剛体のオイラー方程式の愚直な導出*

陰山 聡

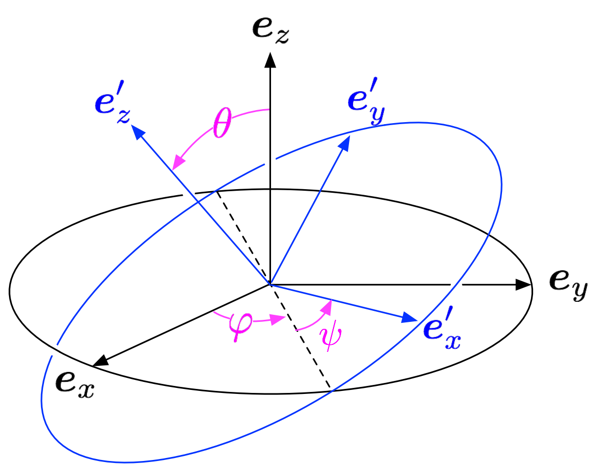
神戸大学 システム情報学研究科 計算科学専攻

2017.01.12

Abstract

剛体の運動を記述するオイラー方程式は角運動量の保存則を使うなどして「賢く」導出することができるが、ここではオイラー角を一般化座標としたラグランジアンから愚直にオイラー方程式を導出する。一般化座標を決めラグランジアンを求めれば、あとは機械的な計算で運動方程式を得ることができるというのが解析力学のありがたさである。この剛体運動の場合も（途中の計算がかなり煩雑になるが）角速度の存在や、オイラー角と角速度の関係、トルクなどが自動的に導かれる。最後に剛体の運動の正準方程式も導出する。

1　オイラー角



剛体の自由度は 6 である。そのうち 3 は剛体の一点（たとえば重心）の位置を指定する自由度、あとの 3 が剛体の向きを指定する自由度である。いま剛体の重心は動かないとする。剛体の向きを指定するのに次に述べる（zxz 型と呼ばれる）オイラー角をとる。

まず、z 軸の周りに φ 回転する。次に新しい x 軸の周りに θ 回転する。その回転で移動した z 軸の周りに ψ 回転する。

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

*情報知能工学科 2 年生向けの講義（解析力学 [H28 年度]）用資料からの抜粋。

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

として、

$$\begin{aligned} R(\varphi,\theta,\psi) &= R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\varphi) \qquad (4) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (5) \end{aligned}$$

という行列を定義すると、座標系の基底ベクトルはこの回転で

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

と変換される。なお、R は直交行列で、

$$R^t R = R R^t = I \tag{7}$$

である。

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ をとる。回転後の基底系で $\boldsymbol{a}$ を測ると、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{pmatrix} \tag{8}$$

式 (6) より

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{9}$$

元の座標系で $\boldsymbol{a}$ を測ると、

$$\boldsymbol{a} = (a_x \ a_y \ a_z) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{10}$$

なので、ベクトルの成分の変換則は

$$(a_x \ a_y \ a_z) = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} R \tag{11}$$

である。これは

$$\begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} = (a_x \ a_y \ a_z)\, R^t \tag{12}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{13}$$

とも書ける。

2 静止系での角速度

二つの座標系 G と G' を考える。G は静止系である。その原点を剛体の重心にとる。G' は剛体に固定された座標系とする。G' 系の基底ベクトルは、時間に依存する回転 $R(\varphi(t),\theta(t),\psi(t))$ で回転変換される。剛体に固定された点 $\boldsymbol{x}$ は G 系で見れば動いているが、回転座標系 G' からみれば止まっている。つまり、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= (x(t) \ y(t) \ z(t)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \qquad (14) \\ &= (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x(t) \\ \boldsymbol{e}'_y(t) \\ \boldsymbol{e}'_z(t) \end{pmatrix} \qquad (15) \end{aligned}$$

この点の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると、式 (15) を時間微分して、

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{16}$$
$$= (x' \; y' \; z') \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}'_x(t) \\ \dot{\boldsymbol{e}}'_y(t) \\ \dot{\boldsymbol{e}}'_z(t) \end{pmatrix} \tag{17}$$
$$= (x' \; y' \; z')\, \dot{R}(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{18}$$
$$= (x \; y \; z)\, R^t(t)\dot{R}(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{19}$$

