

連続体力学

飯塚 敦

神戸大学

iizuka@kobe-u.ac.jp

無断転用を禁ず

参考書(本講で引用)

○ 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎,
久田俊明著, 丸善, 1992

基本的な教科書, テンソル解析の学習に最適

○ 連続体力学入門, 田村武著, 朝倉書店, 2000

線形代数との関連を重視して書かれた自習書

○よくわかる連続体力学ノート, 非線形CAE協会編
／京谷孝史著, 森北出版, 2008

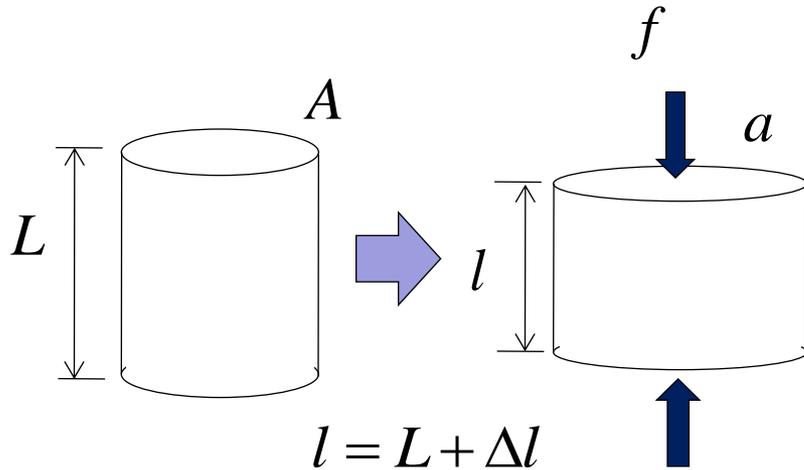
「痒いところにも手が届く」参考書, 「工具箱」で細かく理解

第1話

連続体力学による記述

疑問

ひずみと応力と断面補正



土質実験の手引き書によれば

軸ひずみ: $\varepsilon_a = \frac{l-L}{L} = \frac{\Delta l}{L} \neq \frac{\Delta l}{l}$

軸応力: $\sigma = \frac{f}{a} \neq \frac{f}{A}$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta l}{L}, \quad \frac{\Delta l}{l}, \quad \ln \frac{l}{L} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{L} \right) \quad ?$$

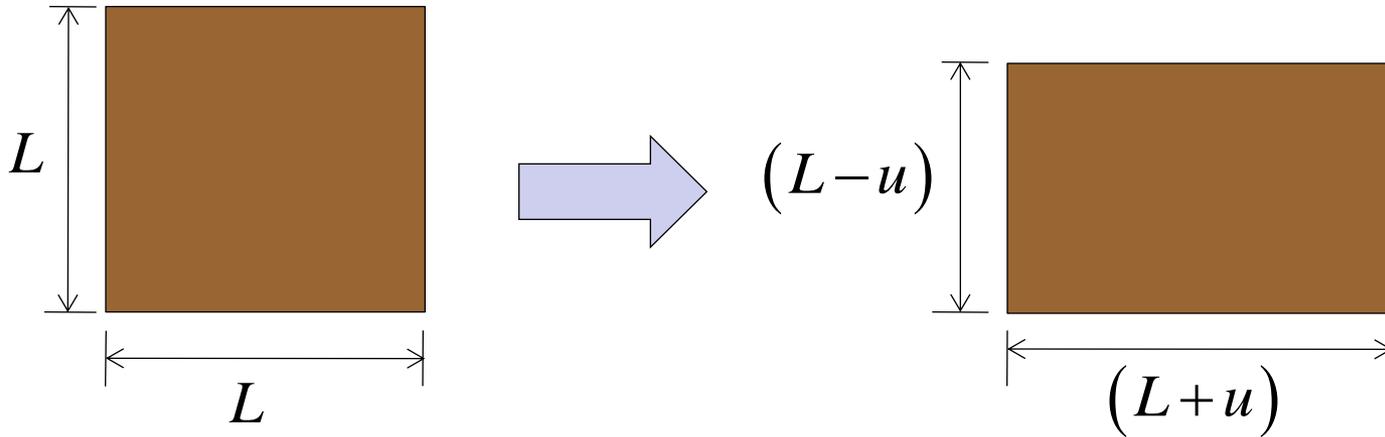
$$d\varepsilon_a = \frac{dl}{L}, \quad \frac{L}{l} \left(\frac{dl}{l} \right), \quad \frac{dl}{l} \quad ?$$

$$\sigma = \frac{f}{A}, \quad \frac{f}{a} \quad ?$$

疑問 等(定)体積せん断

簡単のため2次元を考える

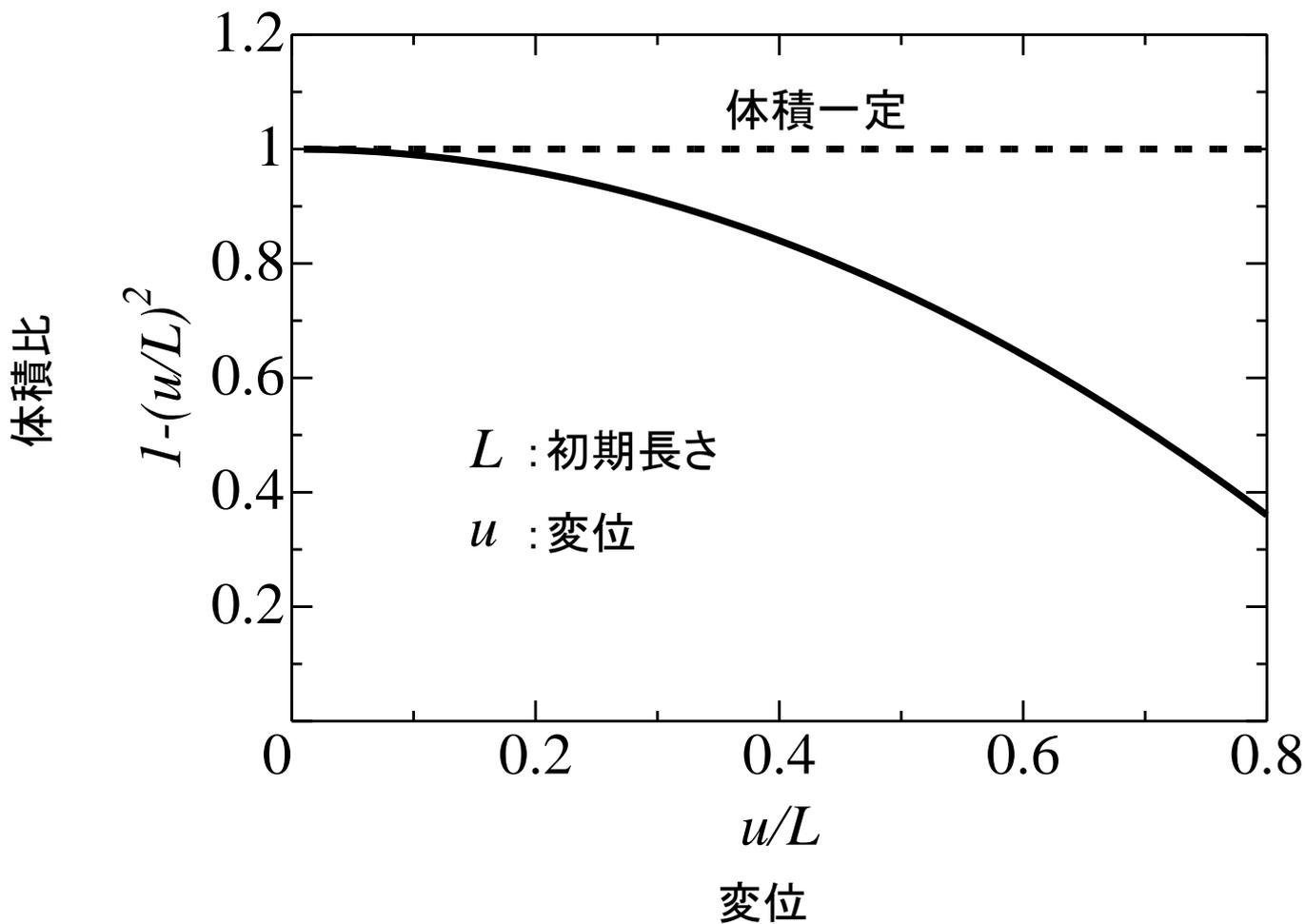
縦に u , 横に同じく u だけ変位したとする



体積(面積) $L \times L = L^2 \rightarrow (L-u) \times (L+u) = L^2 - u^2 \neq L^2$

体積(面積)ひずみ $\varepsilon_v = \varepsilon_a + \varepsilon_r = \frac{u}{L} + \left(-\frac{u}{L}\right) = 0$

ただし, 圧縮を正とした

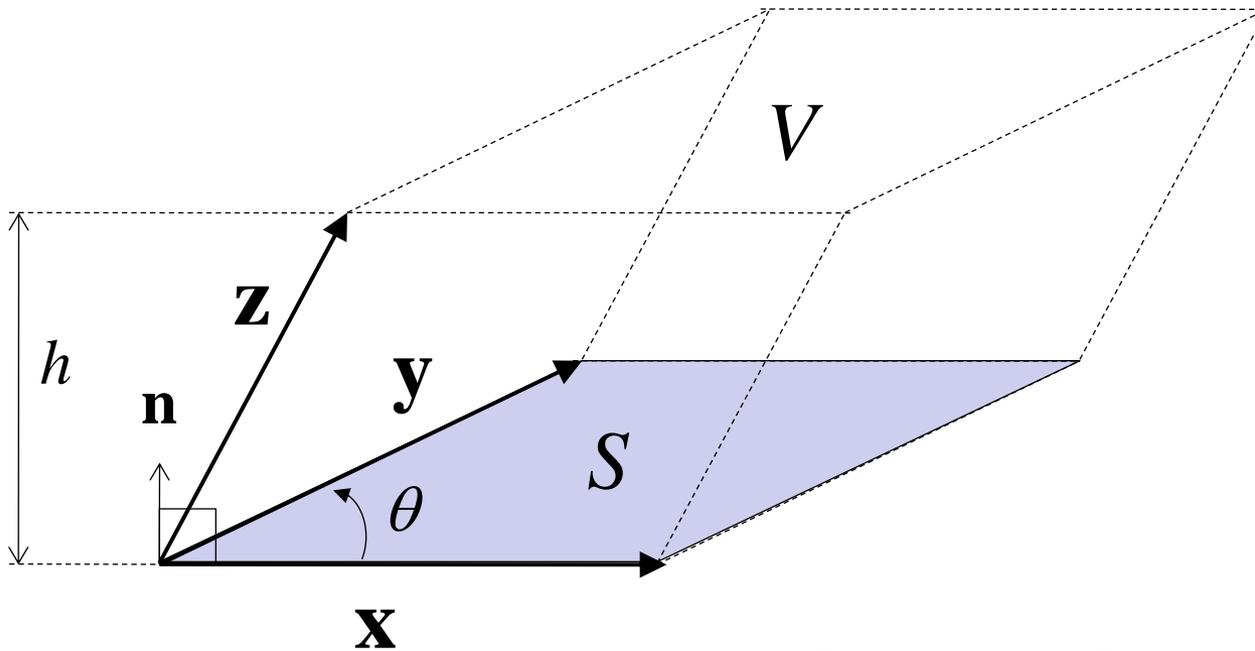


準備1 スカラー3重積

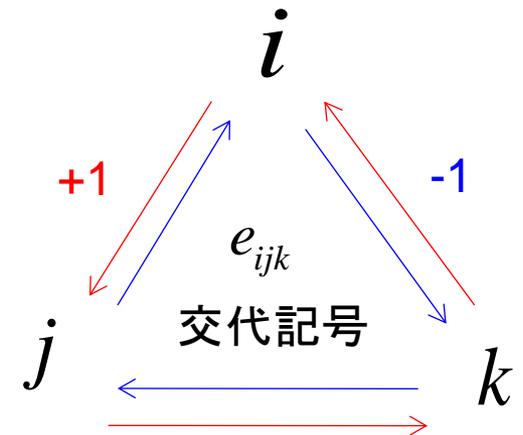
$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = V$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \theta \mathbf{n} = S \mathbf{n}$$

$$S \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} = S h = V$$



$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} = e_{ijk} x_j y_k \mathbf{i}_i \rightarrow \begin{cases} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_3 \end{cases}$$



ijkが123, 231, 312のとき+1
 ijkが321, 213, 132のとき-1
 他は0

準備2 $\det \mathbf{A}$

\mathbf{A} による線形変換 (線形写像)

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$$



$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{z}]}{[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \\ &= e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \\ &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{matrix}$$

準備3

$$\frac{d}{dt} (\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \cdot$$

恒等式

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I\lambda^2 - II\lambda + III$$

$$\begin{cases} I = \text{tr } \mathbf{A} \\ II = \frac{1}{2} \left((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } \mathbf{A}^2 \right) \\ III = \det \mathbf{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \Delta t \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} \\ \lambda \rightarrow -1 \end{cases}$$

$$\det(\Delta t \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) = 1 + \Delta t \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}}) + O(\Delta t^2)$$

Δt : 微小

$$\therefore \det(\Delta t \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) = \det(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}}) \approx 1 + \Delta t \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}})$$

ところで

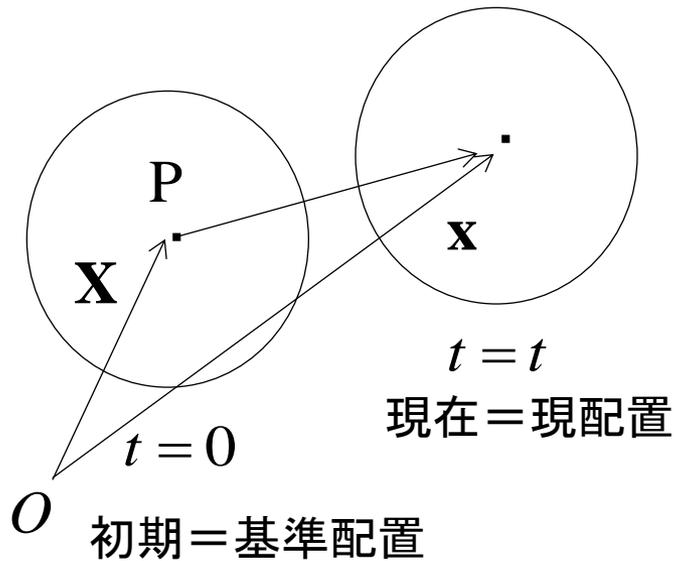
定義より

$$\frac{d}{dt} (\det \mathbf{A}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \det(\mathbf{A} + \Delta t \dot{\mathbf{A}}) - \det \mathbf{A} \right\}$$

$$= \det \mathbf{A} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \det(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}}) - 1 \right\}$$

$$= \det \mathbf{A} \cdot \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}})$$

準備4 変化率 物質時間微分1



運動 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$: 1対1対応

$t = 0$ で \mathbf{X} にあった粒子(物質点) P が
 $t = t$ で \mathbf{x} にある.

