突項がなければ、分布関数は測地線に沿って保存する：

$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q, \mathbf{n}_0) = f(\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}_{\text{LSS}}, q_{\text{LSS}}, \mathbf{n}_{\text{LSS}})$$



晴れ上がり以降の発展はボルツマン方程式ではなく、測地線方程式を解けば分かる

直感的な理解（重力あり）



最終散乱面は直線ではなく、
曲がった測地線に沿って天球に
射影される

射影は重力ポテンシャル
 Φ , ψ
によって決定される

やはり観測地点の多重極係数は有限個の関数で決定できるはず！

“Curve”-of-sight法

[Challinor 00, RS+ 14]

ボルツマン方程式を、フルの測地線に沿った積分形に書き直す：

$$f(\eta_0, \mathbf{x}_0, q_0, \mathbf{n}_0) = \int_0^{\eta_0} \underbrace{d\eta' g_v(\eta')}_{\equiv \mathcal{G}} [f - C]_{\text{at } \underbrace{(\eta', \mathbf{x}(\eta'), q(\eta'), \mathbf{n}(\eta'))}_{\text{フルの測地線上の点}}}$$

コンプトン散乱のみからのソース項

重力は、位相空間での観測者と光源の相対位置をずらす効果として現れる

リマッピング法を一般化した方法になっている

(ただし、近似なし かつ レンズ以外のすべての重力効果も含む)

(Cf. 他の方法 [Huang & Vernizzi 13], [Su & Lim 14], [Fidler, Koyama, & Pettinari 14])

測地線の摂動で展開することで、非線形伝播効果が分離される：

$$f = \int_0^{\eta_0} d\eta' \left[\mathfrak{S} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} \delta q(\eta') + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x^i} \delta x^i(\eta') + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial n^i} \delta n^i(\eta') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial q^2} \delta q(\eta')^2 + \dots \right]$$

測地線の摂動

測地線の摂動 $(\delta \mathbf{x}, \delta q, \delta \mathbf{n})$ は、測地線方程式を重力ポテンシャルに対して逐次的に解けば得られる $(\delta \mathbf{x}, \delta q, \delta \mathbf{n}) = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{0})$.at $\eta = \eta_0$

- 位置のずれ & 向きのずれ

$$\delta x^i(\eta') = - \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 \left[D^i(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)}) - (\eta_1 - \eta') D^{n^{(i)}}(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)}) \right],$$

$$\delta n^{(i)}(\eta') = - \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 D^{n^{(i)}}(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)})$$

ここで、

$$D^i(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \equiv (\Psi - \Phi)n^i,$$

$$D^{n^{(i)}}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \equiv -\nabla_{\perp}^i(\Psi - \Phi)$$

- 赤方偏移

$$\delta \ln q(\eta') = -D_{\text{SW}}(\eta', \bar{\mathbf{x}}) - \delta x(\eta') \partial_i D^{\text{SW}}(\eta', \bar{\mathbf{x}}) + \\ - \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 \left[D^{\text{ISW}}(\eta_1, \bar{\mathbf{x}}) + \delta x^i(\eta_1) \partial_i D^{\text{ISW}} \right]$$

ここで、

$$D^{\text{SW}}(\eta, \mathbf{x}) \equiv \Psi, \quad \text{Sachs-Wolfe effect}$$

$$D^{\text{ISW}}(\eta, \mathbf{x}) \equiv (\Psi - \Phi) \cdot \quad \text{Integrated Sachs-Wolfe effect (Rees-Sciama effect)}$$

測地線の摂動

測地線の摂動 $(\delta \mathbf{x}, \delta q, \delta \mathbf{n})$ は、測地線方程式を重力ポテンシャルに対して逐次的に解けば得られる $(\delta \mathbf{x}, \delta q, \delta \mathbf{n}) = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{0})$.at $\eta = \eta_0$

- 位置のずれ & 向きのずれ

$$\delta x^i(\eta') = - \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 \left[D^i(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)}) - (\eta_1 - \eta') D^{n^{(i)}}(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)}) \right],$$

$$\delta n^{(i)}(\eta') = - \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 D^{n^{(i)}}(\eta_1, \bar{x}^i, \bar{n}^{(i)})$$

ここで、

$$D^i(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \equiv (\Psi - \Phi)n^i,$$

$$D^{n^{(i)}}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \equiv -\nabla_{\perp}^i(\Psi - \Phi)$$

- 赤方偏移

$$\delta \ln q(\eta) = \delta x(\eta') \partial_i D^{\text{SW}}(\eta', \bar{\mathbf{x}}) + \int_{\eta'}^{\eta_0} d\eta_1 \left[D^{\text{ISW}}(\eta_1, \bar{\mathbf{x}}) + \delta x^i(\eta_1) \partial_i D^{\text{ISW}} \right]$$