速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を静止系 G で測れば、

$$\boldsymbol{v} = (v_x \; v_y \; v_z) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{20}$$

なので、式 (19) と (20) より

$$(v_x \; v_y \; v_z) = (x \; y \; z)\, \Omega \tag{21}$$

である。ここで、

$$\Omega = R^t \dot{R} \tag{22}$$

は反対称行列（従って対角項がゼロ）である。なぜなら、

$$\Omega = R^t\dot{R} = R^t \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial R}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial R}{\partial \psi}\dot{\psi} \right) = R^t\frac{\partial R}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + R^t\frac{\partial R}{\partial \theta}\dot{\theta} + R^t\frac{\partial R}{\partial \psi}\dot{\psi} \tag{23}$$

に注意し、

$$R^t R = I \tag{24}$$

を φ で微分して

$$R^t\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\partial R^t}{\partial \varphi}R = 0 \tag{25}$$

つまり

$$R^t\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \left(R^t\frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^t = 0 \tag{26}$$

これは $R^t(\partial R/\partial\varphi)$ が反対称行列であることを意味する。同様に $R^t(\partial R/\partial\theta)$ と $R^t(\partial R/\partial\psi)$ も反対称行列なので、式 (23) から Ω は反対称行列である。

Ω を具体的に求めよう。まず、

$$\dot{R} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{11} & \dot{R}_{12} & \dot{R}_{13} \\ \dot{R}_{21} & \dot{R}_{22} & \dot{R}_{23} \\ \dot{R}_{31} & \dot{R}_{32} & \dot{R}_{33} \end{pmatrix} = \frac{\partial R}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial R}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial R}{\partial \psi}\dot{\psi} \tag{27}$$

を計算すると、

$$\dot{R}_{11} = \dot{\theta}\sin\theta\sin\psi\sin\varphi - \dot{\varphi}(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi) - \dot{\psi}(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) \tag{28}$$
$$\dot{R}_{12} = -\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi\cos\varphi + \dot{\varphi}(\cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi) + \dot{\psi}(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) \tag{29}$$
$$\dot{R}_{13} = \dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi \tag{30}$$
$$\dot{R}_{21} = \dot{\theta}\sin\theta\cos\psi\sin\varphi + \dot{\varphi}(\sin\psi\sin\varphi - \cos\theta\cos\psi\cos\varphi) + \dot{\psi}(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi) \tag{31}$$
$$\dot{R}_{22} = -\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi\cos\varphi - \dot{\varphi}(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) - \dot{\psi}(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi) \tag{32}$$
$$\dot{R}_{23} = \dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi \tag{33}$$
$$\dot{R}_{31} = \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \tag{34}$$
$$\dot{R}_{32} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi \tag{35}$$
$$\dot{R}_{33} = -\dot{\theta}\sin\theta \tag{36}$$

である。これに R^t を左からかけて、

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi & -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi \\ -\dot\psi\cos\theta - \dot\varphi & 0 & \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi \\ \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi & -\dot\theta\cos\varphi - \dot\psi\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

を得る。予想通り反対称行列になった。ここで

$$\omega_x = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi \tag{38}$$
$$\omega_y = \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi \tag{39}$$
$$\omega_z = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \tag{40}$$

を定義する。この成分は静止系 G で測ったものであることに注意。

$$\Omega = \dot R R^t = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

と書ける。式 (21) に代入すると、

$$v_x = \omega_y z - \omega_z x \tag{42}$$
$$v_y = \omega_z x - \omega_x y \tag{43}$$
$$v_z = \omega_x y - \omega_y z \tag{44}$$

この三つの式を外積記号を使ってまとめて書けば、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} \tag{45}$$

