

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

解析力学B

第06回: 質点の運動

神戸大: 陰山 聡

今日の講義ノート: <http://tinyurl.com/kage101118a>

2010.11.18

講義全体の概観01

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

第一回目の講義で話したとおり、この「解析力学B」では、(情報知能工学科らしく) 計算機の積極的な活用を目指している。

これまで5回にわたり、(チョークと黒板を使った講義で) 理論的な準備を進めてきた。

ようやく解析力学の威力を味わう段階に来た。解析力学の威力の一つは、解くべき(運動)方程式を立てるのが容易である、という点である。

前回、解析力学の運動方程式(の一つ)であるラグランジュの運動方程式の導出法を解説した。ラグランジアン L が分かっているならば、機械的に(オイラー方程式というアルゴリズムに従って)ラグランジュの運動方程式を立てることが出来る。

講義全体の概観02

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

運動方程式は時間に関する2階の微分方程式である。その微分方程式が簡単な形であれば数学的に解くことができるが、それはむしろ稀である。解き方がわからずに微分方程式になっていることの方が多い。

解きたい力学問題があり、その問題に対するラグランジュの運動方程式を簡単に立てることができるとしても、その運動方程式を簡単に解くことができないのであれば、意味がない。

だが、計算機を使えばたいいの微分方程式は十分に高い精度で解くことができる。計算機の力を活用することで、解析力学の威力をたっぷりと味わってほしい。

復習01

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

- 様々な極小原理

- 汎関数

- 入力関数が関数、出力が数値 \Rightarrow 汎関数

- 汎関数が極値をとる \Rightarrow 変分がゼロ

- オイラー方程式

- 変分 $\delta \int_a^b L(y, y', x) dx = 0$ (+端点条件)

- \Rightarrow

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

復習02

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

ハミルトンの原理

運動は作用積分 (= 軌道の汎関数) が極値を取る軌道である。

$$\delta I = \delta \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt = 0$$

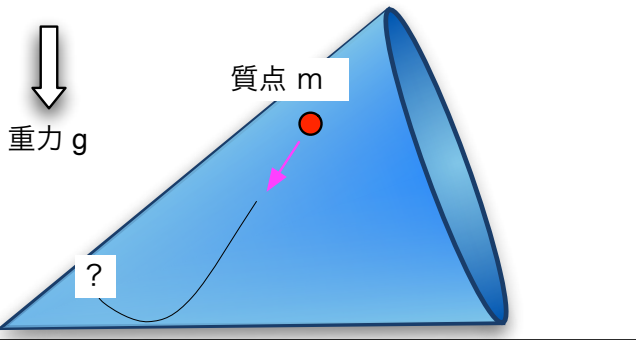
L はラグランジアンと呼ばれる。

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})$$

この変分問題に対応するオイラー方程式を立てれば運動方程式が求まる。 \Rightarrow ラグランジュの運動方程式

今日の目標: ラグランジュの運動方程式を使ってみる

地面に置かれた円錐面上を滑る質点の運動を解く。



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの原理

数値積分法

データ可視化

使う道具

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

- 1 ハミルトンの原理
- 2 数値積分法
- 3 可視化プログラム

ハミルトンの原理

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

円錐面上を滑る質点は、作用積分 I が極値をとるような運動を
するはず。

⇒ ハミルトンの原理

復習: L をラグランジアンとすると、1次元の運動 $x = x(t)$ の場
合:

$$I[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

復習: 2次元の運動 $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$ の場合:

$$I[x_1, x_2] = \int_{t_a}^{t_b} L(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), t) dt$$