この P の何らかの物理量(例えば温度):

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$$

Lagrange表記

Euler表記

$$\dot{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \Phi(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}: \text{fixed}}$$

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t - \phi(\mathbf{x}, t) \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}$$

準備5 変化率 物質時間微分2

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Delta t - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \right\} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}: \text{fixed}} = \mathbf{v} \quad \text{速度}\end{aligned}$$

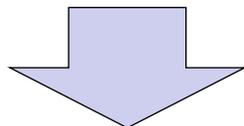
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Delta t - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \right\} \quad \text{意味を成さない} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{X}: \text{fixed}} \cdot \mathbf{v} + \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}: \text{fixed}} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

準備6 変化率 物質時間微分3

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} ?$$

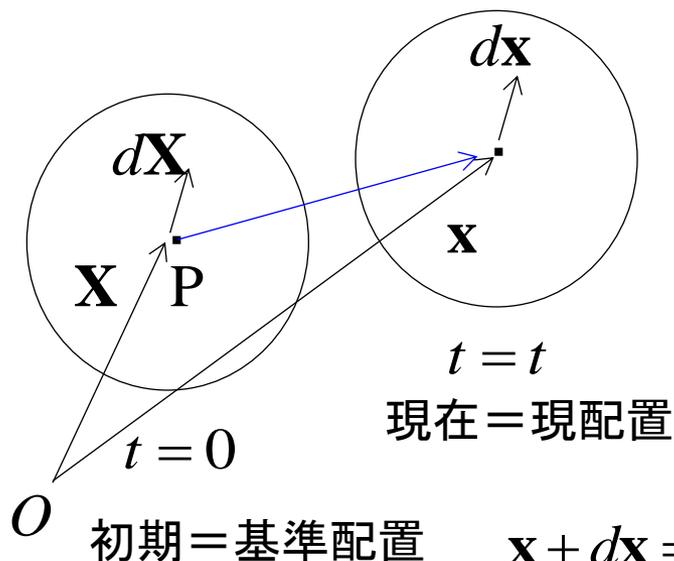
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}:\text{fixed}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}$$

$t = t$ において \mathbf{x} にあった粒子(物質点)は,
 $t = t + \Delta t$ に \mathbf{x} にはない



$\frac{\partial \phi}{\partial t}$ は, ある特定の粒子(物質点)の物理的変化率を示すものではない

運動／変形の記述1



運動 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$: 1対1対応

$t = 0$ で \mathbf{X} にあった粒子(物質点) P が
 $t = t$ で \mathbf{x} にある.

変位 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{x} = \boxed{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}} \cdot d\mathbf{X}$$

↑
 にあった粒子は $t = t$ では

F

変形勾配 $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad J = \det \mathbf{F} \neq 0 (> 0)$

変位勾配 $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$

計算の中味

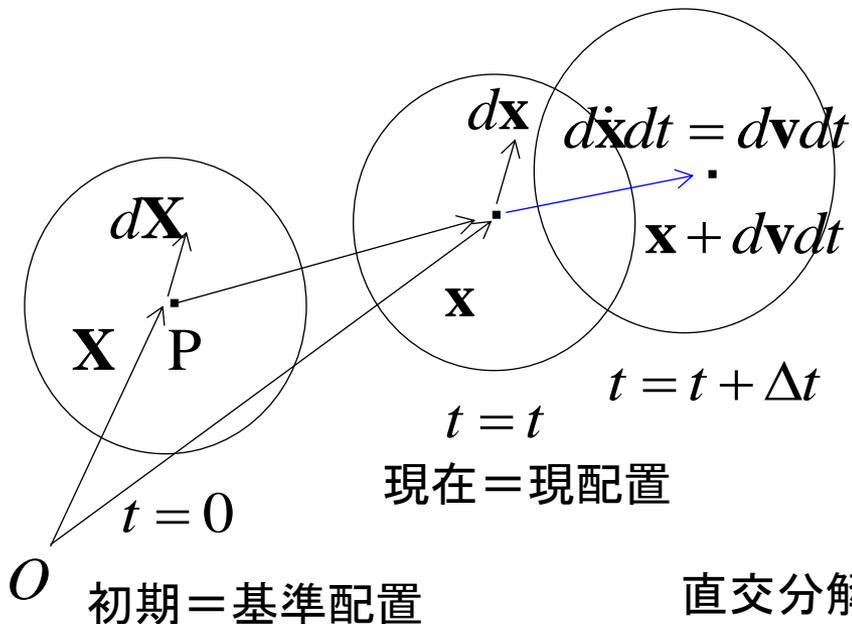
$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

↑
内積

$$dx_i = \sum_J \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J = F_{iJ} dX_J \quad i, J = 1, 2, 3$$

運動／速度(増分)の記述



変形速度勾配

$$\mathbf{l}_V = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad \left(\text{cf: } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{l}_V d\mathbf{x}$$

$$\text{直交分解: } \mathbf{l}_V = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad \begin{cases} \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l}_V + \mathbf{l}_V^T) \\ \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l}_V - \mathbf{l}_V^T) \end{cases}$$

ストレッチング・テンソル $\mathbf{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right)$

スピン・テンソル $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right)$

「基準」から瞬間の変化
lim(「現配置」→「基準配置」)

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{V}}$$

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{R}}$$

運動／変形の記述2

正則な二階のテンソルは直交テンソルを用いて極分解できる

運動 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$

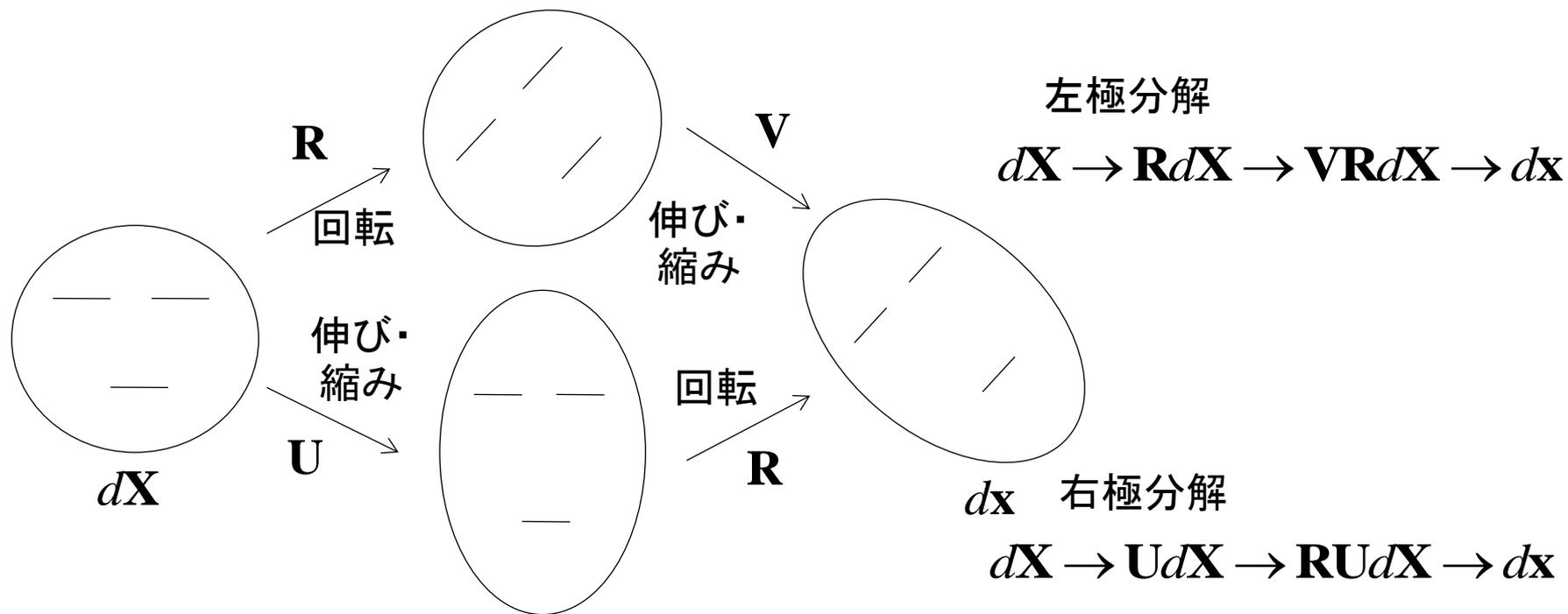
変形勾配 $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$

変形勾配の分解 $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

\mathbf{R} : 直交テンソル

$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \therefore \det \mathbf{R} = \pm 1$

直交テンソルはベクトルに回転を与えるだけで長さを変えない



R : 直交テンソル

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \therefore \det \mathbf{R} = \pm 1$$

直交テンソルはベクトルに回転を
与えるだけで長さを変えない

$$|\mathbf{R}\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{R}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$$

$$\det(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R}^T\mathbf{R}) = (\det \mathbf{R})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

U と **V** は, 固有値が同じ

$$\det(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T - \lambda\mathbf{I}) = \det\{\mathbf{R}(\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{R}^T\} = \det(\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I})$$

$$\therefore \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \mathbf{V}$$

正則な二階のテンソルは直
行テンソルを用いて一意に
極分解できる

i) $\det \mathbf{F} > 0$ ならば, $\mathbf{a} \neq 0$ なる全ての \mathbf{a} に対して,

$$(\mathbf{F}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}) > 0 \text{ である. よって, } \mathbf{F}^T \mathbf{F} \text{ は正値対称テンソル.}$$

よって, $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{\frac{1}{2}}$ は正値対称テンソル.

また, $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ とすると, :

1) $\det \mathbf{U} > 0$ だから, $\det \mathbf{U}^{-1} > 0$. さらに $\det \mathbf{F} > 0$ だから, $\det \mathbf{R} > 0$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T &= (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}^{-T} \mathbf{F}^T) = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-T} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-2} \mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{I} \end{aligned} \quad \text{よって, } (\det \mathbf{R})^2 = 1$$

よって, $\det \mathbf{R} = 1$. すなわち \mathbf{R} は直交テンソル.

以上より, $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ が証明できた.

ii)一意性: $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}_1\mathbf{U}_1$ と異なる分解が存在すると仮定する.

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^2 \text{ となる. } \mathbf{U} \text{ は正値対称. よって } \mathbf{U} = \mathbf{U}_1.$$

$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ の証明も同様.

運動／変形の記述3

伸び・縮み→ひずみ

\mathbf{V} : 左ストレッチテンソル

\mathbf{U} : 右ストレッチテンソル

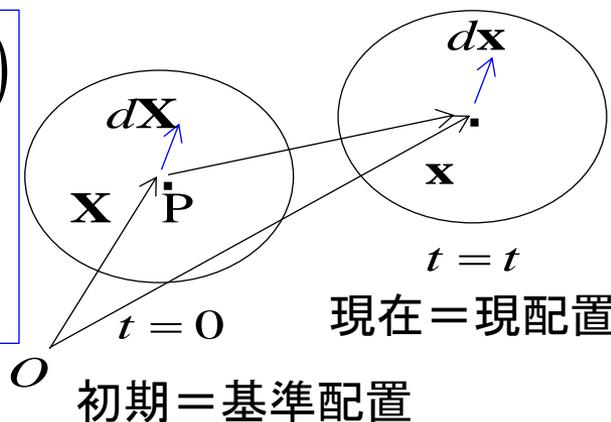
$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (= \mathbf{V}\mathbf{R}(\mathbf{V}\mathbf{R})^T = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^T)$$

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (= (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U})$$

$= \mathbf{b}$: 左コーシー・グリーン・テンソル

$= \mathbf{C}$: 右コーシー・グリーン・テンソル

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

「長さ」の変化

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} : d\mathbf{X} \text{ に対して「ひずみ」が } (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) d\mathbf{x} : d\mathbf{x} \text{ に対して「ひずみ」が } (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \end{aligned}$$

運動／変形の記述4

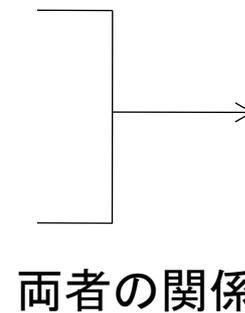
伸び・縮み→ひずみ

「長さ」の変化

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} : d\mathbf{X} \text{ に対して「ひずみ」が } (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) d\mathbf{x} : d\mathbf{x} \text{ に対して「ひずみ」が } (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})\end{aligned}$$

グリーンひずみテンソル $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$

アルマンシひずみテンソル $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$



$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$$

「足」が \mathbf{X}

「足」が \mathbf{x}

$$E_{IJ} = F_{Ik} e_{kl} F_{lJ}$$

変形が微小 $\rightarrow t = \Delta t \ll 1$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \Delta t)$: 微小変形の定義