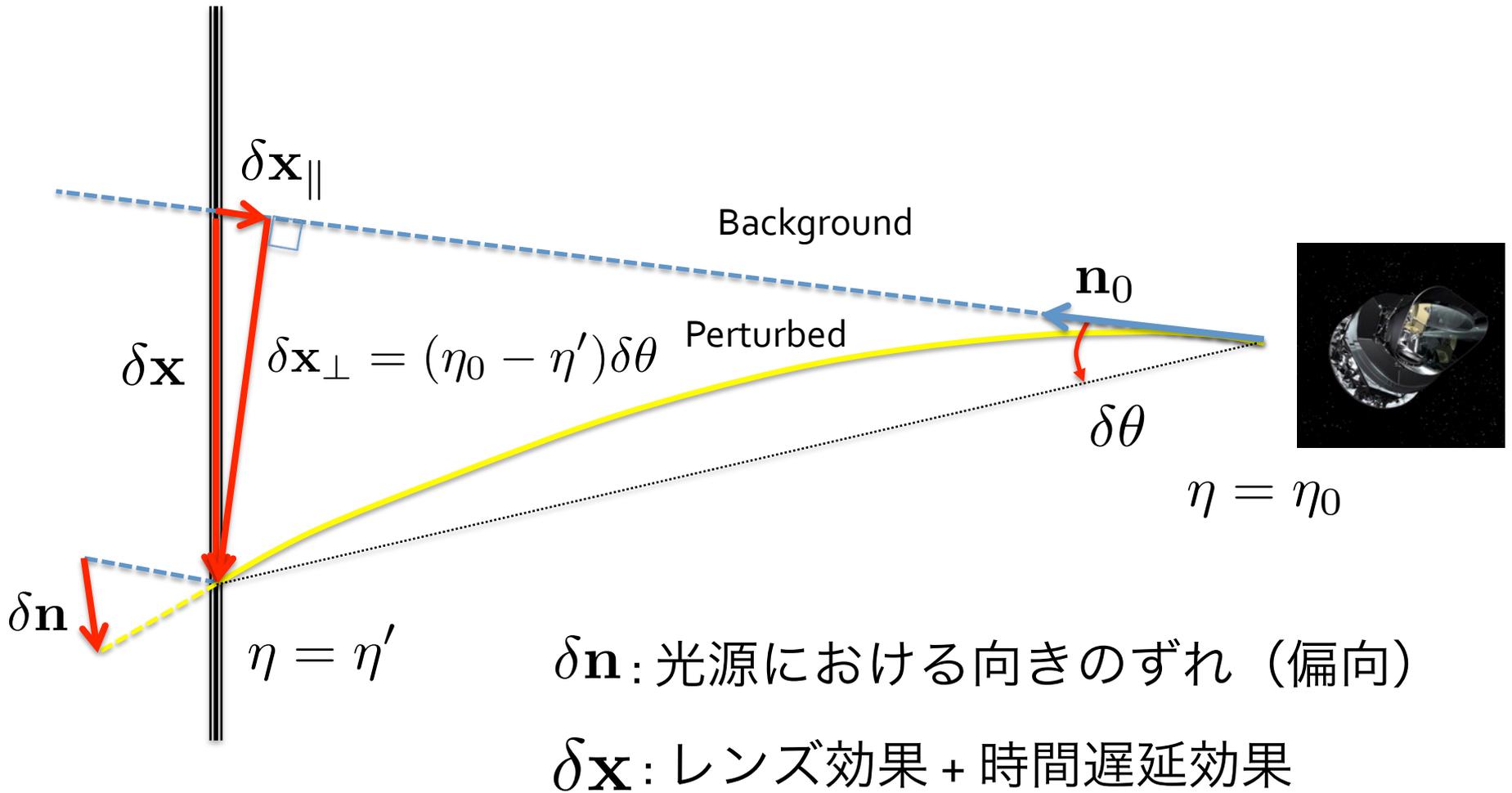
ここで、

$$D^{\text{SW}}(\eta, \mathbf{x}) \equiv \Psi, \quad \text{Sachs-Wolfe effect}$$

$$D^{\text{ISW}}(\eta, \mathbf{x}) \equiv (\Psi - \Phi) \cdot \quad \text{Integrated Sachs-Wolfe effect (Rees-Sciama effect)}$$

重力ポテンシャルの時間積分

測地線の摂動の意味



測地線の摂動で展開することで、非線形伝播効果が分離される：

$$f = \int_0^{\eta_0} d\eta' \left[\mathfrak{S} + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} \delta q(\eta')}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x^i} \delta x^i(\eta')}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial n^i} \delta n^i(\eta')}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial q^2} \delta q(\eta')^2}_{\text{IV}} + \dots \right]$$