座標についての注意

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

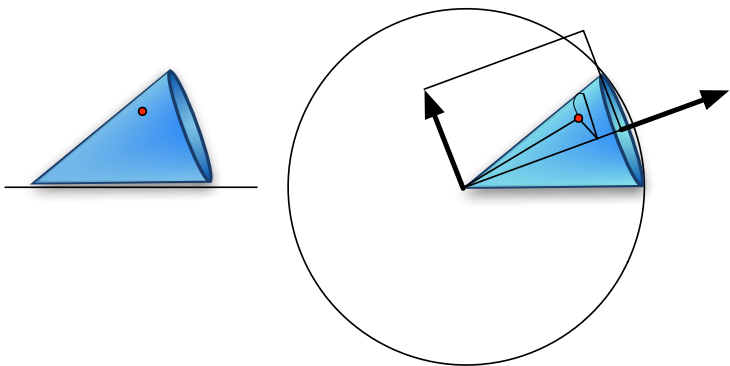
数値積分法

データ可視化

- 自由度が2次元とは：質点の位置が二つの座標 (x_1, x_2) で指定される。
- 2次元の運動：時間の関数としての質点の位置 $(x_1(t), x_2(t))$
- 重要ポイント： (x_1, x_2) はカーテシアン座標の (x, y) とは限らない。
⇒ 二つのペアで位置が指定できるものあれば、どんな座標でもいい。

座標の取り方

- 座標の取り方はなんでもいいが、ラグランジアン L を計算しやすいようにとるのがコツ。



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

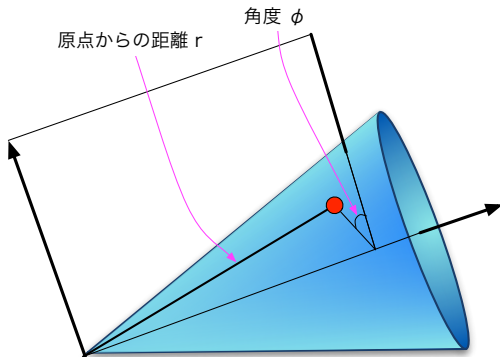
ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

