ホップ絡み目の磁気ヘリシティ

神戸大学 システム情報学研究科 計算科学専攻

陰山 聡

2016 年 02 月 10 日

Abstract

ねじれのない二つの磁束が単純な絡み目（ホップ絡み目）を作っているときの全磁気ヘリシティは二つの磁束の積を 2 倍したものであることはよく知られている。その公式の少し丁寧な導出を学生への説明のためにまとめた。

1 前提と定義

磁場の束（磁束）$\Phi^{(1)}$ と $\Phi^{(2)}$ が図に示す向きでホップ絡み目を作っている（図 1 参照）。それぞれの磁気フラックスの値を Φ_1 と Φ_2 とする。二つの磁束はどちらもねじれをもたない、つまり、それぞれの磁束の中で、磁力線はトポロジカルには円で、互いに巻き付いていないとする。

2 導出

磁束 $\Phi^{(1)}$ を磁場 $\boldsymbol{b}$ に垂直な J 個の面で切断する。磁束の保存則（$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0$）から、貫く磁気フラックスの値はどの断面も Φ_1 である。

J 番目の断面を I 個の微小な面に分割する。そのうち i 番目を $\Delta S(i,j)$ と呼び、その面積を同じ表記 $\Delta S(i,j)$ でかく。

$\Delta S(i,j)$ に垂直な方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{n}}(i,j)$ とする。$\Delta S(i,j)$ の中心点での磁場を $\boldsymbol{b}(i,j)$ とする。$\Delta S(i,j)$ は磁場に垂直に切ったので、$\boldsymbol{b}(i,j)$ と $\hat{\boldsymbol{n}}(i,j)$ は平行である。

$\Delta S(i,j)$ の中心点を始点とし、そこと磁力線で結ばれた隣の微小面 $\Delta S(i,j+1)$ の中心点を終点とするベクトルを $\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j)$ とする。$\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j)$ もまた $\hat{\boldsymbol{n}}(i,j)$ と平行である。つまり

$$b(i,j)\,\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j) = \boldsymbol{b}(i,j)\,\Delta\ell(i,j). \tag{1}$$

ここで

$$b(i,j) = |\boldsymbol{b}(i,j)|\,, \tag{2}$$

と

$$\Delta\ell(i,j) = |\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j)|\,, \tag{3}$$

を定義した。

磁束 $\Phi^{(1)}$ の磁気ヘリシティ

$$K^{(1)} := \int_{V_1} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\, dV_1, \tag{4}$$

を以下のように離散近似する。ここで V_1 は磁束 $\Phi^{(1)}$ の体積である。

$$K^{(1)} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \left\{\boldsymbol{a}(i,j)\cdot\boldsymbol{b}(i,j)\right\}\, \Delta S(i,j)\Delta\ell(i,j). \tag{5}$$

式 (1) より

$$K^{(1)} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \boldsymbol{a}(i,j)\cdot\left\{b(i,j)\Delta S(i,j)\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j)\right\} \tag{6}$$

ここで $b(i,j)\Delta S(i,j)$ は微小面 $\Delta S(i,j)$ を貫く磁気フラックスに等しく、それは磁束の保存から j に依存しない。そこでその磁気フラックスを

$$\Delta\Phi(i) := b(i,j)\Delta S(i,j), \tag{7}$$

とし、一部だけ積分表示に戻すと、

$$\begin{aligned} K^{(1)} &= \sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{a}(i,j)\cdot\Delta\boldsymbol{\ell}(i,j)\right)\Delta\Phi(i) && (8)\\ &= \sum_{i=1}^{I}\left(\oint_{C_i^{(1)}}\boldsymbol{a}_i\cdot\, d\boldsymbol{\ell}_i\right)\Delta\Phi(i), && (9)\end{aligned}$$

となる。ここで $C_i^{(1)}$ は $\Delta S(i,j)$ を通る（閉じた）磁力線の描く曲線である。ストークスの定理より

$$\oint_{C_i^{(1)}} \boldsymbol{a}_i\cdot d\boldsymbol{\ell}_i = \int_{S_i^{(1)}} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\, dS_i^{(1)}, \tag{10}$$