I: 2次赤方偏移 + ソース × 赤方偏移 + 赤方偏移 × レンズ/時間遅延

e.g. Rees-Sciama
effect

Sachs-Wolfe effect + Integrated Sachs-Wolfe effect

II: ソース × レンズ/時間遅延

III: ソース × 偏向

VI: 赤方偏移 × 赤方偏移

すべての非線形効果を統一的・系統的に扱うことができる。

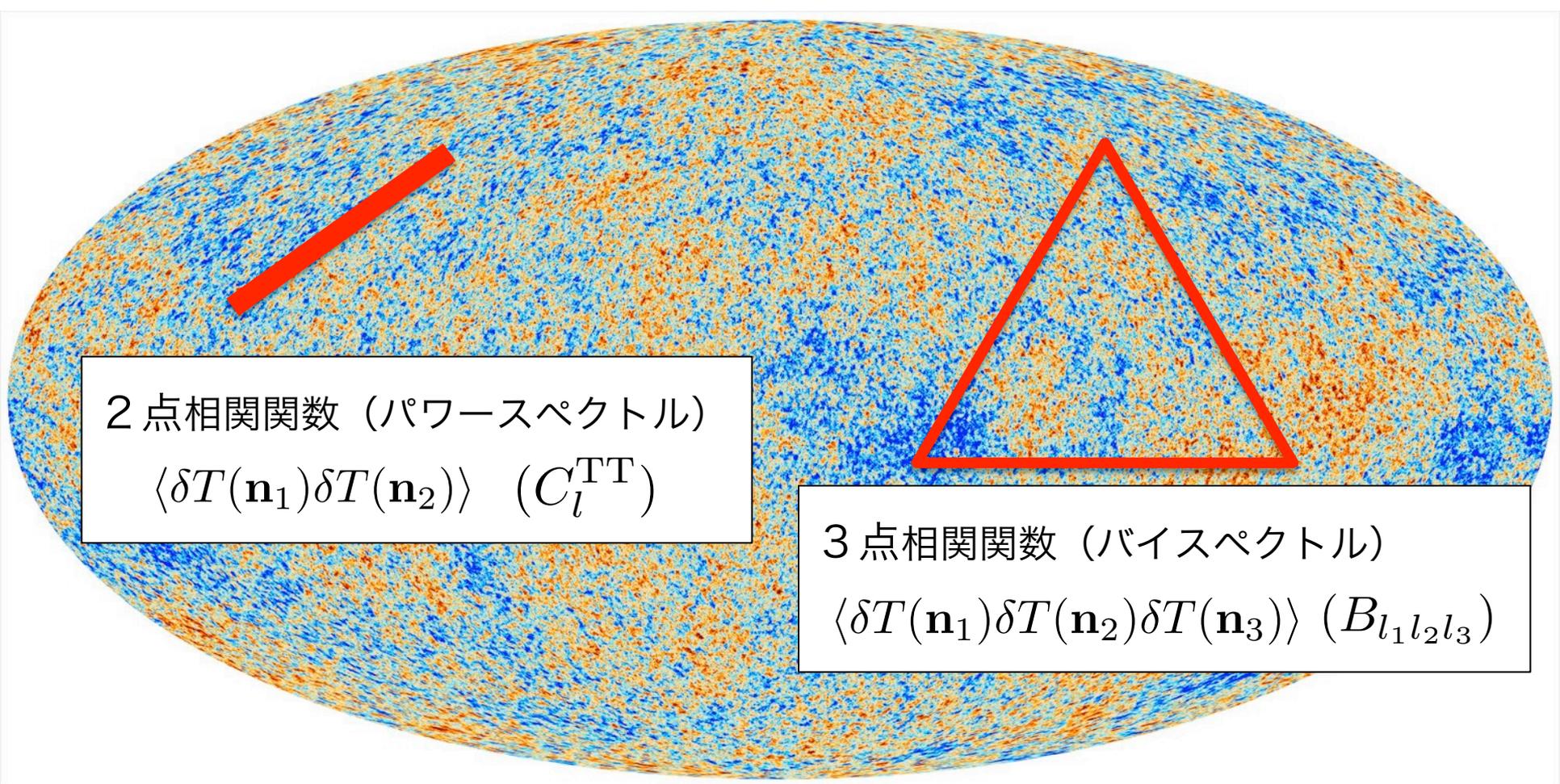
(全部で7種の非線形伝播効果)

応用1：非ガウス性

T.Hiramatsu, RS, A. Naruko, and M. Sasaki, in preparation

CMBの統計分布

量子ゆらぎが起源 → 理論予言はゆらぎの統計分布



2点相関関数 (パワースペクトル)

$$\langle \delta T(\mathbf{n}_1) \delta T(\mathbf{n}_2) \rangle \quad (C_l^{\text{TT}})$$

3点相関関数 (バイスペクトル)

$$\langle \delta T(\mathbf{n}_1) \delta T(\mathbf{n}_2) \delta T(\mathbf{n}_3) \rangle \quad (B_{l_1 l_2 l_3})$$

非ガウス性

ガウス分布からのずれ（非ガウス性）は、非線形発展によって生じる：

量子ゆらぎ

ガウス分布

線形



CMB温度ゆらぎ

ガウス分布

非線形



~~ガウス分布~~

非ガウス性は多点相関関数によって特徴づけることができる

(ガウス分布は分散（2点相関）の情報だけで決まる）

$$\langle \delta T(\mathbf{n}_1) \delta T(\mathbf{n}_2) \delta T(\mathbf{n}_3) \rangle = 0 \quad \text{ガウス分布}$$

$$\neq 0 \quad \text{~~ガウス分布~~}$$

インフレーション起源の非ガウス性

インフレーション中に生じる非ガウス性はモデルに依存

→ モデルの決定に有用

代表的な非ガウス性のタイプ

全体の振幅

決まった関数形

Local タイプ

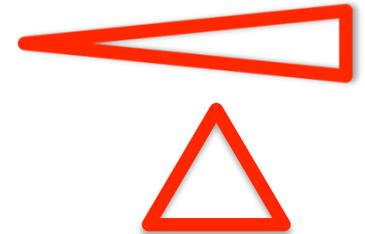
$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} B_{\zeta}^{\text{local}}(k_1, k_2, k_3)$$