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \Delta t) \simeq \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{X} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

$$\therefore \mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{X} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad : \text{微小変形理論}$$

$$\mathbf{F}(\Delta t) \simeq \mathbf{F}(0) + \Delta t \dot{\mathbf{F}}(0) = \mathbf{I} + \Delta t (\mathbf{l}_v(0) \mathbf{F}(0)) = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{l}_v(0)$$

$$\therefore \mathbf{H}(\Delta t) = \Delta t \mathbf{l}_v(0)$$

変形テンソル

$$\therefore \mathbf{l}_v = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\Delta t) = \mathbf{F}^T(\Delta t) \mathbf{F}(\Delta t) = \mathbf{I} + \Delta t \{ \mathbf{l}_v(0) + \mathbf{l}_v^T(0) \}$$

$$\mathbf{b}(\Delta t) = \mathbf{F}(\Delta t) \mathbf{F}^T(\Delta t) = \mathbf{I} + \Delta t \{ \mathbf{l}_v(0) + \mathbf{l}_v^T(0) \}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{b}$

ひずみテンソル

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} = \frac{1}{2} \Delta t \{ \mathbf{l}_v(0) + \mathbf{l}_v^T(0) \} = \boldsymbol{\varepsilon} : \text{微小ひずみテンソル}$$

$$\text{ただし, } \Delta t \mathbf{l}_v(0) = \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial (\Delta t \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

ひずみと変位の関係

グリーンのひずみ

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) - \mathbf{I} \right\} \\ \left(\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \end{aligned}$$

アルマンシのひずみ

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \\ \left(\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \end{aligned}$$

微小ひずみ

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{x} \text{ と } \mathbf{X} \text{ の区別なし}$$

デカルト直交座標系での微小ひずみの成分

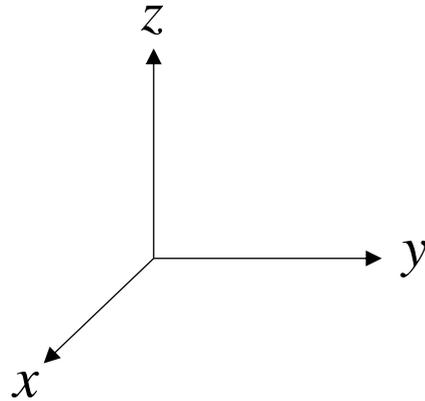
3次元

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_z$$



$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy}$$

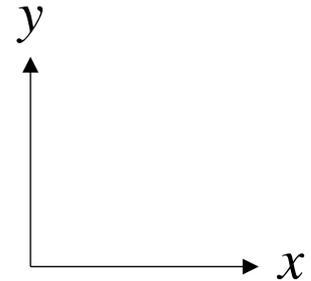
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$$

2次元

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y$$

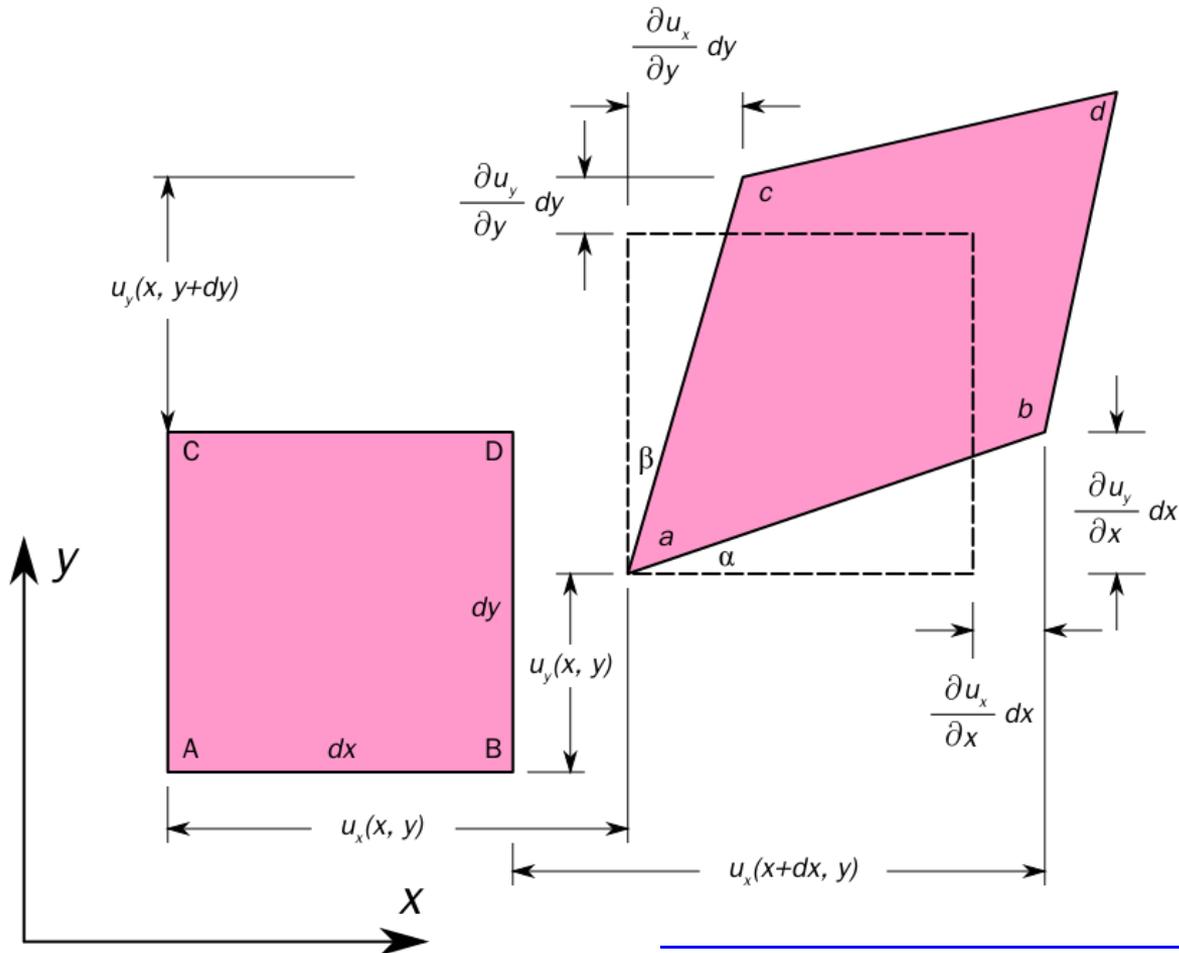
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}$$



直感的な 微小ひずみの 理解1

$$u_x(x+dx, y+dy) = u_x(x, y) + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + O^2(dx, dy)$$

$$u_y(x+dx, y+dy) = u_y(x, y) + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + O^2(dx, dy)$$

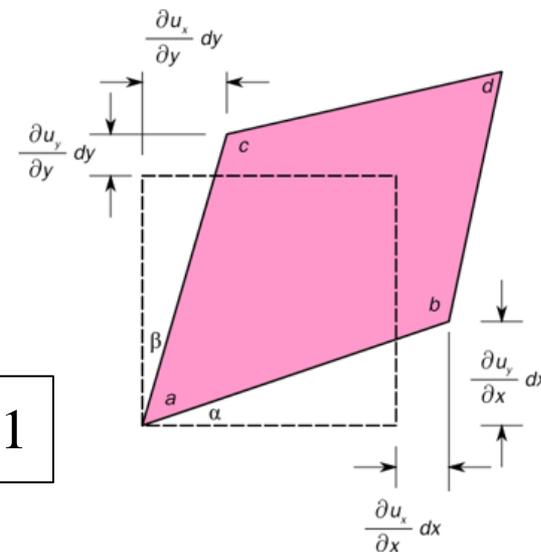


直感的な 微小ひずみの理解2

$$AB = dx, \quad ab = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\rightarrow \varepsilon_x = \frac{ab - AB}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \text{ for } x \ll 1$$



$$\tan \alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}, \quad \tan \beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \ll 1 \rightarrow \tan \alpha \approx \alpha, \quad \tan \beta \approx \beta, \quad \alpha \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \beta \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\rightarrow \gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{xy}$$

ひずみと変位の関係（一次元）

グリーンのひずみ

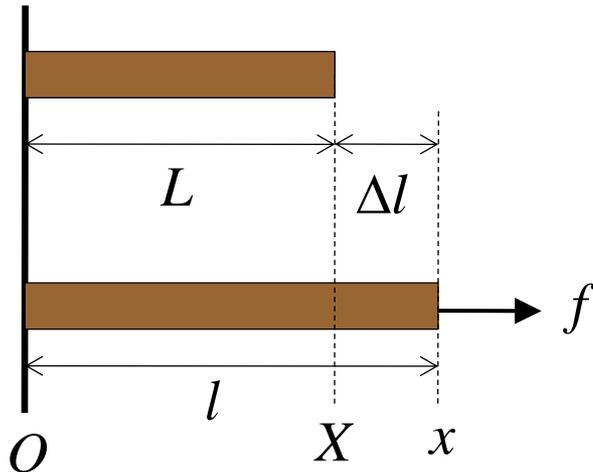
$$E = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2$$

アルマンシのひずみ

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

微小ひずみ

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad : X \text{ と } x \text{ の区別なし}$$



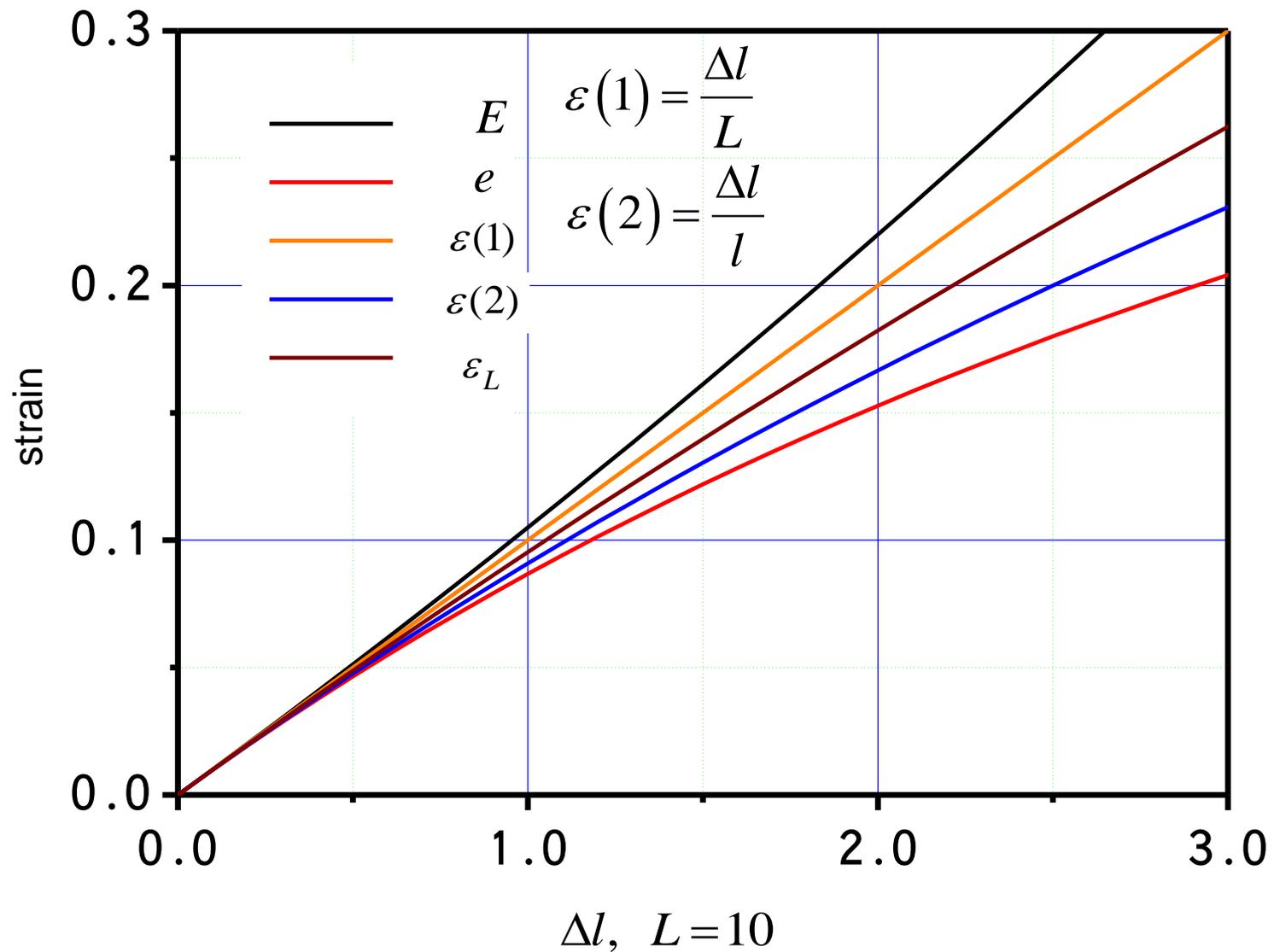
$$E = \frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2$$

$$e = \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2$$

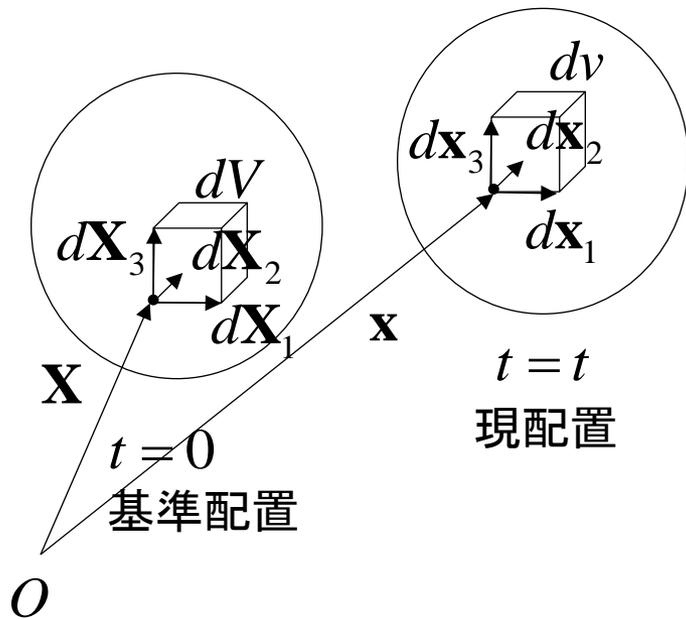
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{l}$$

