3次元回転の公式

神戸大学 計算科学専攻 陰山 聡

ver. 160122a

1　ロドリゲスの回転公式

原点 O を通り、単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方向に向かう直線を軸として、角度 θ だけ回転する操作 $R_{\hat{\boldsymbol{e}},\theta}$ を考える。$R_{\hat{\boldsymbol{e}},\theta}$ により 3 次元空間中の点 $\boldsymbol{p}$ が移った先を $\boldsymbol{p}'$ とする。

$\boldsymbol{p}$ と $\hat{\boldsymbol{e}}$ が直交している場合（つまり $\boldsymbol{e}$ 方向を z 軸としたときに点 $\mathbf{p}$ が x-y 平面上に乗っているとき)、

$$\boldsymbol{p}' = \cos\theta\,\boldsymbol{p} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{p} \tag{1}$$

である。

一般の場合には、点 $\boldsymbol{p}$ から回転軸に下ろした垂線の足を点 $\boldsymbol{q}$ とすれば、式 (1) より

$$\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q} = \cos\theta\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{2}$$

である。$\hat{\boldsymbol{e}} \parallel \boldsymbol{q}$ なので、最後の項は $\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{p}$ である。また

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{e}})\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{e}}\times(\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p} \tag{3}$$

を使うと、回転に関するロドリゲスの公式

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{p} + (1-\cos\theta)\hat{\boldsymbol{e}}\times(\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{p}) \tag{4}$$

を得る。

なお、任意のベクトルに作用し、$\hat{\boldsymbol{e}}$ との外積をとる演算子を

$$\boldsymbol{C}_{\hat{e}} := \hat{\boldsymbol{e}}\times \tag{5}$$

と定義すれば

$$R_{\hat{e},\theta} = 1 + \sin\theta\,\boldsymbol{C}_{\hat{e}} + (1-\cos\theta)\,\boldsymbol{C}_{\hat{e}}^2 \tag{6}$$

と書ける。

2　単位球面上の補間・補外

半径1の球 (単位球) の表面上の2点 A, B がある。A と B を結ぶ大円を $t:1-t$ に分ける補間・補外点 P_t を求める。

A、B、P_t それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}(t)$、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を ϕ とする。$\boldsymbol{a}$ を単位ベクトル $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/\sin\phi$ のまわりに $t\phi$ だけ回転したものが $\boldsymbol{p}(t)$ である。従って式 (1) より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(t) &= \cos(t\phi)\,\boldsymbol{a} + \sin(t\phi)\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}\\ &= \cos(t\phi)\,\boldsymbol{a} + \sin(t\phi)\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cos\phi)\,/\sin\phi\\ &= \frac{1}{\sin\phi}\left\{\sin(\phi - t\phi)\,\boldsymbol{a} + \sin(t\phi)\,\boldsymbol{b}\right\}\end{aligned}$$

結局

$$\boldsymbol{p}(t) = \frac{\sin\left((1-t)\phi\right)}{\sin\phi}\boldsymbol{a} + \frac{\sin(t\phi)}{\sin\phi}\boldsymbol{b} \tag{7}$$

である。