Equilateral タイプ

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} B_{\zeta}^{\text{equil}}(k_1, k_2, k_3)$$

Orthogonal タイプ

$$f_{\text{NL}}^{\text{ortho}} B_{\zeta}^{\text{ortho}}(k_1, k_2, k_3)$$



インフレーション起源の非ガウス性を検出するためには、インフレーション期以外の非線形発展を正しく理解する必要がある

$$\Delta f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0.5 \text{ (晴れ上がり前+赤方偏移)} \quad \Delta f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 9.6 \text{ (レンズ効果)}$$

[Portsmouth group 13]

[Hanson+ 09 (リマッピング)]

インフレーション起源の非ガウス性

インフレーション中に生じる非ガウス性はモデルに依存

→ モデルの決定に有用

代表的な非ガウス性のタイプ

全体の振幅

決まった関数形

Local タイプ

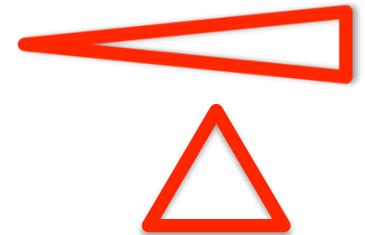
$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} B_{\zeta}^{\text{local}}(k_1, k_2, k_3)$$

Equilateral タイプ

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} B_{\zeta}^{\text{equil}}(k_1, k_2, k_3)$$

Orthogonal タイプ

$$f_{\text{NL}}^{\text{ortho}} B_{\zeta}^{\text{ortho}}(k_1, k_2, k_3)$$



インフレーション起源の非ガウス性を検出するためには、インフレーション期以外の非線形発展を正しく理解する必要がある

$$\Delta f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0.5 \text{ (晴れ上がり前+赤方偏移)} \quad \Delta f_{\text{NL}}^{\text{local}} = ?? \text{ (非線形伝播効果)}$$

[Portsmouth group 13]

Curve-of-sight法?

