解析力学B（平成21年度後期） 定期試験 解答例

神戸大学 陰山 聡 (2010.01.28)

問題 1

1-1

$$L(\dot{y}, y) = y^2 - \dot{y}^2$$

のとき、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -2\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y$$

従ってオイラー方程式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

は

$$\frac{d}{dx}(-2\dot{y}) - 2y = 0$$

となる。左辺第一項は y の微分 $\dot{y}$ をさらに微分するので、二階微分となる。結局、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

が求める微分方程式である。

1-2

c_1 と c_2 を積分定数として、

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

あるいは、

$$y = c_1 \cos(x + c_2), \quad y = c_1 \sin(x + c_2)$$

など。

問題 2

2-1

エネルギー保存則

$$\frac{m}{2} v^2 + m\,g\,y = m\,g\,y_a$$

より、

$$v = \sqrt{2g}\,\sqrt{y_a - y}$$

これと $ds = \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$ を

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v}$$

に代入すると、

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y_a - y}}\,dx$$

2-2

$$L(\dot{y}, y, x) = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y_a - y}}\,dx$$

として、極値問題

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} L(\dot{y}, y, x)\,dx = 0$$

を解けばよい。オイラーの方程式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

を使う。まず、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{y_a - y}} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

次に

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,(y_a - y)^{-3/2}$$

従って、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{(y_a - y)(1+\dot{y}^2)}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{(y_a - y)^3}}$$

従って

$$A = (y_a - y)(1+\dot{y}^2)$$

及び

$$B = 1 + \dot{y}^2$$

2-3

エネルギー保存より、

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{mc}{r} = -\frac{mc}{r_a}$$

これを解いて、

$$v = \sqrt{2c}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}}$$

一方、線素の長さ ds は

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$$

を満たすから、

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\theta$$

すべり落ちるのにかかる時間は、

$$
\begin{aligned}
T &= \int \frac{ds}{v} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c}} \int_{\theta_a}^{\theta^b} \sqrt{Q}\, d\theta
\end{aligned}
$$

最急降下線は

$$
\delta \int_{\theta_a}^{\theta_b} Q^{1/2}\, d\theta = 0
$$

から求まる。オイラーの方程式に代入して、

$$
\frac{d}{d\theta}\left\{ Q^{-1/2} \frac{2\dot{r}}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right)} \right\} = Q^{-1/2} \frac{3r^2 r_a^2 - 2r^3 r_a + r_a^2 \dot{r}^2}{(r_a - r)^2}
$$

従って

$$
F = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}
$$

問題 3

3-1

$$
K = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2
$$

3-2

$$
p = \sqrt{q^2 + x^2}
$$

3-3

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{k}{2}\,(p - q)^2 \\
&= \frac{k}{2}\,\left(\sqrt{q^2 + x^2} - q\right)^2
\end{aligned}
$$

3-4

$$
L(\dot{x}, x, t) = K - U = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\,\left(\sqrt{q^2 + x^2} - q\right)^2
$$

3-5

ラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0
$$

より、

$$
\frac{d}{dt}\,(m\,\dot{x}) - \left\{ -k\left(\sqrt{q^2 + x^2} - q\right)\,\left(\frac{x}{\sqrt{q^2 + x^2}}\right) \right\} = 0
$$

整理すると、

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+\frac{kqx}{\sqrt{q^2+x^2}}$$

これが求める運動方程式である。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{qx}{\sqrt{q^2+x^2}}\right)$$

などとしてもよい。

なお、参考までに、質点が平衡位置 $x=0$ の近傍で微少な振動するとき、x/q が小さいという近似を使うと、

$$\frac{qx}{\sqrt{q^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(x/q)^2}}=x\left\{(1+(x/q)^2)^{-1/2}\right\}\approx x\left\{1-(x/q)^2/2\right\}$$

となる。従って、運動方程式はこの場合、

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{2q^2}\,x^3$$

と近似できる。(距離の 3 乗に比例する引力。)

問題 4

4-1

$$\begin{aligned}L &= \frac{m}{2}\left(v_r^2+v_\phi^2\right)-mgr\cos\alpha\\ &= \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\,\sin^2\alpha\,r^2\,\dot{\phi}^2-mgr\cos\alpha\end{aligned}$$

4-2

いろいろな形で書けるが、たとえば r 成分は、

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2}=m\,r\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2-mg\cos\alpha$$

ϕ 成分は（これは循環座標）

$$\frac{d}{dt}\left(m\,r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}\right)=0$$

なお、参考までに、この二つの式は簡単な形にまとめられる。ϕ 成分の式から

$$m\,\sin^2\alpha\,r^2\,\dot{\phi}=c\quad(c\text{ は定数。角運動量。})$$

と書けるから、$\dot{\phi}=c/(m\sin^2\alpha\,r^2)$ を上の式に代入して、

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=\left(\frac{c^2}{m\,\sin^2\alpha}\right)r^{-3}-mg\cos\alpha$$

ビー玉を皿の底（原点）に引き込もうとする重力（右辺第二項）が常に働いている一方、原点からは距離の 3 乗に反比例する斥力（右辺第一項）が働いている。