一様変形を仮定

積分 $d = \frac{l}{l} \rightarrow \varepsilon_L = \ln \frac{l}{L} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{L} \right)$: 対数ひずみ



体積の変化



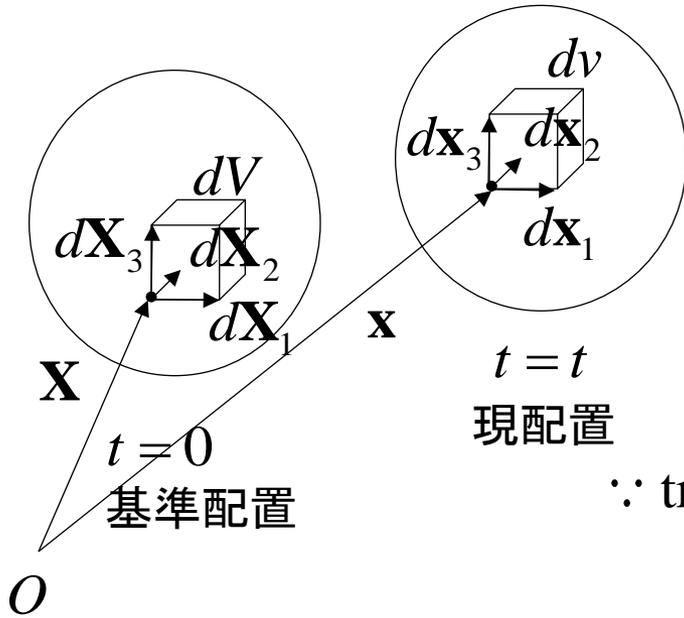
$$\begin{aligned}
 dV &= [d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] \\
 dv &= [d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3] \\
 &= [\mathbf{F}d\mathbf{X}_1, \mathbf{F}d\mathbf{X}_2, \mathbf{F}d\mathbf{X}_3] \\
 &= (\det \mathbf{F}) [d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] \\
 &= (\det \mathbf{F}) dV
 \end{aligned}$$

$$\therefore dv = JdV$$

$$\frac{dv}{dV} = \frac{1+e}{1+e_0} = J > 0 \quad \text{体積比}$$

体積の変化率

$$\dot{J} = (\det \mathbf{F})' = \det \mathbf{F} \cdot \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = J \text{tr} \mathbf{l}_V = J \text{div} \mathbf{v}$$



$$\therefore \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)' \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{l}_V$$

$$\therefore \text{tr} \mathbf{l}_V = \text{tr} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div} \mathbf{v}$$

$$\dot{j} = \frac{\dot{e}}{1+e_0}, \quad \left(dJ = \frac{de}{1+e_0} \right)$$

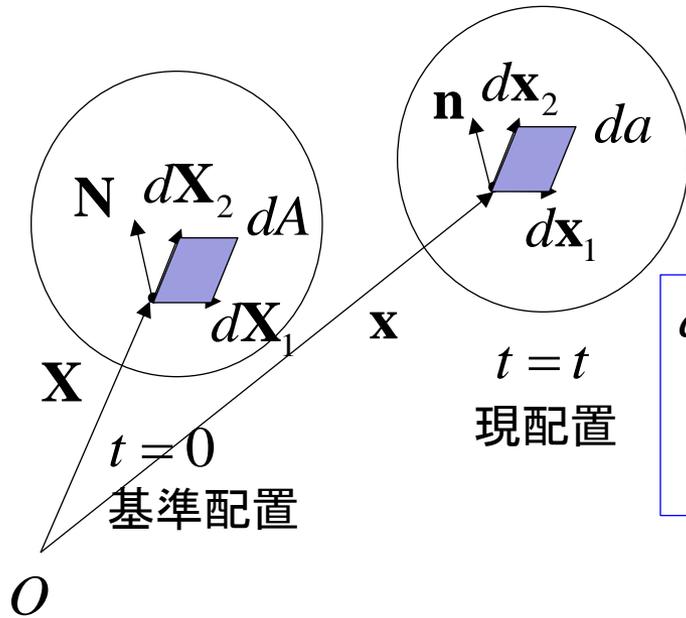
$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{e}}{1+e} = \text{tr} \mathbf{l}_V = \text{div} \mathbf{v} = \text{tr} \mathbf{d}$$

面積の変化

面積ベクトル: $d\mathbf{A} = \mathbf{N}dA$, $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$

$$d\mathbf{A} = \mathbf{N}dA = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$$

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n}da = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2$$



$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 \\ &= (\mathbf{N}dA) \cdot d\mathbf{X}_3 \end{aligned}$$

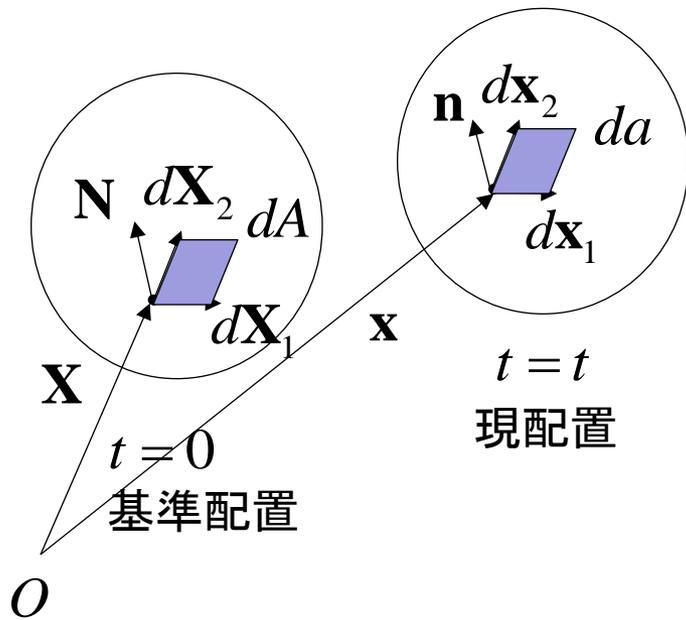
$$\begin{aligned} dv &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \\ &= (\mathbf{n}da) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}_3) \\ &= \mathbf{F}^T (\mathbf{n}da) \cdot d\mathbf{X}_3 \end{aligned}$$

$$dv = JdV$$

$$Jd\mathbf{A} = \mathbf{F}^T d\mathbf{a}, \quad d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{n}da = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}dA$$

dA と da の大きさ



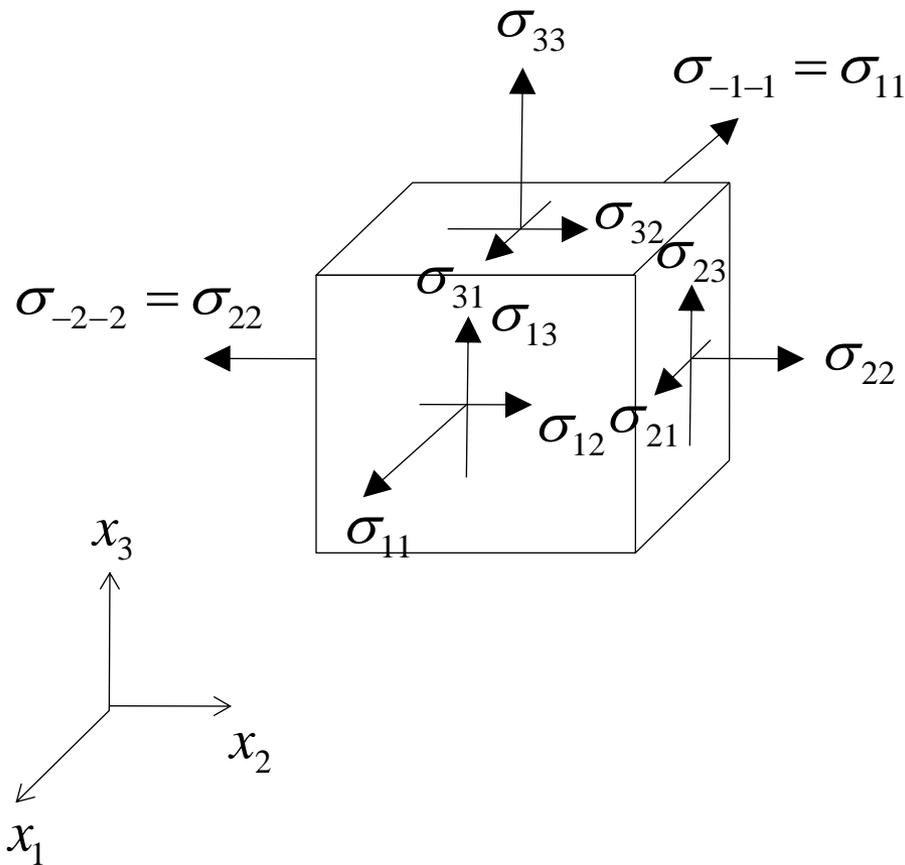
$$\begin{aligned}
 (da)^2 &= (\mathbf{n}da) \cdot (\mathbf{n}da) \\
 &= (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dA) \cdot (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dA) \\
 &= \mathbf{N} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1} \mathbf{N} (JdA)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (JdA)^2 &= (\mathbf{J}\mathbf{N}dA) \cdot (\mathbf{J}\mathbf{N}dA) \\
 &= (\mathbf{F}^T\mathbf{n}da) \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{n}da) \\
 &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)\mathbf{n} (da)^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{da}{dA} = J \sqrt{\mathbf{N} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1} \mathbf{N}} = \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)\mathbf{n}}}$$

コーシー応力(定義)

σ_{ij} $\begin{cases} i: \text{作用する面 (面の法線方向)} \\ j: \text{作用する方向} \end{cases}$



$$\begin{cases} \sigma_{-ij} = -\sigma_{ij} \\ \sigma_{i-j} = -\sigma_{ij} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

コーシーの関係

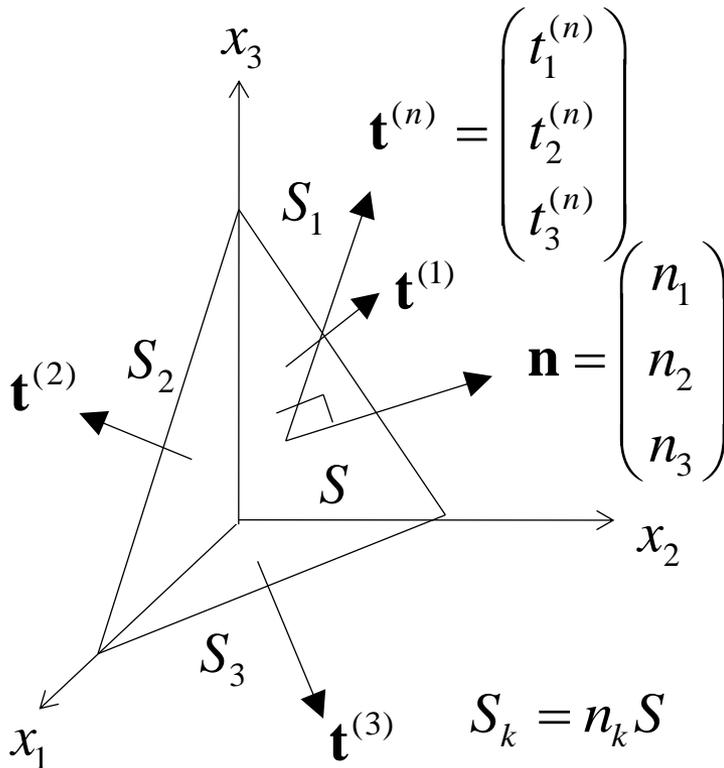
つりあい状態(準静的場での線形運動量保存)

$$(\mathbf{t}^{(n)} + \boldsymbol{\delta})S - \sum_{k=1}^3 (\mathbf{t}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)})S_k + \frac{1}{3}(\mathbf{f} + \boldsymbol{\delta}')hS = 0$$

$S_k = n_k S$, $\boldsymbol{\delta}$: 微小四面体の各面に作用する力の作用点の微小なズレによる量

h : 面Sの原点からの距離, \mathbf{f} : 物体力, $h \rightarrow 0$ とすると, $\boldsymbol{\delta} \rightarrow \mathbf{0}$

表面力ベクトル



$$\therefore \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(1)} n_1 + \mathbf{t}^{(2)} n_2 + \mathbf{t}^{(3)} n_3$$

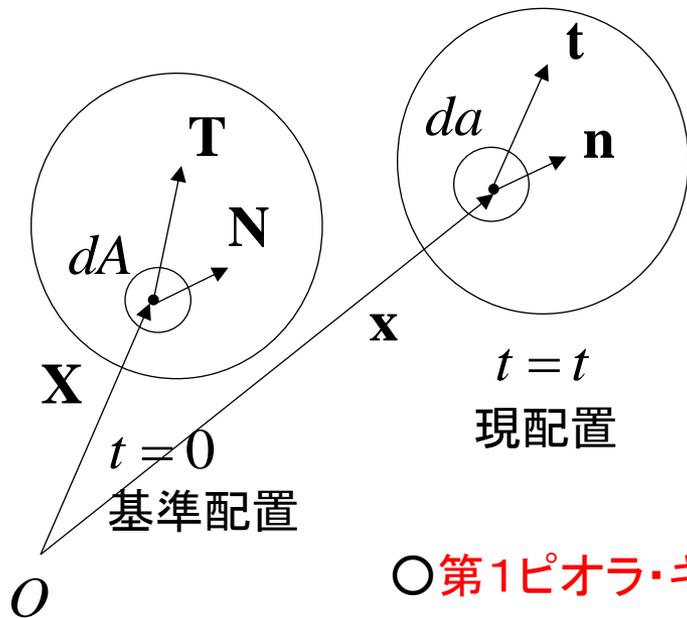
$$= \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_3^{(1)} \end{pmatrix} n_1 + \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_3^{(2)} \end{pmatrix} n_2 + \begin{pmatrix} t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \\ t_3^{(3)} \end{pmatrix} n_3$$

$$= \begin{pmatrix} t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & t_1^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(3)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(2)} & t_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$$