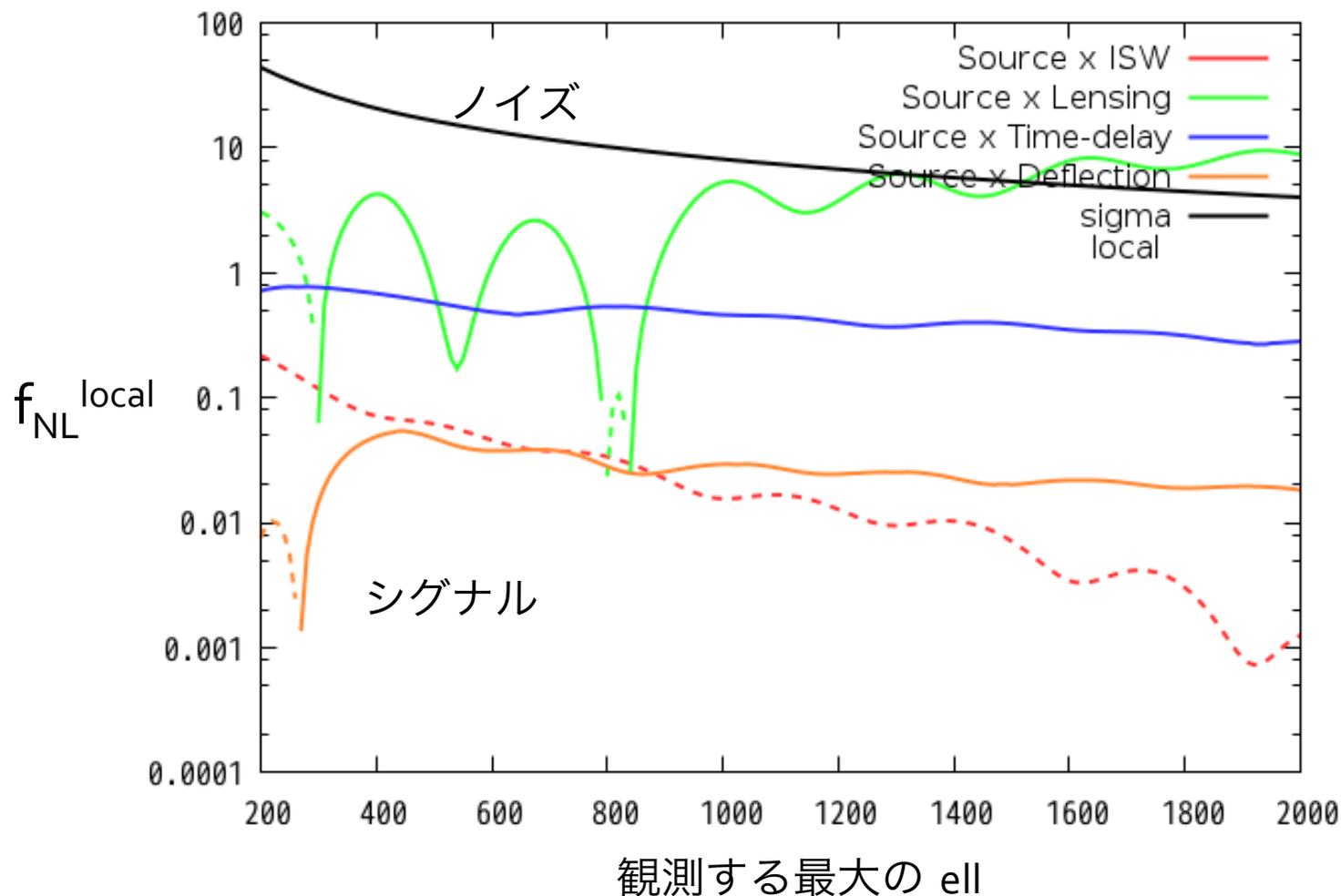
Curve-of-sight法による結果

	Local	Equilateral	Orthogonal
Source x ISW	-1.59(-2)	1.29(0)	5.88(-2)
Source x Lensing	9.48(0)	-3.83(-1)	-2.80(+1)
Source x Time-delay	2.87(-1)	4.41(-1)	-3.30(-1)
Source x Deflection	1.96(-2)	1.81(-1)	-3.05(-1)
ISW x ISW	2.58(-5)	5.50(-2)	1.20(-2)
ISW x Lensing	8.82(-2)	1.63(-1)	-6.50(-1)
ISW x Time-delay	-1.76(-1)	-1.49(-1)	1.17(-1)

	Local	Equilateral	Orthogonal
Remapping	9.58(0)	-1.85(-1)	-2.87(1)

(リマッピングのequilの値は計算精度の問題で、[Hanson+ 09]とは異なる)

Curve-of-sight法による結果



理想的なデータを考えても、レンズ以外の寄与は無視できる

リマッピングでOK (リマッピングの評価を厳密な方法でチェック)