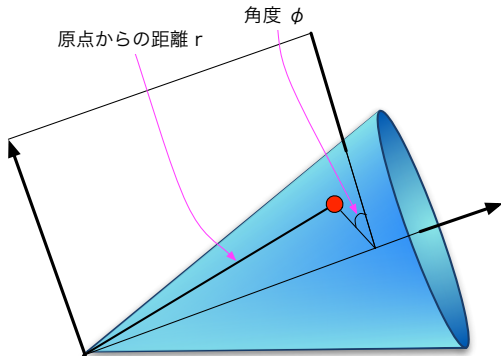
座標の取り方

- 原点からの距離 r と、円錐の中心軸の周りの角度 ϕ の二つを使う。
- 質点の位置は、 (r, ϕ) で決まる。



座標の取り方

- 質点の運動は、時間 t の関数としての $(r(t), \phi(t))$ 。
⇒ 今求めたいのは、この二つの関数 $r(t)$ と $\phi(t)$ 。



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

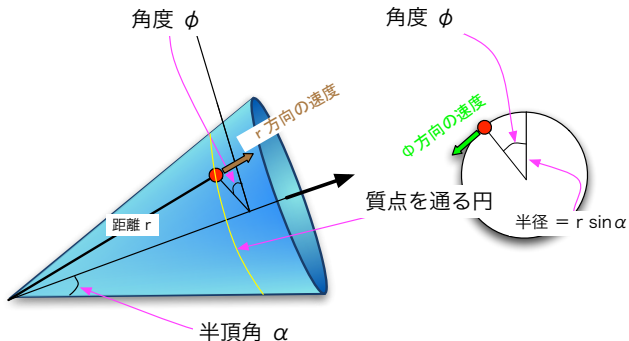
データ可視化

ラグランジアン の 計算

■ ラグランジアン $L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$

■ 運動エネルギー

$$\frac{m}{2} \text{速度}^2 = \frac{m}{2} (\text{r方向の速度}^2 + \phi\text{方向の速度}^2)$$



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

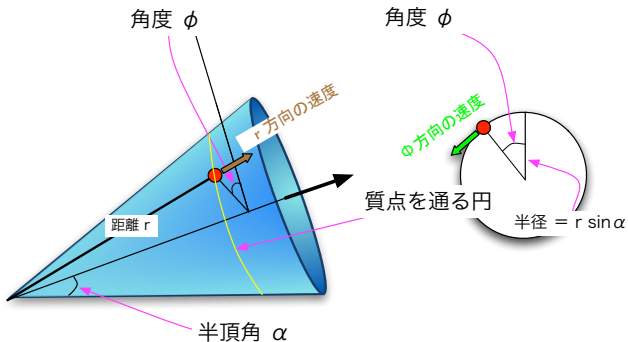
ハミルトンの原理

数値積分法

データ可視化

運動エネルギー

- r 方向の速度 = $\frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}$
- ϕ 方向の速度 = (円の半径) $\times \frac{d\phi(t)}{dt} = r \sin \alpha \dot{\phi}$
- 運動エネルギー = $\frac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 + \left(r \sin \alpha \dot{\phi} \right)^2 \right\}$



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

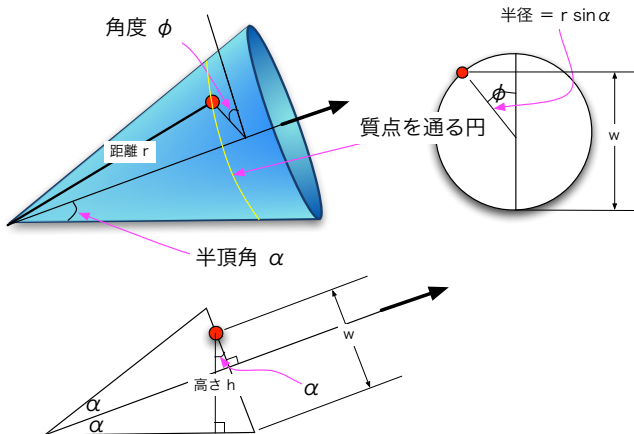
ハミルトンの原理

数値積分法

データ可視化

ポテンシャル

- 床からの高さ $h = w \cos \alpha$
- $w = r \sin \alpha (1 + \cos \phi)$
- 従ってポテンシャル = $mgh = mgr \sin \alpha (1 + \cos \phi)$



解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

ラグランジアンが求まった

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

$$L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 \right) - mgr \sin \alpha (1 + \cos \phi)$$

ハミルトンの原理によれば、運動は次の極値原理で決まる

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, t) dt = 0 \quad (+ \text{端点条件})$$

変分法によれば、一般にこの種の変分問題の解はオイラー方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

⇒ ラグランジュの運動方程式

ラグランジュの運動方程式を作る (r成分)

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

$L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 \right) - mgr \sin \alpha (1 + \cos \phi)$
を使い、機械的に計算する:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 - m g \sin \alpha (1 + \cos \phi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}.$$

ラグランジュの運動方程式のr成分 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$ に代入すると

$$m \ddot{r} - m r \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 + m g \sin \alpha (1 + \cos \phi) = 0$$

ラグランジュの運動方程式を作る (ϕ 成分)

ϕ 成分も機械的に計算する:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m g r \sin \alpha \sin \phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2 m r \dot{r} \sin^2 \alpha \dot{\phi} + m r^2 \sin^2 \alpha \ddot{\phi}$$

ラグランジュの運動方程式の ϕ 成分 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ に代入すると

$$m r^2 \sin^2 \alpha \ddot{\phi} + 2 m r \dot{r} \sin^2 \alpha \dot{\phi} - m g r \sin \alpha \sin \phi = 0.$$

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

ラグランジュの運動方程式が求まった

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

求まった二つ運動方程式を整理すると、

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2 + g \sin \alpha (1 + \cos \phi) &= 0, \\ r \sin^2 \alpha \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \sin^2 \alpha \dot{\phi} - g \sin \alpha \sin \phi &= 0.\end{aligned}$$

未知関数 $r(t)$ と $\phi(t)$ を決める2階の微分方程式が二組。
解析的に(紙とペンで)解けるか? \Rightarrow 簡単ではなさそう。。。

でも我々には計算機がある!