とも書ける。この $\boldsymbol{\omega}$ は角速度と呼ばれる。

ある剛体が N 個の質点で構成されているとする。i 番目の質点の位置と速度を $\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{v}_i$ とすると、式 (42)–(44) より、

$$v_{ix}(t) = \omega_y(t) z_i(t) - \omega_z(t) x_i(t) \tag{46}$$
$$v_{iy}(t) = \omega_z(t) x_i(t) - \omega_x(t) y_i(t) \tag{47}$$
$$v_{iz}(t) = \omega_x(t) y_i(t) - \omega_y(t) z_i(t) \tag{48}$$

これからラグランジアンを作ってもよいが、そうするとラグランジュの運動方程式で時間微分をとるときに、$\boldsymbol{x}_i(t)$ の時間依存性が出てきて計算が面倒になるので、剛体と共に回転する系 G' で質点の位置を測ることにする。そうすると $\boldsymbol{x}$ の成分は時間に依存しない。

3 回転系での角速度

式 (7) と式 (18) より、

$$\boldsymbol{v} = (x' \ y' \ z')\, \dot R R^t R \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{49}$$
$$= (x' \ y' \ z')\, \dot R R^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{pmatrix} \tag{50}$$

速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を G' 系で測れば、

$$\boldsymbol{v} = \left(v'_x \ v'_y \ v'_z\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{pmatrix} \tag{51}$$

なので、式 (50) と (51) より

$$\left(v'_x\ v'_y\ v'_z\right) = (x'\ y'\ z')\,\Lambda \tag{52}$$

ここで

$$\Lambda = \dot{R}R^t \tag{53}$$

である。具体的に計算すると、

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} & \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\cos\theta - \dot{\psi} & 0 & \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi & -\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi & 0 \end{array}\right) \tag{54}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 0 & \omega'_z & -\omega'_y \\ -\omega'_z & 0 & \omega'_x \\ \omega'_y & -\omega'_x & 0 \end{array}\right) \tag{55}$$

ここで、

$$\omega'_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \tag{56}$$

$$\omega'_y = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \tag{57}$$

$$\omega'_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{58}$$

ちなみにこれを (φ, θ, ψ) について解くと、

$$\dot{\varphi} = \csc\theta(\omega'_x\sin\psi + \omega'_y\cos\psi) \tag{59}$$

$$\dot{\theta} = \omega'_x\cos\psi - \omega'_y\sin\psi \tag{60}$$

$$\dot{\psi} = \omega'_z - \cot\theta(\omega'_x\sin\psi + \omega'_y\cos\psi) \tag{61}$$

この関係は後で使う。式 (56)–(58) を式 (52) に代入すると、

$$v'_x = \omega'_y z' - \omega'_z x' \tag{62}$$

$$v'_y = \omega'_z x' - \omega'_x y' \tag{63}$$

$$v'_z = \omega'_x y' - \omega'_y z' \tag{64}$$

なお、角速度の G 系での成分 (38)–(40) と、G' 系での成分 (62)–(64) を比較すると、

$$\left(\begin{array}{c} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array}\right) \tag{65}$$

が成り立っていることが確認できる。つまり $\boldsymbol{\omega}$ の成分はベクトルの成分と同じ変換則 (13) で変換することがわかる。角速度は擬ベクトルである。

式 (62)–式 (64) を書き直すと

$$\left(\begin{array}{c} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)z' - (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})y' \\ (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})x' - (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)z' \\ (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)y' - (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)x' \end{array}\right) = Q\left(\begin{array}{c} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array}\right) \tag{66}$$

ここで

$$Q = \left(\begin{array}{ccc} z'\sin\theta\cos\psi - y'\cos\theta & -z'\sin\psi & -y' \\ x'\cos\theta - z'\sin\theta\sin\psi & -z'\cos\psi & x' \\ y'\sin\theta\sin\psi - x'\sin\theta\cos\psi & x'\sin\psi + y'\cos\psi & 0 \end{array}\right) \tag{67}$$

である。このことは、オイラー角 (φ, θ, ψ) の微小な差 $(\delta\varphi, \delta\theta, \delta\psi)$ と回転系の座標 (x', y', z') の微小な差 $(\delta x', \delta y', \delta z')$ の関係が次であることを意味する。

$$\left(\begin{array}{c} \delta x' \\ \delta y' \\ \delta z' \end{array}\right) = Q\left(\begin{array}{c} \delta\varphi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{array}\right) \tag{68}$$