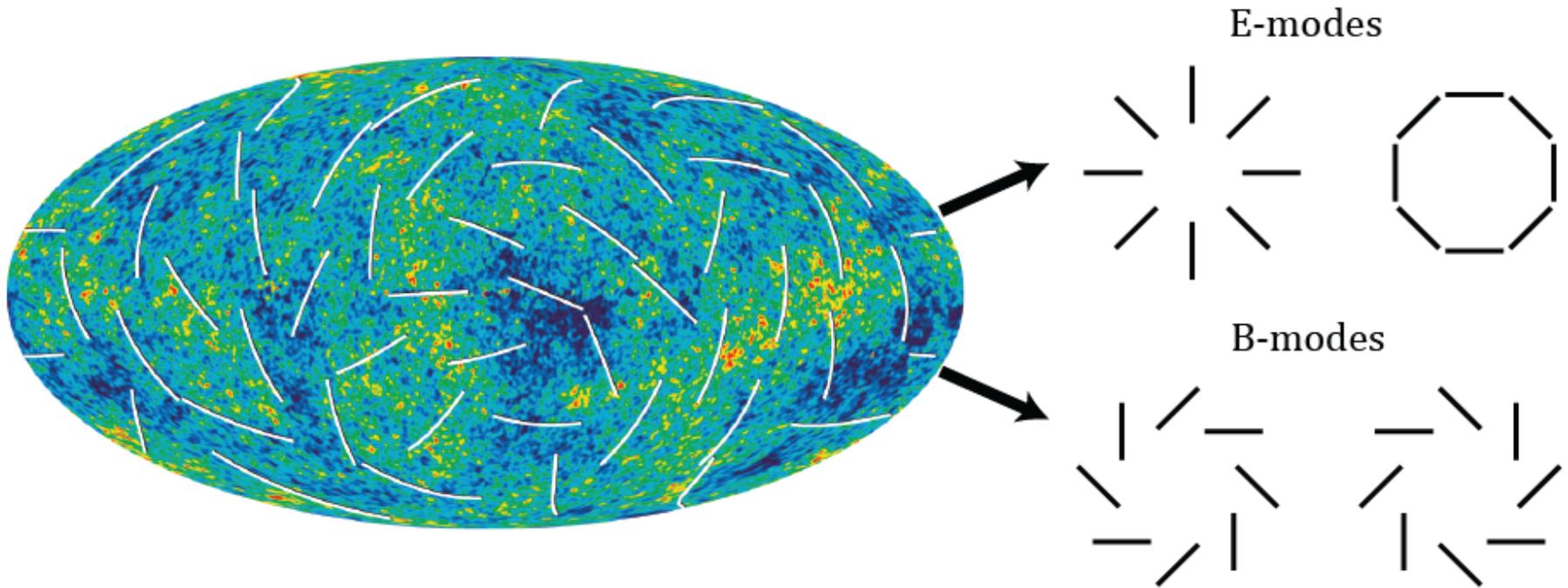
応用 2 : Bモード偏光

RS, D. Yamauchi, T. Namikawa, A. Naruko, and A. Taruya, in preparation

CMBの偏光分布

光子は偏光の自由度も持つ

偏光の空間分布のパターンはEモードとBモードの2つに分解できる：



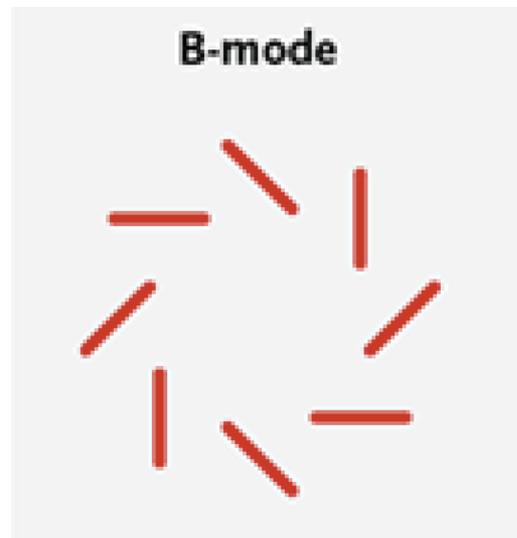
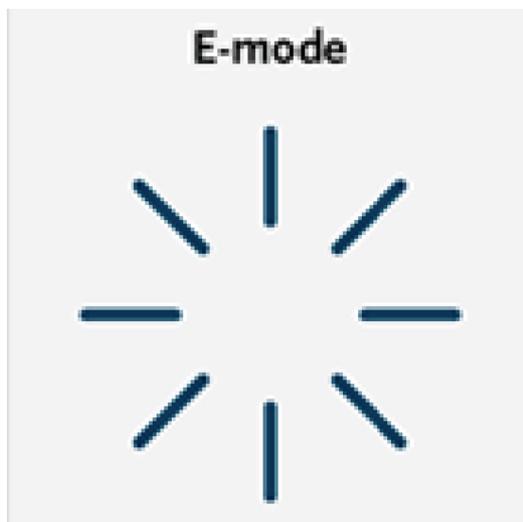
From [arXiv:1407.2584]

原始重力波とBモード

線形摂動では、**Bモード**は原始重力波によってのみつくられる：

密度ゆらぎ
(スカラーモード)

原始重力波
(テンソルモード)



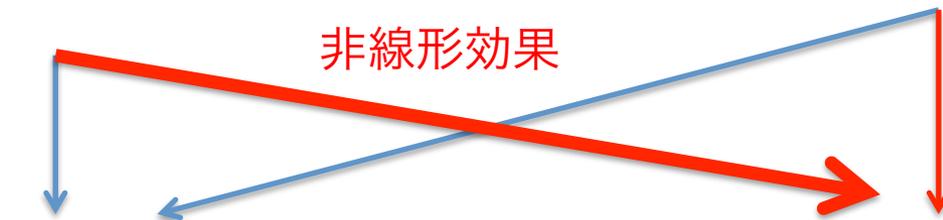
原始重力波とBモード

非線形効果を含めると、密度ゆらぎからも**Bモード**ができる：

密度ゆらぎ
(スカラーモード)

原始重力波
(テンソルモード)