ラグランジュの運動方程式をちょっと書き換える

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

$u = \dot{r}$ と $v = \dot{\phi}$ という新しい量を二つ導入し、整理するとさきほどの運動方程式は次のように書ける:

$$\dot{r} = u, \quad (1)$$

$$\dot{\phi} = v, \quad (2)$$

$$\dot{u} = r \sin^2 \alpha v^2 - g \sin \alpha (1 + \cos \phi), \quad (3)$$

$$\dot{v} = -2uv/r + g \sin \phi / (r \sin \alpha). \quad (4)$$

未知関数 $u(t), v(t), r(t), \phi(t)$ を決める1階の微分方程式が4つ。

これを計算機に解かせよう!

数値積分法(1)

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

一般に t の関数 $f(t)$ の微分方程式:

$$\dot{f} = \Psi(f, t),$$

を数値的に(=四則演算だけで(=つまり計算機で))解く方法を数値積分法と言う。

どれか一つの数値積分法(山ほどある)を実装したプログラムに、上の右辺 Ψ と $f(t)$ の初期条件 $f(t_0)$ を渡せば、 $t_n > t_0$ における関数の値 $f(t_n)$ を返してくれる。

$$t_n = t_0 + n \Delta t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで Δt は(通常小さい)時間刻み幅

数値積分法(2)

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

未知量が複数ある時も同様に数値積分法で微分方程式を解くことができる。

例えば二つの未知量 $f(t)$, $g(t)$ に対する微分方程式が二つあれば:

$$\dot{f} = \Psi(f, g, t),$$

$$\dot{g} = \Phi(f, g, t).$$

数値積分ルーチンに Ψ , Φ と初期条件 $f(t_0), g(t_0)$ を入れれば、この微分方程式系を解いて、(数値)解: $f(t_n), g(t_n)$ を返してくれる。

4つでも同様。

数値積分法を使って質点の運動を解いてみよう

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

地面に置かれた円錐面上を滑る質点の運動方程式(1)~(4)を、数値積分法を使って計算機で解いてみる。

ここでは数多くある数値積分法の中でも比較的簡単で高精度な4段4次ルンゲ=クッタ法と呼ばれる種類の数値積分法を使う。

⇒ ルンゲ=クッタ法については数値計算の本を参照せよ。

計算機シミュレーションと可視化

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

数値積分プログラムによって運動方程式(1)~(4)を積分できる。

任意の初期条件が可能: 円錐上に質点を好きな位置置き、好きな方向に投げることができる。

数値積分プログラムから出てくる出力は(離散化された時刻の)、
二つの座標値(r, ϕ)

$$r(t_n), \phi(t_n) \text{ at } t_n = t_0 + n \Delta t$$

数値積分プログラムは、この実数値のペアを次々と出力してくれる。

一種の仮想的な実験。 ⇒「数値実験」あるいは計算機シミュレーション。

計算機シミュレーションと可視化

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法
データ可視化

しかし・・・ 数値積分プログラムの出力は(大量の)数値データ。

$$(r(t_n), \phi(t_n)) = (3.1415, 9.2653), (5.5897, 9.3238), \dots$$

そんな数値データをいくら大量にもらっても、今の問題「円錐上を質点がどう滑るか」の解明には(直接には)役に立たない。

数値データを眼に見える形にするプロセスが必要。

⇒「データ可視化」

可視化の方法

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

数値積分プログラムが解く計算機の中の仮想的な世界(地面、円錐面、質点、その運動)を画像化する。

コンピュータグラフィクス(CG)の技術を活用する。

簡単な問題であれば、パソコン上で数値実験と可視化が同時にできる。

(複雑な問題の計算機シミュレーションにはスーパーコンピュータが必要。)

シミュレーションプログラム

解析力学B

C3-302

はじめに

復習

今日の目標

ハミルトンの
原理

数値積分法

データ可視化

ファイル名: particle_on_cone.cpp

URL: <http://tinyurl.com/kage101118b>