いろいろな応力

$\mathbf{T}dA = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{t}da$ 表面力ベクトル



$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$: コーシー応力

: 現配置での表面力ベクトルに対応する
現配置での応力

微小面積の関係 $\mathbf{n}da = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dA$

$$\underline{\underline{\mathbf{t}da}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}da = J\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}dA$$

○ 第1ピオラ・キルヒホッフ応力

$$\underline{\underline{\mathbf{t}da}} = \mathbf{P}\mathbf{N}dA = \frac{1}{J}\mathbf{P}\mathbf{F}^T \mathbf{n}da \rightarrow \mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T}$$

: 現配置での表面力ベクトルに対応する
基準配置での応力

○ 第2ピオラ・キルヒホッフ応力

$$\underline{\underline{\mathbf{T}dA}} = \mathbf{S}\mathbf{N}dA \rightarrow \mathbf{t}da = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{N}dA = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T \mathbf{n}da \rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T}$$

: 基準配置での表面力ベクトルに対応する
基準配置での応力

不変量 (invariant): 座標系によらない量

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} = \sigma_{21} & \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} & \sigma_{32} = \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

コーシー応力は「実対称」
(角運動量保存則より)

実対称行列は、実数の固有値と相異なる固有ベクトルを持つ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

の固有値を「主応力」 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ という。

それぞれの固有値に対応する固有ベクトルが示す方向を「主応力方向」という。

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \rightarrow \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{x} : \text{固有ベクトル} \\ \lambda : \text{固有値} \end{cases}$$

特性方程式

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$$

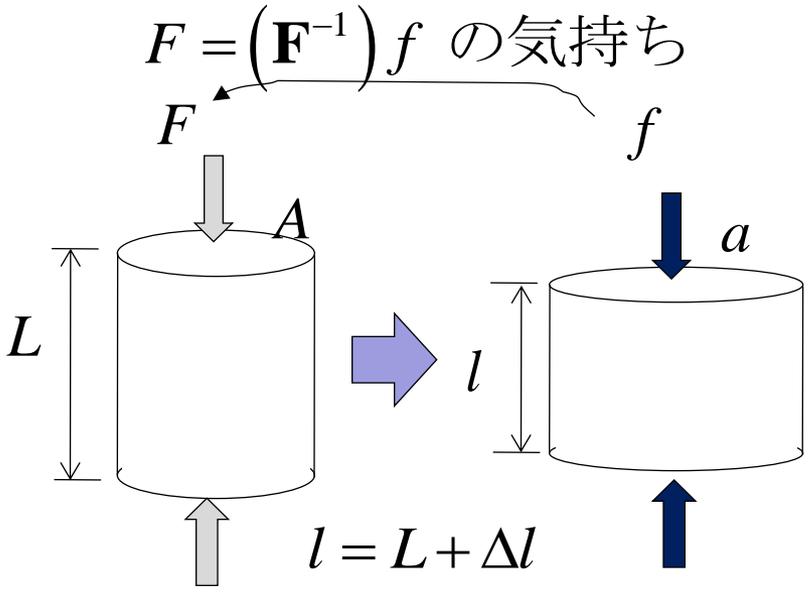
λ の3実根: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

不変量

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

さて、最初の「疑問」にはどう答えられるのでしょうか？

疑問 ひずみと応力と断面補正



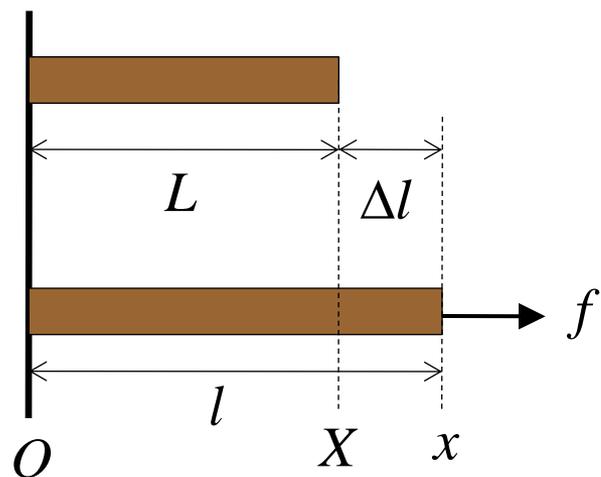
軸ひずみ: $\varepsilon_a = \frac{l-L}{L} = \frac{\Delta l}{L}$

微小ひずみ・・・しかし・・・

軸応力: $\sigma = \frac{f}{a}$: コーシー応力

$P = \frac{f}{A}$: 第1P-K応力(もどき) $S = \frac{F}{A}$: 第2P-K応力(もどき)

$\varepsilon_a = \frac{\Delta l}{L}, \frac{\Delta l}{l}, \ln \frac{l}{L} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{L} \right)$ 微小変形場ならば、どれでも同じはず



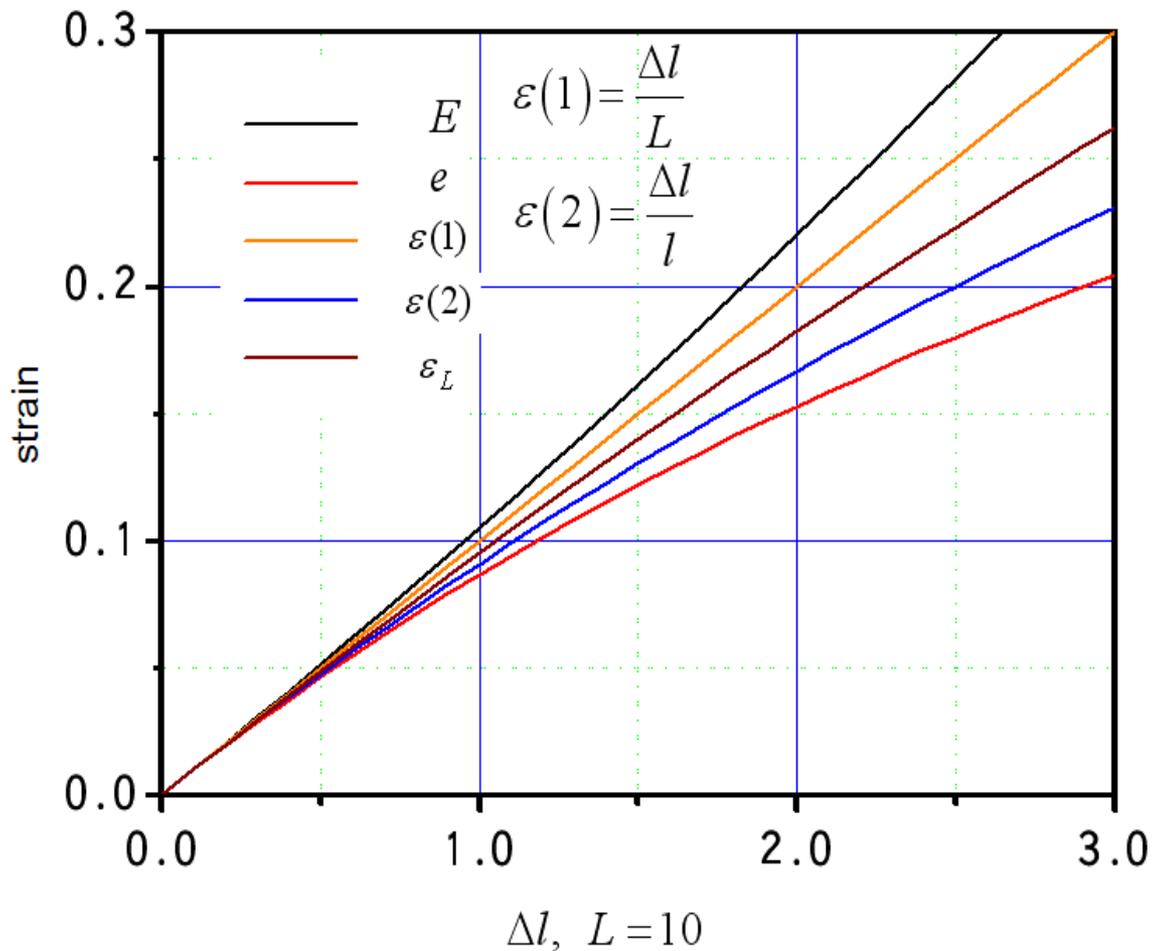
一様変形を仮定

微小変形:

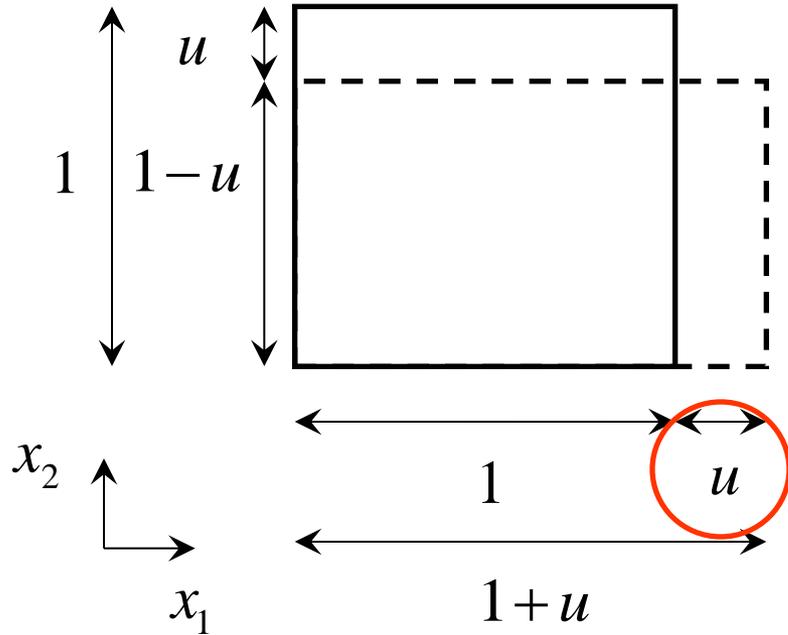
$$E = \frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2 \rightarrow \frac{\Delta l}{L}$$

$$e = \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 \rightarrow \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{l}$$



疑問 等(定)体積せん断



微小ひずみの成分: $\varepsilon_1 = \frac{-u}{1}, \varepsilon_2 = \frac{u}{1}$

体積ひずみ: $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$

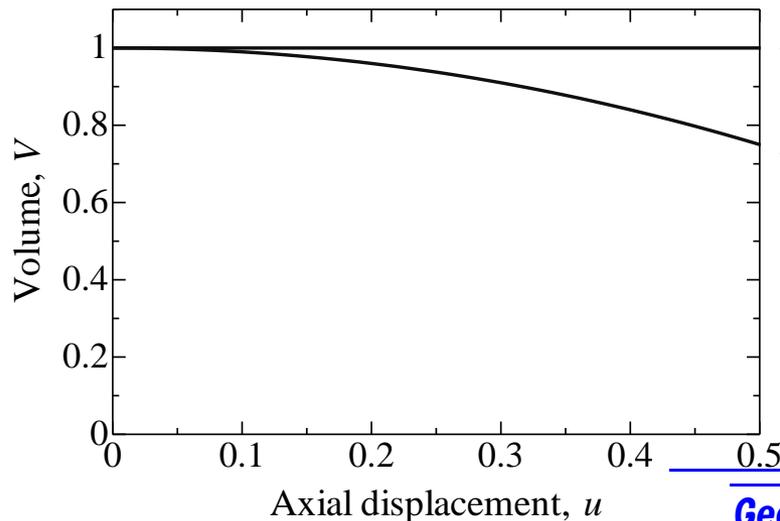
体積ひずみゼロ

変位から求めた体積:

$V = 1 \times 1 \neq (1-u) \times (1+u)$

整合しない

体積は一定でない



← 有限ひずみ: 常に体積一定

← 微小ひずみ: 変位 u が大きくなると

体積を少なめに評価してしまう!