数字の添え字を使い、(x', y', z') と (φ, θ, ψ) をそれぞれ (x'_1, x'_2, x'_3) と (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) と書くことにすると、式 (68) は、

$$\delta x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} Q_{\alpha\beta}\delta\phi_\beta \tag{69}$$

を意味する。つまり

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial \phi_\beta} = Q_{\alpha\beta} \tag{70}$$

である。

4 簡潔な計算方法

計算が少々ややこしかったので、テンソル記法でここまでの要点をまとめる[1]。オイラー角 (φ, θ, ψ) の回転による任意のベクトル $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i = a'_i\boldsymbol{e}_i$ の成分の変換則は

$$a'_i = R_{ij}a_j \tag{71}$$

$$a_i = R_{ji}a'_j \tag{72}$$

ここで行列 R は式 (5) に示すように複雑な形をしており、その時間微分 $\dot{R}$ はさらに複雑［式 (28)–(36)］であるが、その積は以下のような簡潔な関係がある。

$$R_{ij}R_{kj} = R_{ji}R_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{直交行列条件}) \tag{73}$$

$$a'_k\dot{R}_{kj}R_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega'_j a'_k \quad (\text{式 (53) と (55)}) \tag{74}$$

ここで ω'_j は式 (56)–(58) で定義された角速度である。

　時間依存するベクトル $\boldsymbol{a}(t) = a_i(t)\boldsymbol{e}_i = a'_i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$ の時間微分 $\boldsymbol{b}(t) = \dot{\boldsymbol{a}}(t) = b_i(t)\boldsymbol{e}_i = b'_i(t)\boldsymbol{e}'_i(t)$ も当然ベクトルなので

$$\begin{aligned}
b_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{b} = \dot{\boldsymbol{a}} &= \dot{a}'_i\boldsymbol{e}'_i + a'_i\dot{\boldsymbol{e}}'_i &(75)\\
&= \dot{a}'_i\boldsymbol{e}_i + a'_i\dot{R}_{ij}\boldsymbol{e}_j &(76)\\
&= \left(\dot{a}'_j R_{ji} + a'_j\dot{R}_{ji}\right)\boldsymbol{e}_i &(77)
\end{aligned}$$

両辺を比較して

$$\begin{aligned}
b_i &= \dot{a}'_j R_{ji} + a'_j\dot{R}_{ji} &(78)\\
&= \dot{a}'_j R_{ji} + a'_k\dot{R}_{k\ell}\delta_{\ell i} &(79)\\
&= \dot{a}'_j R_{ji} + a'_k\dot{R}_{k\ell}R_{j\ell}R_{ji} \quad [\text{式 (73) より}] &(80)\\
&= \left(\dot{a}'_j + a'_k\dot{R}_{k\ell}R_{j\ell}\right)R_{ji} &(81)\\
&= \left(\dot{a}'_j + \epsilon_{j\ell}\omega'_\ell a'_m\right)R_{ji} \quad [\text{式 (74) より}] &(82)
\end{aligned}$$

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の変換則 (72) より

$$b'_j = \dot{a}'_j + \epsilon_{j\ell m}\omega'_\ell a'_m \tag{83}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}'_1 \\ \dot{a}'_2 \\ \dot{a}'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \tag{84}$$

この式の $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ という特別な場合が式 (62)–(64) である。

[1] この節だけ繰り返された添え字は和をとる規則を使う。

5　ラグランジュの運動方程式

5.1　運動エネルギー

N 個の質点で構成されている剛体の運動方程式を作るために、オイラー角 (φ, θ, ψ) を一般化座標としてラグランジアンを作る。（重心の運動は無視できる座標系をとっているものとする。）質点 i の速度の G' 系の成分は

$$v'_{ix}(t) = \omega'_y(t) z'_i - \omega'_z(t) x'_i \tag{85}$$
$$v'_{iy}(t) = \omega'_z(t) x'_i - \omega'_x(t) y'_i \tag{86}$$
$$v'_{iz}(t) = \omega'_x(t) y'_i - \omega'_y(t) z'_i \tag{87}$$