非線形効果



E-mode

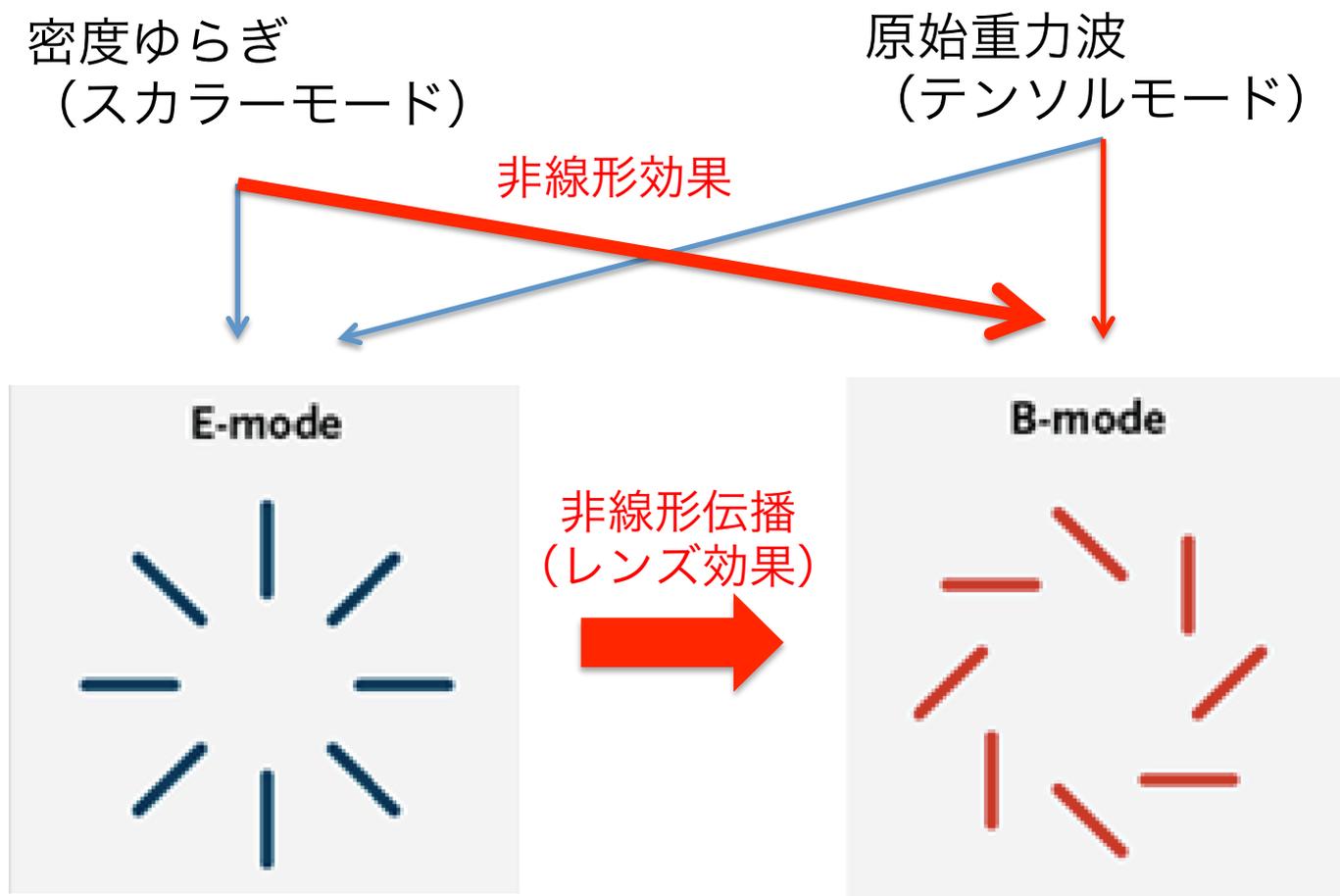


B-mode

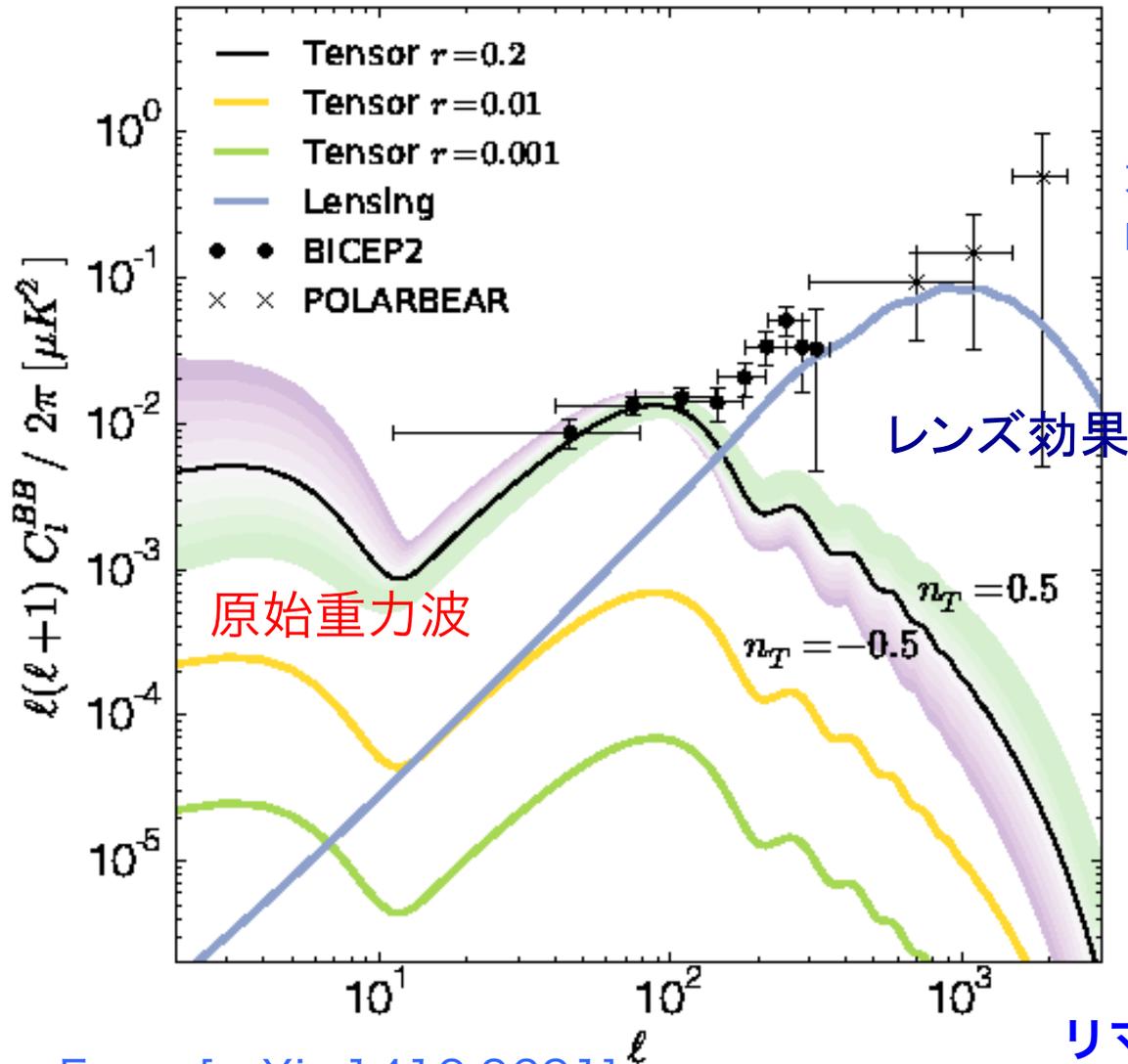


原始重力波とBモード

非線形効果を含めると、密度ゆらぎからも**Bモード**ができる：



レンズ効果によるBモード



小スケールでレンズ効果が主要

大規模構造やEモード等と相関

POLARBEAR, SPT, ACT, BICEPで検出

小さい振幅の原始重力波を検出

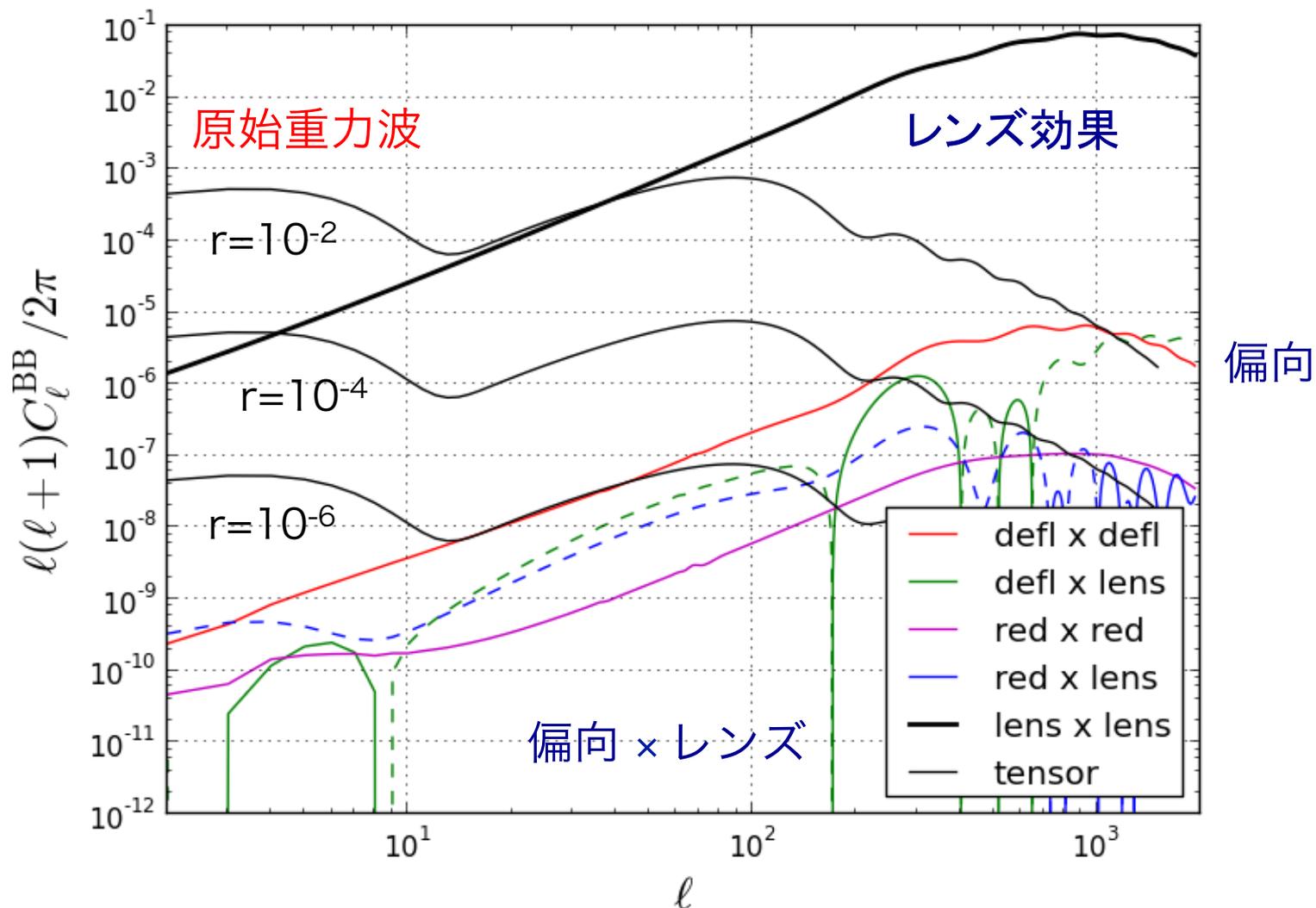


レンズの寄与を除去する必要

$r \downarrow$ 高い精度で除去が必要

リマッピング法はどこまで正しいか？

各非線形伝播効果によるBモード



レンズ以外の寄与は $r=10^{-5}$ くらいから重要になる

まとめ

- Line-of-sight法を曲がった測地線に対して拡張

“Curve”-of-sight法

レンズ効果といった非線形の伝播効果を含めた系統的なCMB高次摂動計算の枠組み

非ガウス性やBモード偏光などで重要

- CoS法による既存の方法（リマッピング法）の精度チェック

非ガウス性: リマッピングでOK

Bモード偏光: $r=10^{-5}$ 程度までリマッピングでOK

- 重力理論やダークエネルギーの検証？