真の体積一定変形(例: 2次元圧縮)

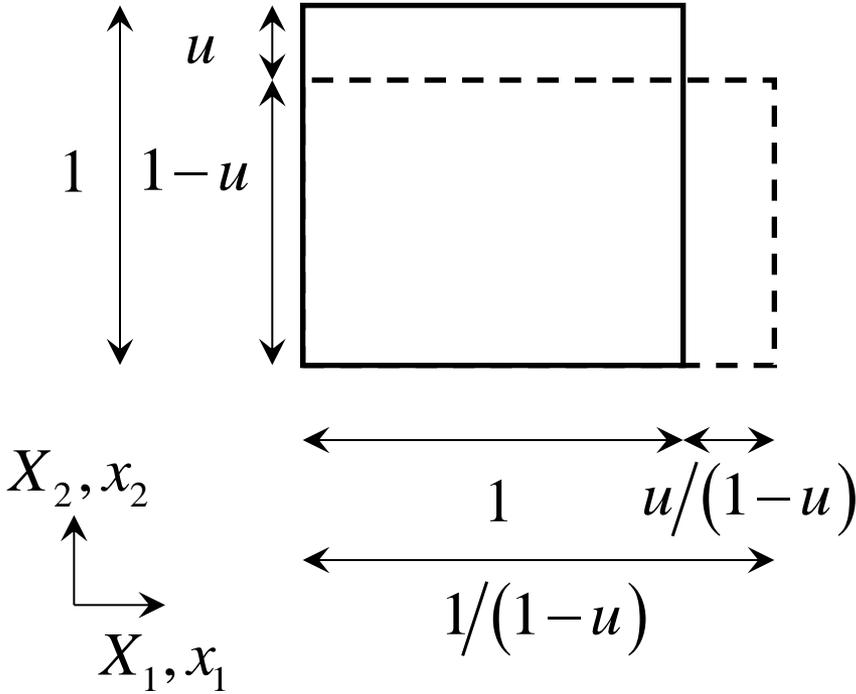
運動の記述:

$$x_1 = \frac{1}{1-u} X_1, \quad x_2 = (1-u) X_2, \quad x_3 = X_3$$

$$\text{変形勾配: } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1/(1-u) & 0 & 0 \\ 0 & 1-u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{体積変化率: } J = \det \mathbf{F} = 1$$

$$\text{体積(対数)ひずみ: } \varepsilon_v = -\ln J = 0$$



変位から求めた体積:

$$V = 1 \times 1 = \frac{1}{1-u} \times (1-u) = 1$$

体積ひずみゼロ

間隙比一定

変位と変形(ひずみ)

整合

体積一定

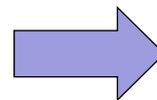
第2話

保存則

証明を要せず，受入れる公理

保存則(証明を要せず, 受け入れる原則)

- 質量の保存
- 運動量の保存
- 角運動量の保存
- エネルギーの保存
- エントロピーの増大



支配方程式
境界値問題

質量の保存

ある領域 v の質量は $\int_v \rho(x, t) dv$

これが「保存」されるということは $\left(\int_v \rho(x, t) dv \right) \dot{=} 0$

$$\begin{aligned} \left(\int_v \rho(\mathbf{x}, t) dv \right) \dot{=} & \left(\int_V \rho(\mathbf{x}, t) J dV \right) \dot{=} \int_V \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) J dV + \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \dot{J} dV \\ & = \int_v \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) dv + \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v} J dV = \int_V (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) dv = 0 \end{aligned}$$

いかなる領域 v についても成り立たねばならないから

$$\therefore \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

運動量の保存

「ある領域 v に加速度 \mathbf{g} , その表面に表面力 \mathbf{t} が作用しているとき, その運動量の時間変化率は, 作用外力に等しい(Eulerの第1法則)」は,

$$\left(\int_v \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \right) \dot{=} \int_s \mathbf{t} da + \int_v \underline{\rho \mathbf{g}} dv \quad \text{物体力(単位体積当たり)}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_v \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \right) \dot{=} & \left(\int_v \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) J dV \right) \dot{=} \\ & = \int_v \dot{\rho} \mathbf{v} J dV + \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} J dV + \int_v \rho \mathbf{v} \dot{J} dV \quad (\because (dV) \dot{=} 0) \\ & = \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} J dV + \int_v \dot{\rho} \mathbf{v} J dV + \int_v \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} J dV \\ & = \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv + \int_v (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{v} dv = \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv \end{aligned}$$

$$\int_s \mathbf{t} da = \int_s \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} da = \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T dv \quad (\text{ガウスの発散定理を用いた})$$

$$\text{よって} \quad \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv = \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T dv + \int_v \rho \mathbf{g} dv$$

いかなる領域 v についても成り立たねばならないから

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g} \quad : \text{運動方程式}$$

補足 ガウスの発散定理

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \phi_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$\int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) dv = \int_v \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right) dv = \int_s (\phi_1 n_1 + \phi_2 n_2 + \phi_3 n_3) da = \int_s \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} da$$

体積積分

次元が1つ下がる

面積積分

例: 一次元の場合

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = f(x_2) - f(x_1)$$

例: 二次元の場合

$$\iint_s \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) da = \oint_c (fn_x + gn_y) dc$$

運動方程式とつりあい式

運動方程式: $\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{v}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho g_1 \\ \rho \dot{v}_2 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho g_2 \\ \rho \dot{v}_3 = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 \end{array} \right.$$

静的な場合 (加速度が無視できるとき)

つりあい式: $\mathbf{0} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho g_1 \\ 0 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho g_2 \\ 0 = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 \end{array} \right.$$

角運動量の保存1

「ある領域 v に加速度 \mathbf{g} , その表面に表面力 \mathbf{t} が作用しているとき, 物体力と表面力のモーメントは, その角運動量の時間変化率に等しい(Eulerの第2法則)」は,

$$\left(\int_v \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \right)' = \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} da + \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv$$

$$\left(\int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv \right)' = \left(\int_v \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) J dV \right)'$$

$$= \int_v \dot{\mathbf{x}} \times \rho \mathbf{v} dV + \int_v \mathbf{x} \times \dot{\rho} \mathbf{v} J dV + \int_v \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} J dV + \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \dot{J} dV$$

$$= \int_v \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} J dV + \int_v \mathbf{x} \times \dot{\rho} \mathbf{v} J dV + \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} J dV \quad (\because \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} = 0)$$

$$= \int_v \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv + \int_v \mathbf{x} \times (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{v} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv$$

$$\int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} da \rightarrow \text{成分で表して}(i\text{成分}) \quad \int_s e_{ijk} x_j t_k da$$

クロネッカーの δ_{ij}

$$\delta_{ij} \begin{cases} i = j: 1 \\ i \neq j: 0 \end{cases}$$

$$\int_s e_{ijk} x_j t_k da = \int_s e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l da = \int_v \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk}) dv \quad (\text{ガウスの発散定理を用いた})$$

$$= \int_v e_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dv = \int_v e_{ijk} \left(\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dv = \int_v e_{ijk} \sigma_{jk} dv + \int_v e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} dv$$

角運動量の保存2

$$\int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} da \rightarrow \int_s e_{ijk} x_j t_k da = \int_v e_{ijk} \sigma_{jk} dv + \int_v e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} dv$$

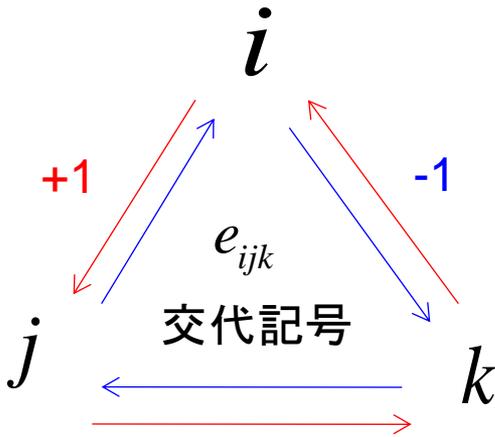
$$\therefore \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} da = \int_v e_{ijk} \sigma_{jk} \mathbf{i}_i dv + \int_v \mathbf{x} \times \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T dv$$

よって $\int_v \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv = \int_v \mathbf{x} \times (\text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}) dv + \int_v e_{ijk} \sigma_{jk} \mathbf{i}_i dv$



$$\leftarrow \rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}$$

$$\therefore \int_v e_{ijk} \sigma_{jk} \mathbf{i}_i dv = 0 \rightarrow e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$



ijkが123, 231, 312のとき+1

ijkが321, 213, 132のとき-1

他は0

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{23} - \sigma_{32} &= 0 \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \therefore \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

コーシー応力は対称

支配方程式

質量保存の式 $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ in } V$

$$\begin{aligned} \text{つりあい式} \quad & \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \text{ in } V \\ & \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \text{ on } S \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned} \text{適合式} & \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}, \text{ in } V \\ \text{(微小ひずみ)} & \\ & \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ on } S \end{aligned}$$

(静的)可容応力場

未知数: $\boldsymbol{\sigma}$ 9個
式: つりあい式 3本

対称性 3本 計6本

(運動学的)可容変位場

未知数: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 6個

\mathbf{u} 3個

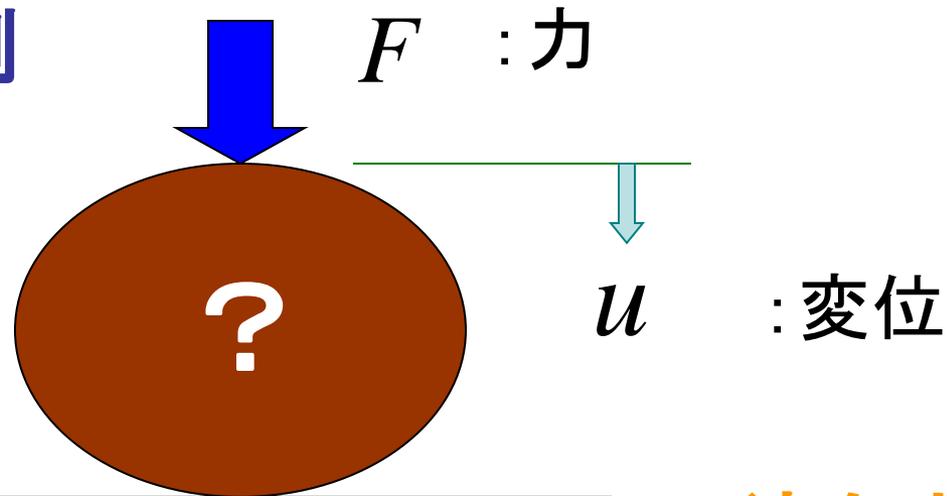
式: 6本

境界値問題(一部分)を構成

式が6本足りない

3次元の場合

構成式の役割



つりあい式

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

B.C. $F = A\sigma$

適合式

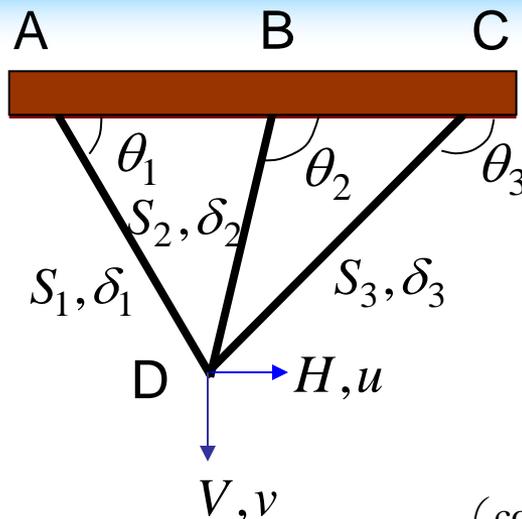
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon$$

B.C. $u = 0$

材料の力学特性 = 構成式

境界値問題

2次元3本トラスの例



構成式の役割

応力とひずみの関係

つりあい式

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

適合式

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

応力境界条件 : $F_y = V$ on St (D点) 変位境界条件 : $u = 0$ on Su (A,B,C点)

$F_x = H$ $v = 0$

構成式

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1 E_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2 E_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3 E_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

足りない式の
数を補う

2次元3本トラスの例(2)

つりあい式

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$B^T \quad \mathbf{S} \quad \mathbf{F}$

適合式

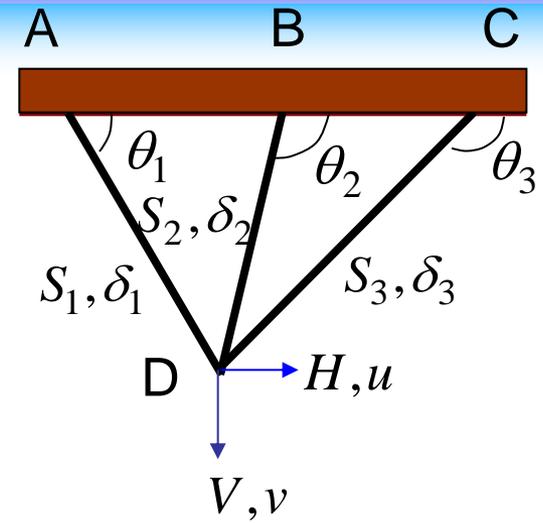
$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$B \quad \mathbf{u} \quad \boldsymbol{\delta}$

構成式

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1 E_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2 E_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3 E_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

$D \quad \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{S}$



$$B^T \mathbf{S} = \mathbf{F}$$

$$B \mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}$$

$$B^T \mathbf{S} = B^T D \boldsymbol{\delta} = B^T D B \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{u} = (B^T D B)^{-1} \mathbf{F}$$

$$D \boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}$$

恒等式

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{S} \cdot (B \mathbf{u}) = (B^T \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

第3話

土質力学
では、構造力学
水理学

何が違う？ 構成式がちがう

構成式: Hookes law (固体の代表的な構成式)
固体と流体の境界値問題
ナビエの式とナビエ・ストークスの式

固体の構成関係 (Green弾性体: hyper-elastic solid) 1

弾性ポテンシャルが存在する弾性体

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \left(\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \quad W: \text{弾性ポテンシャル}$$

$$\text{e.g. } \rho W(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) = \rho W_0 + B_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + O(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn})$$

線形化

$$\text{無ひずみ状態} (\varepsilon_{ij} = 0) \rightarrow W_0 = 0$$

$$\rightarrow \sigma_{ij} = 0 \rightarrow B_{ij} = 0$$

$$\therefore \rho W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \left(\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \right) \quad \text{Generalized Hooke's law}$$

固体の構成関係 (Green弾性体: hyper-elastic solid) 2

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \quad \text{Generalized Hooke's law}$$

E_{ijkl} : 弾性定数 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 個

しかし, 1) σ_{ij} と ε_{ij} との対称性 $\rightarrow E_{ijkl} = E_{jikl}, E_{ijkl} = E_{ijlk}$

2) 弾性ポテンシャルの存在 $\rightarrow E_{ijkl} = E_{klij}$

よって, 21個

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1113} & E_{1112} \\ & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2213} & E_{2212} \\ & & E_{3333} & E_{3323} & E_{3313} & E_{3312} \\ & & & E_{2323} & E_{2313} & E_{2312} \\ & & & & E_{1313} & E_{1312} \\ & \text{sym.} & & & & E_{1212} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \\ 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} \\ 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

等方線形弾性体

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \quad \text{Generalized Hooke's law}$$

4階の等方テンソル:

$$I_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \omega (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$E_{ijkl} = E_{jikl}, E_{ijkl} = E_{ijlk} \rightarrow \omega = 0$$