である。エディントンのイプシロン記号を使うと、

$$v'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega'_\beta x'_\gamma \tag{88}$$

ここで $(v'_x, v'_y, v'_z) = (v'_1, v'_2, v'_3)$ 等とした。運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_i^2 &(89)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{m_i}{2} v'^2_{i\alpha} &(90)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\sum_{\beta'=1}^{3}\sum_{\gamma'=1}^{3} \frac{m_i}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\omega'_\beta x'_{i\gamma}\omega'_{\beta'}x'_{i\gamma'} &(91)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\sum_{\beta'=1}^{3}\sum_{\gamma'=1}^{3} \frac{m_i}{2}(\delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'}\delta_{\gamma\beta'})\omega'_\beta x'_{i\gamma}\omega'_{\beta'}x'_{i\gamma'} &(92)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} \frac{m_i}{2}(\omega'_\beta x'_{i\gamma}\omega'_\beta x'_{i\gamma} - \omega'_\beta x'_{i\gamma}\omega'_\gamma x'_{i\beta}) &(93)\\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left[\sum_{\mu=1}^{3}(x'_{i\mu})^2\sum_{\beta=1}^{3}(\omega'_\beta)^2 - \sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\omega'_\beta\omega'_\gamma x'_{i\beta}x'_{i\gamma}\right] &(94)\\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left[\sum_{\mu=1}^{3}(x'_{i\mu})^2\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\omega'_\beta\omega'_\gamma\delta_\beta\gamma - \sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\omega'_\beta\omega'_\gamma x'_{i\beta}x'_{i\gamma}\right] &(95)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\omega'_\beta\omega'_\gamma\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\sum_{\mu=1}^{3}(x'_{i\mu})^2\delta_\beta\gamma - x'_{i\beta}x'_{i\gamma}\right] &(96)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\omega'_\beta\omega'_\gamma I_\beta\gamma &(97)
\end{aligned}$$

ここで

$$I_\beta\gamma = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\sum_{\mu=1}^{3}(x'_{i\mu})^2\delta_\beta\gamma - x'_{i\beta}x'_{i\gamma}\right] \tag{98}$$

を定義した。行列で書くと

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y'^2_i + z'^2_i & -x'_i y'_i & -x'_i z'_i \\ -y'_i x'_i & x'^2_i + z'^2_i & -y'_i z'_i \\ -z'_i x'_i & -z'_i y'_i & x'^2_i + y'^2_i \end{pmatrix} \tag{99}$$

この I は慣性テンソルと呼ばれる。この I は対称行列なので、非対角項がゼロになるように G' 系での基底 $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}'_z$ をとることができる。すると、

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad I_{\beta\gamma} = I_\beta \delta_{\beta\gamma} \tag{100}$$

I_1, I_2, I_3 は慣性モーメントと呼ばれる。慣性モーメントは時間に依存しないことに注意。結局、運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3} I_\beta (\omega'_\beta)^2 \tag{101}$$

である。

5.2 ポテンシャル

以下では $(\varphi, \theta, \psi) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ とする。系のポテンシャル U は、剛体を構成する各質点のポテンシャルの和である。U は質点の位置だけの関数とする。i 番目の質点の位置を $(x'_i, y'_i, z'_i) = (x'_{i;1}, x'_{i;2}, x'_{i;3})$ と書く。すると、

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_\beta} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_{i;\gamma}} \frac{\partial x_{i\gamma}}{\partial \phi_\beta} \tag{102}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_{i;\gamma}} Q_{i;\gamma\beta} \tag{103}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} Q^t_{i;\beta\gamma} \frac{\partial U}{\partial x_{i;\gamma}} \tag{104}$$

