解析力学B（平成21年度後期） 定期試験

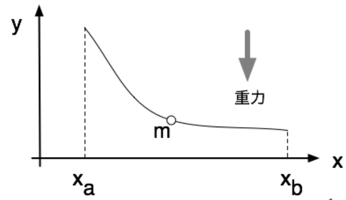
神戸大学 陰山 聡 (2010.01.28)

【問題１】 x の関数 $y = y(x)$ の微分 dy/dx を $\dot{y}(x)$ とする。$y(x_a)$ と $y(x_b)$ は固定という端点条件のもとでの y の汎関数 $I[y] = \int_{x_a}^{x_b} (y^2 - \dot{y}^2)\, dx$ を考える。

問題 1-(1) $I[y]$ が極値をとる関数 y が満たすべき微分方程式を立てよ。
（ヒント：$\delta \int_{x_a}^{x_b} L(\dot{y}, y, x)\, dx = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ）

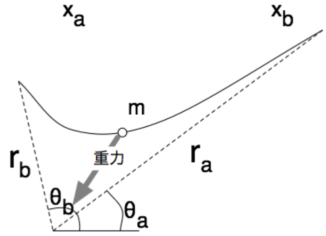
問題 1-(2) その微分方程式を解け。

【問題２】 ２次元カーテシアン座標 (x, y) をとり、x-y 面内の質点（質量 m）の運動を考える。y の負方向に一様な重力（加速度 g）がある。質点が始点 $(x, y) = (x_a, y_a)$ から出発し、関数 $y = y(x)$ に沿って、終点 (x_b, y_b) まですべり落ちるのに要する時間を T とする（$y_a > y_b$）。両端点は固定とし、初期速度はゼロ、摩擦は無視する。曲線 $y = y(x)$ に沿って始点から測った長さを s、質点の速さを v とすると、$T = \int dt = \int \frac{ds}{v}$ と書ける。



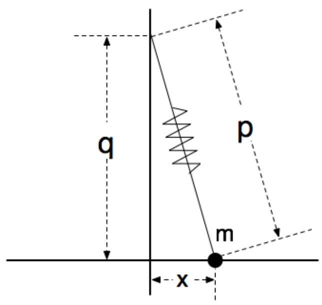
問題 2-(1) 汎関数 $T[y]$ を x の定積分で書け。（ヒント：エネルギーの保存から $mv^2/2 + mgy = mgy_a$ である。また、$ds^2 = dx^2 + dy^2$ より、$ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$ と書ける。ここで $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ である。）

問題 2-(2) $T[y]$ が極小となる関数 $y(x)$（最急降下線）を求めるための微分方程式は $\frac{d}{dx}\left\{\frac{\dot{y}}{\sqrt{A}}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{(y_a - y)^3}}$ である。A と B を求めよ。



問題 2-(3) 重力が原点からの距離 r の逆自乗に比例する中心力（引力）の場合の最急降下線を考える（右図）。極座標 (r, θ) での最急降下線 $r = r(\theta)$ が満たす方程式は、$r_a > r_b$ とし、$Q = \frac{r^2 + \dot{r}^2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}}$ とおくと、$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sqrt{Q}}\frac{2\,\dot{r}}{F}\right\} = \frac{1}{\sqrt{Q}}\frac{3\,r_a^2\,r^2 - 2\,r_a\,r^3 + r_a^2\,\dot{r}^2}{(r_a - r)^2}$ である。F を求めよ。ただし $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$ である。ヒント：ポテンシャルエネルギーは $U(r) = -c\,m/r$ である（c は定数）。

【問題３】 自然長 q、バネ定数 k のバネの一端を、y 軸上の点 $(x, y) = (0, q)$ に固定し、他端には質点（質量 m）をつける。この質点は x 軸上を自由に（摩擦なく）動けるものとする。この質点の運動方程式を求めよう。



問題 3-(1) 質点の運動エネルギー K を質点の速度 $\dot{x}$ の関数として書け。

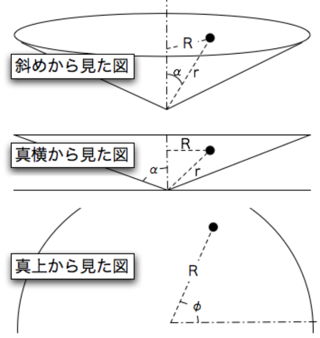
問題 3-(2) 質点が位置 x にある時、バネの総長 p を x の関数として書け。

問題 3-(3) 質点が位置 x にある時のバネのポテンシャルエネルギー U を x の関数として書け。（ヒント：$U = (k/2) \times$ 自然長からの延びの２乗）。

問題 3-(4) この系のラグランジアン $L = K - U$ を x と $\dot{x}$ の関数として書け。

問題 3-(5) 質点の運動方程式を導出せよ。

【問題４】 円錐形の皿にビー玉を転がした時の運動を考える。円錐の面と軸のなす角度を α とする（右図参照）。ビー玉は質量 m の質点とし、鉛直下方の重力（加速度 g）を考え、ビー玉自体が回転する効果や摩擦は無視する。また、ビー玉は皿の面から離れることはないとする。ビー玉の位置を、皿の底（円錐の頂点）からの距離 r と、水平面内の角度 ϕ で表す。ビー玉の速度は、半径方向の成分 $v_r = \dot{r}$ と、角度方向の成分 $v_\phi = R\dot{\phi}(= r \sin\alpha\,\dot{\phi})$ の二つがある。



問題 4-(1) この系のラグランジアン L を $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$ の関数として書け。

問題 4-(2) 運動方程式の r 成分と ϕ 成分を導出せよ。