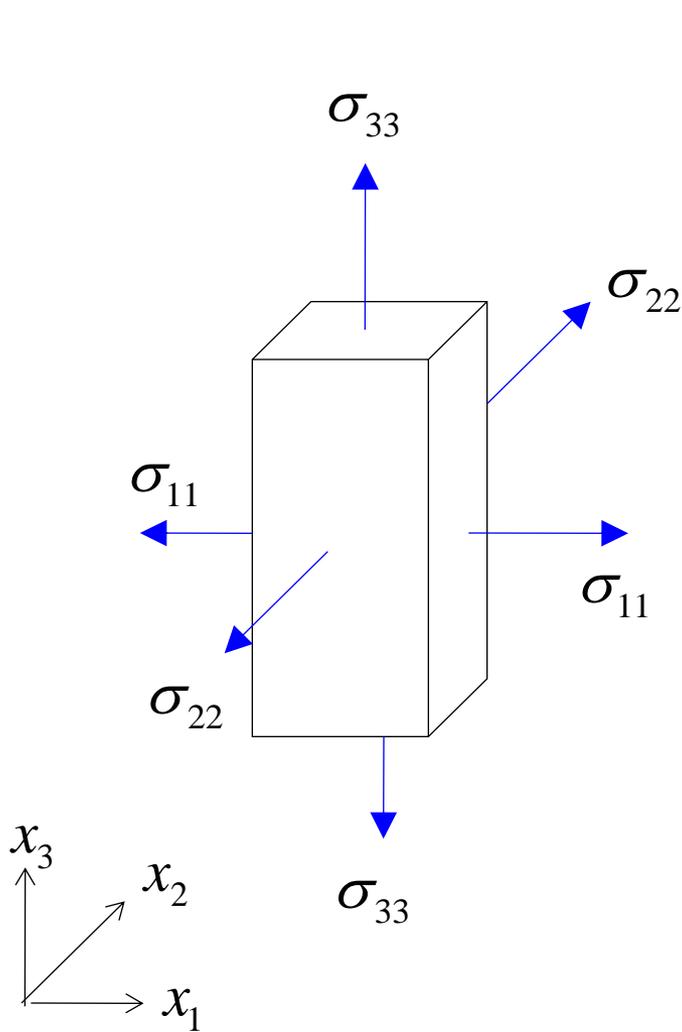
等方線形弾性体:

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \lambda \text{ と } \mu: \text{Lame}' \text{ の定数}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

等方線形弾性体：ヤング率・ポアソン比1



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \text{による } x_1 \text{ 方向のひずみ: } \frac{\sigma_{11}}{E} \\ \sigma_{22} \text{による } x_1 \text{ 方向のひずみ: } -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \sigma_{33} \text{による } x_1 \text{ 方向のひずみ: } -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} \end{array} \right.$$

$$\therefore \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \left(-\nu \frac{\sigma_{22}}{E} \right) + \left(-\nu \frac{\sigma_{33}}{E} \right)$$

同様に, x_2, x_3 方向に対しても考える.

$$\text{よって, } \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right\}$$

等方線形弾性体: ヤング率・ポアソン比2

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} \delta_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right\}$$

係数比較

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad G = \mu$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\because \sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk}, s_{ij} = 2G e_{ij})$$

$$\text{偏差応力: } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \text{偏差ひずみ: } e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

固体の支配方程式

3次元の場合

質量保存の式 $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ in } V$

運動方程式 $\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \text{ in } V$
 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \text{ on } S_t$

ひずみ
(微小ひずみ) $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}, \text{ in } V$
 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ on } S_v$

線形等方弾性体 $\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$

ナビエの
方程式

ナビエの方程式 (Navier)

運動方程式

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}$$



$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}$$

等方線形弾性(固)体

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} + \mu \text{div}(\text{grad} \mathbf{u})$$

$$\rho \dot{v}_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

流体の構成関係

完全流体 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}, (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij})$

ニュートン流体 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda(\text{tr}\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d}, (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij})$



$$\text{平均応力 } \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) d_{kk}$$

$$\sigma_m \text{ は } d_{kk} \text{ に依存しない} \rightarrow 3\lambda + 2\mu = 0$$

ストークス流体 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\dot{\mathbf{e}}, (\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij})$

$$\text{偏差ひずみ速度 } \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \frac{1}{3}(\text{tr}\dot{\mathbf{e}})\mathbf{1}, \left(\dot{e}_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3}d_{kk}\delta_{ij} \right)$$

流体の支配方程式

3次元の場合

質量保存の式 $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ in } V$ 非圧縮性 → 連続式

運動方程式 $\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \text{ in } V$
 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \text{ on } S_t$

+

ストレッチング
(ひずみ速度) $\mathbf{d} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}, \text{ in } V$
 $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \text{ on } S_v$

+

ストークス流体 $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\mu \dot{\mathbf{e}} \left(\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{d}) \mathbf{1} \right)$

→ ナビエ・
ストークスの
方程式

連続条件式

質量保存の式 $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ in } V$



非圧縮性: $\dot{\rho} = 0$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \right)$$

cf: 定常 (時間変化がない) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

ナビエ・ストークスの方程式 (Navier-Stokes)

運動方程式

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{g}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\mu \dot{\mathbf{e}} \quad \leftarrow \mathbf{d} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \\ \text{Stokes流体} \\ \leftarrow \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \text{連続条件式 (非圧縮性流体)} \end{array} \right.$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mu \text{div}(\text{grad } \mathbf{v})$$

$$\rho \dot{v}_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

対流項 (convective term)

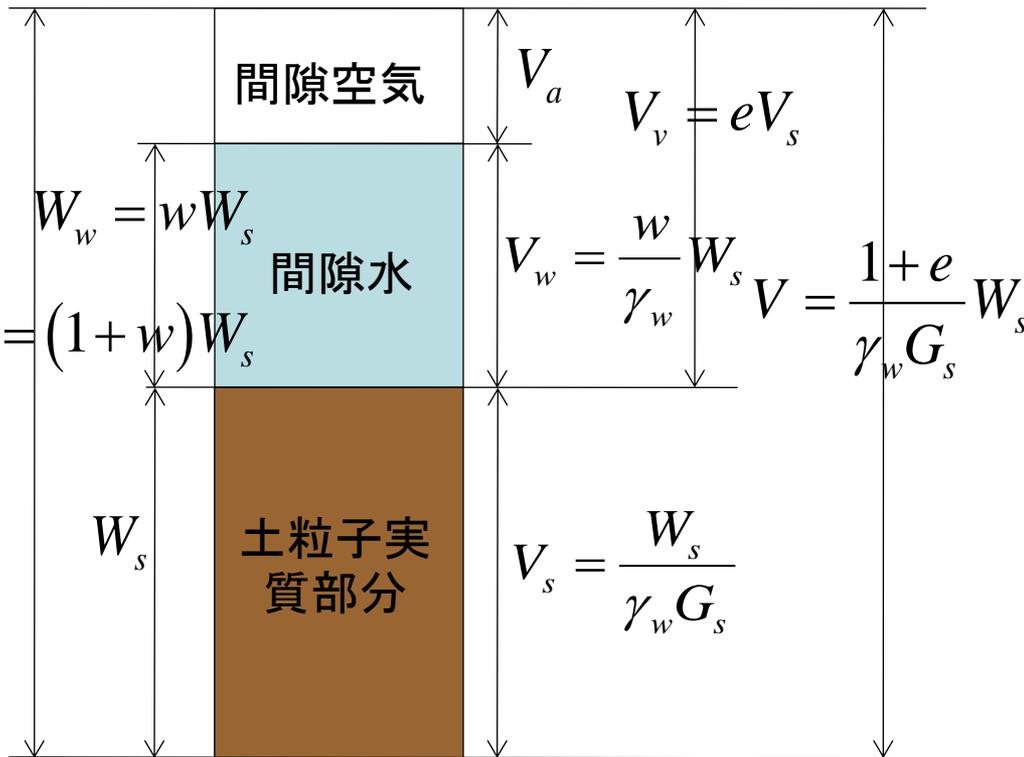
第4話

土質力学における連続体力学的見方

一次元圧密理論 (Terzaghiの理論)

疑問 体積変化の記述

$$(w, \gamma_t, G_s) \rightarrow (\gamma_d, e, S_r)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{間隙比 } e = \frac{V_v}{V_s} \\ \text{間隙率 } n = \frac{V_v}{V} \end{array} \right\} n = \frac{e}{1 + e}$$

$$\begin{aligned} \Delta v &= v - V \\ &= (v_v + v_s) - (V_v + V_s) \\ &= v_v - V_v \quad (\because v_s = V_s) \end{aligned}$$

体積変化率 = 体積ひずみ

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{e - e_0}{1 + e} \rightarrow d\left(\frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{1 + e_0}{(1 + e)^2} de ?$$

$$\frac{\Delta v}{V} = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \rightarrow d\left(\frac{\Delta v}{V}\right) = \frac{de}{1 + e_0} ?$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad \dot{J} = \det \mathbf{F} \cdot \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = J \text{tr} \mathbf{l}_v = J \text{div} \mathbf{v}$$

$$\det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} = J = \frac{1+e}{1+e_0} \quad \therefore \dot{J} = \frac{\dot{e}}{1+e_0}, \quad \frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{e}}{1+e}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{e - e_0}{1+e} \rightarrow \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^{\cdot} = \frac{1+e_0}{(1+e)^2} \dot{e} = \frac{\dot{J}}{J^2}$$

$$\frac{\Delta v}{V} = \frac{e - e_0}{1+e_0} \rightarrow \left(\frac{\Delta v}{V} \right)^{\cdot} = \frac{\dot{e}}{1+e_0} = \dot{J}$$

微小変形では $\rightarrow \mathbf{F}(\Delta t) \simeq \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{l}_v(0)$

$$\therefore \det(\mathbf{F}(\Delta t)) = J \simeq \det \mathbf{I} + \text{tr}(\Delta t \mathbf{l}_v(0)) = 1 - \varepsilon_v \quad (|\varepsilon_v| \ll 1)$$

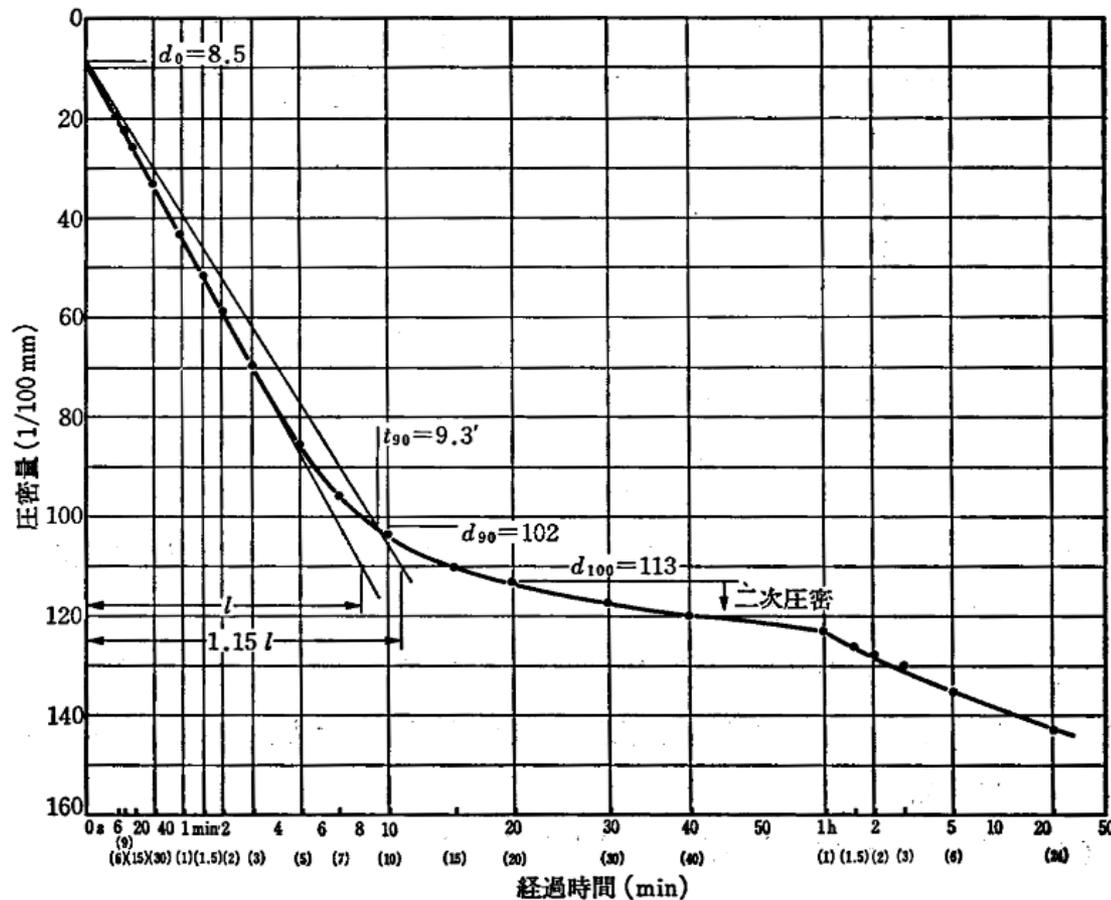
$$\therefore \text{tr}(\Delta t \mathbf{l}_v(0)) = \Delta t \left(\frac{\partial v_1(0)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(0)}{\partial x_3} \right) \equiv -\varepsilon_v$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{e - e_0}{1+e} = 1 - J^{-1} \simeq 1 - (1 - \varepsilon_v)^{-1} \simeq 1 - (1 + \varepsilon_v) = -\varepsilon_v, \quad \therefore \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^{\cdot} = -\dot{\varepsilon}_v$$

$$\frac{\Delta v}{V} = \frac{e - e_0}{1+e_0} = J - 1 \simeq (1 - \varepsilon_v) - 1 = -\varepsilon_v, \quad \therefore \left(\frac{\Delta v}{V} \right)^{\cdot} = -\dot{\varepsilon}_v$$