式 (103) では式 (70) を使った。式 (104) の行列 Q^t_i は Q_i の転置である：

$$Q^t_i = \begin{pmatrix} z'_i \sin\theta\cos\psi - y'_i \cos\theta & x'_i \cos\theta - z' \sin\theta \sin\psi & y'_i \sin\theta\sin\psi - x'_i \sin\theta\cos\psi \\ -z'_i \sin\psi & -z'_i \cos\psi & x'_i \sin\psi + y'_i \cos\psi \\ -y'_i & x'_i 0 & \end{pmatrix} \tag{105}$$

i 番目の質点にかかる力を

$$\begin{pmatrix} f'_{i;x} \\ f'_{i;y} \\ f'_{i;z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial U/\partial x'_i \\ -\partial U/\partial y'_i \\ -\partial U/\partial z'_i \end{pmatrix} \tag{106}$$

定義する。同様に

$$\begin{pmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \\ f_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial U/\partial \varphi \\ -\partial U/\partial \theta \\ -\partial U/\partial \psi \end{pmatrix} \tag{107}$$

を定義すると、式 (103) より

$$f_{\phi_\beta} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} Q^t_{i;\beta\gamma} f'_{i;\gamma} \tag{108}$$

5.3　ラグランジアン

運動エネルギーとポテンシャルからラグランジアンをつくる。

$$
\begin{aligned}
L(\varphi,\theta,\psi,\dot\varphi,\dot\theta,\dot\psi) =& K-U && (109)\\
=& \frac{1}{2}\left\{I_1(\omega_1')^2+L_2(\omega_2')^2+L_3(\omega_3')^2\right\}-U(\varphi,\theta,\psi) && (110)\\
=& \frac{1}{2}\Big\{I_1(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2+I_2(-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)^2\\
& +I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)^2\Big\}-U(\varphi,\theta,\psi) && (111)\\
=& \frac{1}{2}\dot\varphi^2\left(I_1\sin^2\theta\sin^2\psi+I_2\sin^2\theta\cos^2\psi+I_3\cos^2\theta\right)\\
& +\frac{1}{2}\dot\theta^2\left(I_1\cos^2\psi+I_2\sin^2\psi\right)+\frac{1}{2}I_3\dot\psi^2\\
& +\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi\,(I_1-I_2)+I_3\dot\psi\dot\varphi\cos\theta-U(\varphi,\theta,\psi) && (112)
\end{aligned}
$$

5.4　ラグランジュの運動方程式

ラグランジアンの各微分は以下の通り。

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=I_1\omega_1'\sin\theta\sin\psi+I_2\omega_2'\sin\theta\cos\psi+I_3\omega_3'\cos\theta \tag{113}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-\frac{\partial U}{\partial\varphi}=f_\varphi \tag{114}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=I_1\omega_1'\cos\psi-I_2\omega_2'\sin\psi \tag{115}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=I_1\omega_1'\dot\varphi\cos\theta\sin\psi+I_2\omega_2'\dot\varphi\cos\theta\cos\psi-I_3\omega_3'\dot\varphi\sin\theta+f_\theta \tag{116}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3\omega_3' \tag{117}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}=I_1\omega_1'(-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)-I_2\omega_2'(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)+f_\psi \tag{118}$$

ここで

$$\ell_\alpha'=I_\alpha\omega_\alpha' \tag{119}$$

を定義すると、ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\ell_1'\sin\theta\sin\psi+\ell_2'\sin\theta\cos\psi+\ell_3'\cos\theta\right)=f_\varphi \tag{120}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ell_1'\cos\psi-\ell_2'\sin\psi\right)=\ell_1'\dot\varphi\cos\theta\sin\psi+\ell_2'\dot\varphi\cos\theta\cos\psi-\ell_3'\dot\varphi\sin\theta+f_\theta \tag{121}$$

$$\frac{d}{dt}\ell_3'=\ell_1'\omega_2'-\ell_2'\omega_1'+f_\psi \tag{122}$$

6　オイラー方程式

式 (122) はいいのだが、式 (120) と式 (121) はこのままでは積分しにくいので、式 (122) も使って書き直すと、

$$\frac{d}{dt}\ell_1'=\ell_2'\omega_3'-\ell_3'\omega_2'+f_\theta\cos\psi+(f_\varphi\csc\theta-f_\psi\cot\theta)\sin\psi \tag{123}$$

$$\frac{d}{dt}\ell_2'=\ell_3'\omega_1'-\ell_1'\omega_3'-f_\theta\sin\psi+(f_\varphi\csc\theta-f_\psi\cot\theta)\cos\psi \tag{124}$$