であることに注意する。ここで $S_i^{(1)}$ は $C_i^{(1)}$ を境界とする任意の曲面、$dS_i^{(1)}$ はその面要素、$\boldsymbol{n}$ はその面要素に垂直な単位法線ベクトルである。磁束 $\Phi^{(1)}$

内の磁場は捻れを持たないため、$C_i^{(1)}$ よりも内側にある磁束 $\Phi^{(1)}$ 内の磁場は右辺の積分には寄与せず、寄与するのは磁束 $\Phi^{(2)}$ 内の磁場だけである。従って式 (10) の右辺の積分は i によらず一定であり、その値は磁気フラックス Φ_2 に等しい：

$$\oint_{C_i^{(1)}} \boldsymbol{a}_i \cdot d\boldsymbol{\ell}_i = \Phi_2. \tag{11}$$

これを代入すると、式 (9) は

$$K^{(1)} = \left(\sum_{i=1}^{I} \Delta\Phi_i \right) \Phi_2 = \Phi_1 \Phi_2. \tag{12}$$

　同様に

$$K^{(2)} = \Phi_1 \Phi_2, \tag{13}$$

だから、系全体の磁気ヘリシティ K は

$$K := \int_V \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \, dV = K^{(1)} + K^{(2)} = 2\Phi_1 \Phi_2, \tag{14}$$

である。

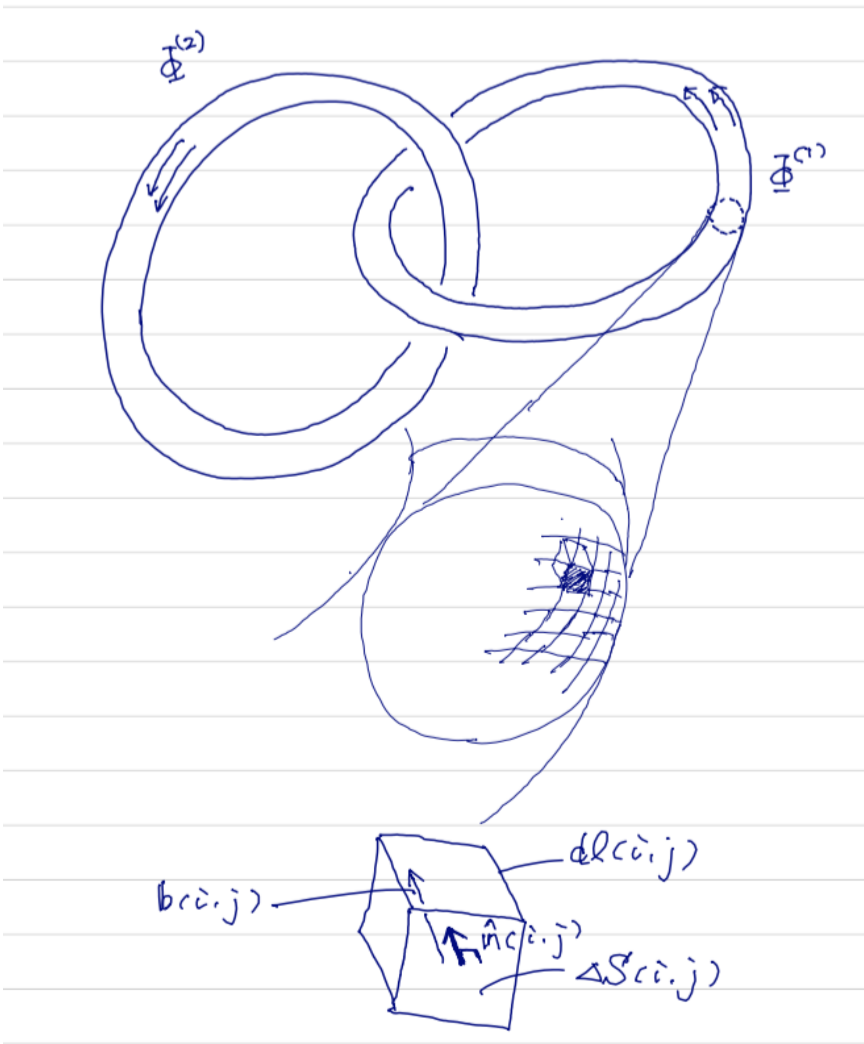

Figure 1: Two magnetic fluxes in the Hopf link.