微小変形が成り立つなら
同じになるはず

ある粘土の一次元圧密試験（標準圧密試験）結果1

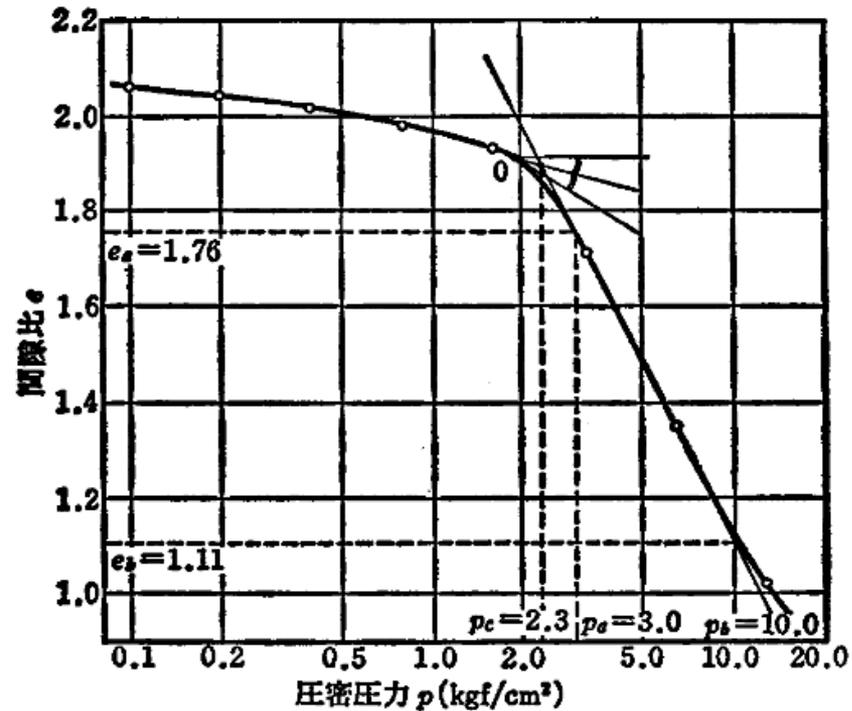


供試体初期高さ2cm, 圧縮量約1.4mm →

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{-1.4}{20} = -0.07, \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{-1.4}{18.6} = -0.08 \rightarrow 7 \sim 8\%$$

ある粘土の一次元圧密試験（標準圧密試験）結果2

圧密圧力(kgf/cm ²)	間 隙 比
0	2.073
0.1	2.057
0.2	2.042
0.4	2.015
0.8	1.976
1.6	1.927
3.2	1.713
6.4	1.349
12.8	1.020



$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{e - e_0}{1 + e} = 1 - J^{-1} \approx -\varepsilon_v$$

を調べてみよう

$$\frac{\Delta v}{V} = \frac{e - e_0}{1 + e_0} = J - 1 \approx -\varepsilon_v$$

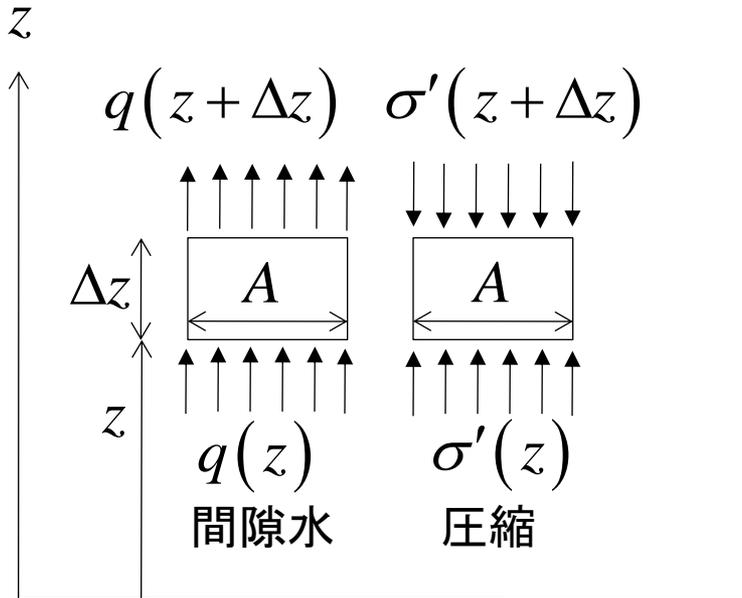
ある粘土の一次元圧密試験（標準圧密試験）結果3

	間隙比	圧密圧力 (kgf/cm ²)	$e-e_0$	$\frac{\Delta v}{v}$ $(e-e_0)/(1+e)$ (%)	$\frac{\Delta v}{V}$ $(e-e_0)/(1+e_0)$ (%)	J
初期・基準	$e_0=2.073$	0	0	0	0	1
第1段載荷	2.057	0.1	-0.016	-0.523	-0.521	0.995
第2段載荷	2.042	0.2	-0.031	-1.019	-1.009	0.990
第3段載荷	2.015	0.4	-0.058	-1.924	-1.887	0.981
第4段載荷	1.976	0.8	-0.097	-3.259	-3.157	0.968
第5段載荷	1.927	1.6	-0.146	-4.988	-4.751	0.952
第6段載荷	1.713	3.2	-0.360	-13.269	-11.715	0.883
第7段載荷	1.349	6.4	-0.724	-30.822	-23.560	0.764
第8段載荷	1.020	12.8	-1.053	-52.129	-34.266	0.657

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{e - e_0}{1 + e} = 1 - J^{-1} \qquad \frac{\Delta v}{V} = \frac{e - e_0}{1 + e_0} = J - 1$$

微小変形が成り立つ→同じになるはずだが？

一次元圧密理論(ある教科書による誘導) 1



1. Δt 間に排水される間隙水の量: ΔQ

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= q(z + \Delta z) A \Delta t - q(z) A \Delta t \\
 &= q(z) A \Delta t + \frac{\partial q}{\partial z} \Delta z A \Delta t - q(z) A \Delta t \\
 &= \frac{\partial q}{\partial z} \Delta z A \Delta t
 \end{aligned}$$

ダルシー則

$$q = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial z}$$

$$\Delta Q = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial p_w}{\partial z} \right) \Delta z A \Delta t$$

一次元圧密理論(ある教科書による誘導)2

2. 土骨格の圧縮量

$$\Delta\varepsilon = m_v \Delta\sigma' \quad : \text{土骨格の圧縮特性}$$

微小要素の圧縮量は, $\Delta V = \Delta\varepsilon \Delta z A = m_v \Delta\sigma' \Delta z A$

3. 間隙水の排水量 = 土骨格の圧縮量 $\Delta V = \Delta Q$

$$\therefore \Delta V = m_v \Delta\sigma' \Delta z A = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial p_w}{\partial z} \right) \Delta z A \Delta t = \Delta Q$$

全応力一定の仮定: $\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta p_w = 0 \rightarrow \Delta\sigma' = -\Delta p_w$

$$-\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial p_w}{\partial z} \right) = m_v \frac{\Delta\sigma'}{\Delta t} = -m_v \frac{\Delta p_w}{\Delta t} = -m_v \frac{\partial p_w}{\partial t}$$

仮定 k :一定, $c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v}$

$$\therefore \frac{\partial p_w}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}$$

疑問 一次元圧密理論(ある教科書による誘導) 3

どこがおかしくないか？

$$\frac{\Delta p_w}{\Delta t} = \frac{\partial p_w}{\partial t} ?$$

p_w は, ある物質点での(過剰)間隙水圧 $\rightarrow p_w = p_w(z(Z, t), t)$

$\Delta \rightarrow 0$ の極限操作を行えば,

$$\frac{\Delta p_w}{\Delta t} \rightarrow \dot{p}_w = \frac{\partial p_w}{\partial t} + \dot{z} \frac{\partial p_w}{\partial z}$$

ならば, 一次元圧密方程式(Terzaghiの式)は,

$$\dot{p}_w = c_v \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}$$

では？

1次元 土と水の連成場(飽和土)1

つりあい式: $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \rightarrow ?$

有効応力式: $\sigma = \sigma' + p_w$ ——— **全応力一定** ——— $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}' + \dot{p}_w = 0$

連続式: $\dot{\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right)$ ——— **水頭の基準原点を
静水圧高さにとる
 p_w は過剰間隙水圧** ——— $\dot{\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial z} \right)$

ひずみ-変位:
(微小変形) $\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow ?$

$h = \frac{p_w}{\gamma_w} + \Omega \rightarrow h = \frac{p_w}{\gamma_w}$

構成式: $\dot{\varepsilon} = m_v \dot{\sigma}'$

$\dot{\varepsilon} = -m_v \dot{p}_w$

$m_v \dot{p}_w = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}, \quad \therefore \dot{p}_w = c_v \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}, \quad c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$

1次元 土と水の連成場(飽和土)2

$$m_v \dot{p}_w = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}, \quad \therefore \dot{p}_w = c_v \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}, \quad c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$$

$$\dot{p}_w = \frac{\partial p_w}{\partial t} + \dot{z} \cdot \frac{\partial p_w}{\partial z}$$

1. 誘導に微小ひずみは含まれていない
→しかし、微小変形を仮定すると、 z と Z の区別はなくなる。
よって、

$$\dot{p}_w = \frac{\partial p_w}{\partial t} + \dot{z} \cdot \frac{\partial p_w}{\partial z} = \frac{\partial p_w}{\partial t} + \dot{Z} \frac{\partial p_w}{\partial Z} = \frac{\partial p_w}{\partial t} \quad (\because \dot{Z} = 0)$$

2. Terzaghiの式からは変位は求まらない。
3. つりあいが保証されない→つりあいを満足するように境界条件を設定しなければならない。
4. はたして、土の圧縮特性: $\dot{\varepsilon} = m_v \dot{\sigma}'$ で、微小変形と仮定しうるか？

付録 数学の公式など

ベクトル: $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3$
 $= \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{i}_i \rightarrow \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases} : \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ を基底単位ベクトルとする直交座標系での成分表示

総和規約:
 自由指標: $a_i + b_i = c_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 \\ a_2 + b_2 = c_2 \\ a_3 + b_3 = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$

ダミー指標: $u_i v_i = w_j z_j \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3$
 $\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$ 内積

内積: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{i}_i) \cdot (b_j \mathbf{i}_j) = a_i b_j (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i$
 $= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$

$$\because \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_i a_i = |\mathbf{a}|^2 \quad : \text{大きさ}$$

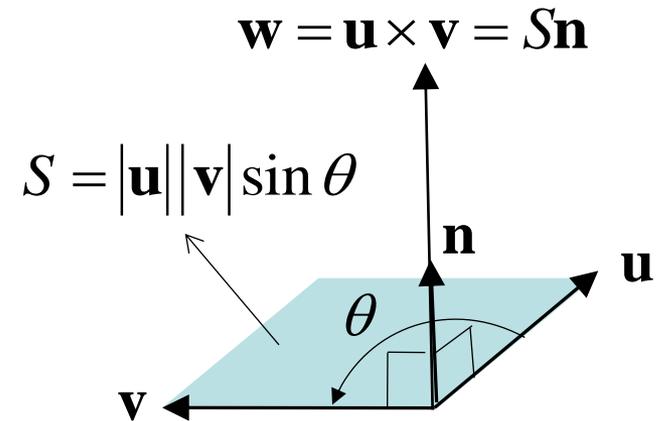
$$\mathbf{A} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

外積: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta \mathbf{n}$

$$S = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = S \mathbf{n}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$



基底単位ベクトルに対して:

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2 \quad \rightarrow \mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = e_{ijk} \mathbf{i}_k$$

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$$

$$\text{交代記号 } e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ベクトルのテンソル積: $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \otimes \mathbf{z})$$

基底単位ベクトルに対して:

$$(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j)\mathbf{i}_k = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k)\mathbf{i}_i = \delta_{jk}\mathbf{i}_i$$

$$(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j)(\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l) = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_l) = \delta_{jk}(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_l)$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) \Rightarrow u_i v_j \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \{v_1 \quad v_2 \quad v_3\} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

2階のテンソル : \mathbf{A}

線形変換 $\mathbf{u} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$

$$\mathbf{A} = A_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j)$$

成分 $A_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{i}_j$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

直交基底での成分表示 → 行列

$$v_i \mathbf{i}_i = A_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) (u_k \mathbf{i}_k) = A_{ij} u_k (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_i = A_{ij} u_k \delta_{jk} \mathbf{i}_i = A_{ij} u_j \mathbf{i}_i$$

テンソルの積 $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u} \rightarrow C_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) = (A_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j)) (B_{kl} (\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l)) \\ &= A_{ij} B_{kl} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) (\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_l) = A_{ij} B_{jl} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_l) \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \leftrightarrow C_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) = A_{ik} B_{kj} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) \leftrightarrow \therefore C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}$$

2階のテンソルの転置： \mathbf{A}^T

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad A_{ij}^T = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{i}_j = \mathbf{A} \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{A} \mathbf{i}_i = A_{ji}$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad : \text{対称テンソル}$$

2階のテンソルとテンソル積

$$\mathbf{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{b})$$

2階のテンソルの内積

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= (A_{ij} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j)) : (B_{kl} (\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l)) = A_{ij} B_{kl} (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) : (\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij} B_{ij} \\ &\quad \because (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) : (\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l) = (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k) (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{I} : \mathbf{A}^T \mathbf{B} \rightarrow \therefore A_{ij} B_{ij} \leftrightarrow \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T)$$

その他

- $\mathbf{A}\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{w} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$

$$\because \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{w}) = (\det \mathbf{A}) \{ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \} = \mathbf{u} \cdot \{ (\det \mathbf{A}) (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \}$$

$$\rightarrow \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{w}) = (\det \mathbf{A}) (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad \because \mathbf{u} \text{ は任意のベクトル}$$

- $\det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon A_{11} & \cdots & \varepsilon A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon A_{n1} & \cdots & 1 + \varepsilon A_{nn} \end{vmatrix} \quad \varepsilon \text{ は微小}$
$$= (1 + \varepsilon A_{11}) \times \cdots \times (1 + \varepsilon A_{nn}) + \cdots$$
$$= 1 + \varepsilon (A_{11} + \cdots + A_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$
$$\simeq 1 + \varepsilon \text{tr} \mathbf{A}$$

Thank you
for your attention