ヤコビ恒等式の証明

陰山 聡
神戸大学システム情報学研究科 計算科学専攻

ver. 131220a

相空間 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, q_2, \ldots, q_N, p_1, p_2, \ldots, p_N)$ 中の関数 f, g, h に対して、ヤコビ恒等式と呼ばれる以下の式が成り立つ。

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{1}$$

ここで

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} \tag{2}$$

はポアッソン括弧である（和をとる添字 j は 1 から N まで)。

証明：行列 $\boldsymbol{J}$ を

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と定義する。ここで $\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$ は N 行 N 列のゼロ行列と単位行列である。$\boldsymbol{J}$ を使うとポアッソン括弧は

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial r_j} \tag{4}$$

と書ける。ここで $r_i := q_i$ （$i \le N$ の場合）または $r_i := p_i$（$i > N$ の場合）と定義した。（式 (4) では和をとる添字 j は 1 から $2N$ まで。）従って

$$\begin{aligned}
\text{式 (1) の左辺} =& \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{\partial g}{\partial r_\ell} J_{\ell m} \frac{\partial h}{\partial r_m}\right) \\
&+ \frac{\partial g}{\partial r_\ell} J_{\ell j} \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{\partial h}{\partial r_m} J_{mi} \frac{\partial f}{\partial r_i}\right) \\
&+ \frac{\partial h}{\partial r_m} J_{mj} \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{\partial f}{\partial r_i} J_{i\ell} \frac{\partial g}{\partial r_\ell}\right) \\
=& \frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{\partial g}{\partial r_\ell} \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m}\left(J_{ij}J_{\ell m} + J_{\ell j}J_{mi}\right)}_{(a)} \\
&+ \frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{\partial h}{\partial r_m}\frac{\partial^2 g}{\partial r_j \partial r_\ell}\left(J_{ij}J_{\ell m} + J_{mj}J_{i\ell}\right) \\
&+ \frac{\partial g}{\partial r_\ell}\frac{\partial h}{\partial r_m}\frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i}\left(J_{\ell j}J_{mi} + J_{mj}J_{i\ell}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで

$$\begin{aligned}
(a) &= \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{ij}J_{\ell m} + \frac{\partial^2 h}{\partial r_m \partial r_j} J_{\ell m}J_{ji} \quad [\text{第 2 項の } j \text{ と } m \text{ を交換}] \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{ij}J_{\ell m} - \frac{\partial^2 h}{\partial r_m \partial r_j} J_{\ell m}J_{ij} \quad [J_{ji} = -J_{ij} \text{ より}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

式 (5) の他の 2 項も同様である。従って (1) が成り立つ。