理想気体のプラントル数の定義

陰山 聡

神戸大学システム情報学研究科

ver.01: 2013.05.07
ver.02: 2013.06.29
ver.03: 2013.07.01

1 目的

この文書の目的は、理想気体のプラントル数の定義

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\kappa}$$

の根拠を確認することである[1]。

2 プラントル数の定義

運動方程式は

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\text{力の項}) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v} \text{ に依存する粘性項}) \tag{1}$$

である。右辺の最後の項を無視すれば、この式から

$$(\text{速度の拡散係数}) = \frac{\mu}{\rho} \tag{2}$$

である。一方、温度の時間発展の式

$$c_v \, \rho \, \frac{dT}{dt} + p \, \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \kappa \nabla^2 T$$

より、

$$(\text{温度の拡散係数}) = \frac{\kappa}{c_v \rho}$$

である... としてはいけない[2]。なぜなら左辺第二項 $p\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ に間接的に T が入っているからである。非圧縮流体 $(\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0)$ であればこの項を無視することは問題ないが、圧縮性流体の場合には、それは成り立たない。

[1] 研究室の B4 学生を想定している。

[2] 以前ここで勘違いしていた

音速に比べて十分遅い流れ等を考える場合、体積一定ではなくむしろ圧力一定の状況の下での温度の拡散時間を評価すべきである。圧力一定の場合には、温度の時間発展よりもエントロピーの式を使った方が簡単である。理想気体の質量あたりのエントロピーは

$$s = \log\left\{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_a}}\,p^{-\frac{k_B}{m_a}}\right\}$$

だから、時間微分して

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt} - \frac{k_B}{m_a}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$$

ここで、理想気体の質量あたりの定圧比熱

$$c_p = \frac{k_B}{m_a}\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

を使った。定圧変化を考えると、

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_p = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt}$$

$$\therefore \quad c_p\rho\frac{dT}{dt} = \kappa\,\nabla^2 T$$

従って等圧過程では

$$（温度の拡散係数）= \frac{\kappa}{c_p\rho} \tag{3}$$

である。

プラントル数を

$$Pr = \frac{（速度の拡散係数）}{（温度の拡散係数）} \tag{4}$$

と定義すると、式 (2) と式 (3) より、

$$Pr = \frac{c_p\mu}{\kappa}$$

である。