テンソル・弾性論・有限要素法*

陰山 聡

2012.05.11

1 テンソル

1.1 ベクトルの復習

A がベクトル → 座標系 K を決めれば 3 つの実数（成分）が決まる。逆に 3 つの実数の組があればそれが必ずベクトル（の成分）とは限らない。ベクトルの成分であれば座標の変換 $K \to K'$（回転 R）で

$$a'_i = R_{ij} a_j$$

と変換される。座標変換によってこのように成分が変換される量がベクトル。

ベクトルのイメージ：矢印。

1.2 ベクトルの一般化

座標変換によって成分が

$$a'_{ij} = R_{i\ell} R_{jm} a_{\ell m}$$

という変換をうける量が 2 階のテンソル。

2 階テンソルのイメージ：2 本の矢印を入力とし、一つの実数を出力する関数。

2 弾性論

2.1 変位と歪み

弾性体の中に埋め込まれた短い棒 $\mathbf{a}$ を考える。（棒の始点を $\mathbf{x}$、終点を $\tilde{\mathbf{x}}$ とする。）

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

*守本君のために行ったミニレクチャー

変位の場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を考える。変位により $\mathbf{x}$ と $\tilde{\mathbf{x}}$ が次の点に動く：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

この変位によって棒 $\mathbf{a}$ はどう移動するか？応力のことを考えると、平行移動や回転の成分には興味がないが、とりあえず $\mathbf{a}$ の変化を計算してみる。

$$\begin{aligned}
a_i' &= \tilde{x}_i' - x_i' \\
&= (\tilde{x}_i + u_i(\mathbf{x}+\mathbf{a})) - (x_i + u_i(\mathbf{x})) \\
&= x_i + a_i + u_i(\mathbf{x}+\mathbf{a}) - (x_i - u_i(\mathbf{x}) \\
&= a_i + u_i(\mathbf{x}+\mathbf{a}) - u_i(\mathbf{x}) \\
&= a_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_j
\end{aligned}$$

従って棒の変化は

$$\Delta a_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_j$$

これを変形して

$$\Delta a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) a_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) a_j$$

これは歪み成分と回転成分。興味のない回転成分を除いた部分：

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

を歪みテンソルという。E_{ij} は対称である。$E_{ij} = E_{ji}$.

2.2 応力テンソル

弾性体内部に働く力（応力）を考える。

イメージ：両手の手のひらを押し当てる力（垂直成分）。こするように互いにずらす力（水平成分）。合わせて力のベクトル。

別のイメージ：小さなボール（互いにバネで連結されている）がぎっしり詰まった空間。歪みが応力を生む。ある小さな平面上にたまたまたくさんのボールが乗っていたとする。その面を具体化して、面の両側にたくさんあるボールから面にバネがたくさんつながっている。その面にかかる正味の力は、その面につながっている沢山の小さなバネの合力。その面を両側から押す力と、その面を横方向にずらそうとする力の合力。

面を決めて初めて面積あたりの力が決まる。→ 法線ベクトルを決めれば面積あたりの力ベクトルが決まる。→ 二つのベクトルで決まる量。→ 2 階テンソル。これを応力テンソル T_{ij} という。T_{12} は x_2 軸に垂直な単位面にかかる x_1 方向の力。

応力テンソルは対称である。イメージ：弾性体内部の四角い正方形の木枠。その木枠がひずんで平行四辺形になる。平行四辺形が正方形に戻ろうとする力が応力：４つの角についているバネのようなもの。90 度に戻そうとするバネ。正方形にする力=上下方向の辺を上下に動かす力 (T_{21})=水平方向の辺を水平方向に動かす力 (T_{12})。

単位体積あたりに働く力 $\mathbf{F}$ は

$$F_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

と書ける。これは微少な立方体をとり、6 面にかかる力をたせば求まる。

2.3 一般化されたフックの法則と運動方程式

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu E_{ij},$$

ここで

$$\theta = E_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

λ はラメの定数、μ は剛性率という。

質量密度を ρ、単位質量あたりの体積力を $\mathbf{f}$ とすると、弾性体の運動方程式は

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

と書ける。あるいは

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i$$

3 有限要素法

上の運動方程式は、基本的には

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{1}$$

という形をしている。これを有限要素法で解く方法を説明する。

基底関数 $w_i(x)$ で関数を展開する。

$$f(x,t) = \tilde{f}_i(t) w_i(x), \tag{2}$$

$$g(x,t) = \tilde{g}_i(t) w_i(x), \tag{3}$$

基底関数 $w_i(x)$ として（たとえば）格子点 x_i 上で 1 となり、それ以外の格子点ではゼロを通る関数をとる。

$$w_i(x_j) = \delta_{ij}$$

一番簡単なのは三角形型の関数。そうなると $w_i(x)$ は C^0 級（微分が不連続）であることに注意。

微分方程式 (1) を解くのに、微分が不連続な基底関数を使うのは不便ではないか？→ 弱形式化。

式 (1) は任意の関数 $a(x)$ に対して

$$\int_0^L a(x) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx = 0$$

と同値。これを離散化するには有限個の関数 $a(x)$ に適用すればよい。何でもいいが、$a(x)$ として基底関数 $w_i(x)$ にとる。（ガラーキン法）。

$$\int_0^L w_i(x) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx = 0, \quad (i = 1, \ldots N)$$

式 (2) と (3) を代入し、部分積分をする。（簡単のため $w_i(x)$ は境界での寄与はゼロとする。）するとこの式は、

$$P_{ij} \frac{d\tilde{f}_j}{dt} = Q_{ij}\, \tilde{g}_j, \tag{4}$$

ここで

$$P_{ij} = \int_0^L w_i(x) w_j(x)\, dx \tag{5}$$

$$Q_{ij} = \int_0^L w_i'(x) w_j(x)\, dx \tag{6}$$

は既知。あとは連立一次（微分）方程式系 (4) を数値的に解けばいい。たとえば行列 P_{ij} の逆行列が求まれば話は簡単。

行列 P や Q が粗行列になるためには基底関数 $w_i(x)$ が local であることが必要。global な場合、正規直交系であればこれも簡単になる。→ スペクトル法。