ここで $(g'_1, g'_2, g'_3) = (g'_x, g'_y, g'_z)$ を次のように定義する。後で示すがこれはトルクである。

$$\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_\varphi \\ f_\theta \\ f_\psi \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \csc\theta\sin\psi & \cos\psi & -\cot\theta\sin\psi \\ \csc\theta\cos\psi & -\sin\psi & -\cot\theta\cos\psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{125}$$

すると

$$\frac{d}{dt}\ell'_1 = \ell'_2\omega'_3 - \ell'_3\omega'_2 + g'_1 \tag{126}$$

$$\frac{d}{dt}\ell'_2 = \ell'_3\omega'_1 - \ell'_1\omega'_3 + g'_2 \tag{127}$$

$$\frac{d}{dt}\ell'_3 = \ell'_1\omega'_2 - \ell'_2\omega'_1 + g'_3 \tag{128}$$

式 (122)–(124) はオイラー方程式と呼ばれる。オイラー方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot\ell'_1 \\ \dot\ell'_2 \\ \dot\ell'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell'_1 \\ \ell'_2 \\ \ell'_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} \tag{129}$$

とも書ける。角速度 $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ だけを使って書けば

$$\dot\omega'_x = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega'_y\omega'_z + \frac{g'_x}{I_1} \tag{130}$$

$$\dot\omega'_y = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega'_z\omega'_x + \frac{g'_y}{I_2} \tag{131}$$

$$\dot\omega'_z = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega'_x\omega'_y + \frac{g'_z}{I_3} \tag{132}$$

角速度から剛体の向き（オイラー角）を求めるには、式 (59)–(61) を使ってオイラー角も同時に時間積分する必要がある。

(g'_1, g'_2, g'_3) を求めてみよう。式 (125) と (108) より

$$g'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta} f'_\beta \tag{133}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} Q^t_{i;\beta\gamma} f'_{i;\gamma} \tag{134}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{3} (PQ^t_i)_{\alpha\gamma} f'_{i;\gamma} \tag{135}$$

ここで行列 PQ^t_i は P と Q_i の積を計算すれば、以下のように簡単になることが分かる。

$$PQ^t_i = \begin{pmatrix} 0 & -z'_i & y'_i \\ z'_i & 0 & -x'_i \\ -y'_i & x'_i & 0 \end{pmatrix} \tag{136}$$

したがって

$$g'_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x'_{i;\beta} f'_{i;\gamma} \tag{137}$$

外積を使えば

$$\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} x'_{i;1} \\ x'_{i;2} \\ x'_{i;3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f'_{i;1} \\ f'_{i;2} \\ f'_{i;3} \end{pmatrix} \tag{138}$$

つまり (g'_1, g'_2, g'_3) は各質点にかかるトルクの和（全トルク）を回転系 G' で測った成分である。

7 正準方程式

ラグランジュの運動方程式は多くの場合、式 (120)–(122) のように、そのままでは数値積分プログラムに渡せないような形の連立微分方程式系になる。それを変形し左辺に独立変数の時間微分、右辺に時間微分のない項、という形に変形したのがオイラー方程式 (126)–(128) であった。これならそまま数値積分できる。一方、ハミルトン形式の解析力学では、最初からそのような形の微分方程式が得られるので数値計算には便利である。ここでは剛体運動の正準方程式を求める。

一般化座標 $\varphi,\,\theta,\,\psi$ に共役な運動量は、

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1\omega_1'\sin\theta\sin\psi + I_2\omega_2'\sin\theta\cos\psi + I_3\omega_3'\cos\theta \tag{139}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = I_1\omega_1'\cos\psi - I_2\omega_2'\sin\psi \tag{140}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3\omega_3' \tag{141}$$

この式を $I_1\omega_1',\, I_2\omega_2',\, I_3\omega_3'$ について解くと、

$$I_1\omega_1' = p_\varphi\csc\theta\sin\psi + p_\theta\cos\psi - p_\psi\cot\theta\sin\psi \tag{142}$$

$$I_2\omega_2' = p_\varphi\csc\theta\cos\psi - p_\theta\sin\psi - p_\psi\cot\theta\cos\psi \tag{143}$$

$$I_3\omega_3' = p_\psi \tag{144}$$

ラグランジアン (111) をルジャンドル変換してハミルトニアンを求める。

$$H(\varphi,\theta,\psi,p_\varphi,p_\theta,p_\psi) = \dot\varphi p_\varphi + \dot\theta p_\theta + \dot\psi p_\psi - L \tag{145}$$

式 (112) を見ると L のなかで $\dot\varphi,\,\dot\theta,\,\dot\psi$ に依存する項は K だけにあり、しかもその全てが $\dot\varphi,\,\dot\theta,\,\dot\psi$ の 2 次の項（$\dot\varphi^2$ や $\dot\varphi\dot\theta$ 等）である。このとき、

$$\dot\varphi p_\varphi + \dot\theta p_\theta + \dot\psi p_\psi = \dot\varphi\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} + \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} + \dot\psi\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} \tag{146}$$

という演算は K を 2 倍にすることに注意すると、ルジャンドル変換で得られるハミルトニアンは全エネルギーとなる。

$$H = 2K - (K - U) = K + U \tag{147}$$

式 (110) より

$$H(\varphi,\theta,\psi,p_\varphi,p_\theta,p_\psi) = \frac{(I_1\omega_1')^2}{2I_1} + \frac{(I_2\omega_2')^2}{2I_2} + \frac{(I_3\omega_3')^2}{2I_3} + U(\varphi,\theta,\psi) \tag{148}$$

ここで $(I\omega_1', I\omega_2', I\omega_3')$ は $(\varphi,\theta,\psi,p_\varphi,p_\theta,p_\psi)$ の関数で (142)–(144) で与えられる。

ハミルトニアン (148) から正準方程式を作る。

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \csc\theta\,(\omega_1'\sin\psi + \omega_2'\cos\psi) \tag{149}$$

$$\dot\vartheta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \omega_1'\cos\psi - \omega_2'\sin\psi \tag{150}$$

$$\dot\psi = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = -\cot\theta\,(\omega_1'\sin\psi + \omega_2'\cos\psi) + \omega_3' \tag{151}$$

$$\dot{p_\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} = f_\varphi \tag{152}$$

$$\dot{p_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \csc\theta(\omega_1'\sin\psi + \omega_2'\cos\psi)\,(p_\varphi\cot\theta - p_\psi\csc\theta) + f_\theta \tag{153}$$

$$\dot{p_\psi} = -\frac{\partial H}{\partial\psi} = (\omega_1'\cos\psi - \omega_2'\sin\psi)\,(-p_\varphi\csc\theta + p_\psi\cot\theta) + p_\theta\,(\omega_1'\sin\psi + \omega_2'\cos\psi) + f_\psi \tag{154}$$

補助変数として

$$
\begin{aligned}
\omega'_\alpha &= \omega'_1 \sin\psi + \omega'_2 \cos\psi & (155)\\
\omega'_\beta &= \omega'_1 \cos\psi - \omega'_2 \sin\psi & (156)\\
p_\alpha &= p_\varphi \cot\theta - p_\psi \csc\theta & (157)\\
p_\beta &= -p_\varphi \csc\theta + p_\psi \cot\theta & (158)
\end{aligned}
$$

を定義すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega'_\alpha \csc\theta & (159)\\
\dot{\theta} &= \omega'_\beta & (160)\\
\dot{\psi} &= \omega'_3 - \omega'_\alpha \cot\theta & (161)\\
\dot{p}_\varphi &= f_\varphi & (162)\\
\dot{p}_\theta &= \omega'_\alpha p_\alpha \csc\theta + f_\theta & (163)\\
\dot{p}_\psi &= \omega'_\beta p_\beta + \omega'_\alpha p_\theta + f_\psi & (164)
\end{aligned}
$$

と、少し簡単になる。これが剛体運動の正準方程式である。最初の 3 つの式は、(59)–(61) と同じであることに注意。