解析力学B

第07回: 質点の運動

神戸大: 陰山 聡

今日の講義ノート: URL:

2010.11.25

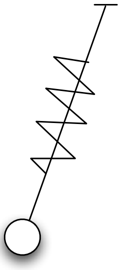
今日の内容

ハミルトンの原理(ラグランジュの運動方程式)の応用(続き)

1. バネ振り子
2. 放物線に拘束された質点

ばね振り子

バネ定数 k
バネ自然長 l_0
バネの一端は 原点 $(0,0,0)$ に固定
重力定数 g
質点の質量 m
質点の座標 (x,y,z)
ラグランジアン L



バネのポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{k}{2}(\text{バネの伸び縮み})^2$$

伸び縮み = 自然長からのズレ= 現在の長さ − バネの自然長

ラグランジアン

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \text{（運動エネルギー）} - \text{（ポテンシャルエネルギー）}$$

$$\text{運動エネルギー} \quad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \quad U = mgz + \frac{k}{2}(s - l_0)^2$$

s = 現在のバネの長さ

ラグランジアン

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{k}{2}(s - l_0)^2,$$

ここで

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ハミルトンの原理

運動は作用積分の極値:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\, dt = 0$$

オイラー方程式

極値 $\Rightarrow$ 軌道を少しだけ動かしても汎関数の値は変わらない。

$$x(t) \to x(t) + \epsilon\,\eta_x(t)$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_a}^{t_b} L(x(t)+\epsilon\,\eta_x(t), y(t)+\epsilon\,\eta_y(t), z(t)+\epsilon\,\eta_z(t),\\ &\dot{x}(t)+\epsilon\,\dot{\eta_x}(t), \dot{y}(t)+\epsilon\,\dot{\eta_y}(t), \dot{z}(t)+\epsilon\,\dot{\eta_z}(t))\,dt\\ &= \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\,dt\end{aligned}$$

テーラー展開と部分積分を使うとオイラー方程式を得る。
テーラー展開（1次元の場合:）

$$\begin{aligned}&L(x+\epsilon\,\eta_x, \dot{x}+\epsilon\,\dot{\eta_x}) - L(x(t), \dot{x})\\ &= \frac{\partial L}{\partial x}\epsilon\,\eta_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\epsilon\,\dot{\eta_x}\end{aligned}$$

オイラー方程式

軌道は3次元的に自由に(任意の方向に)少しだけ変えることができる。
$\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$, $\eta_z(t)$は任意で独立。
$\Rightarrow$ 式が3つでる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

ラグランジュの運動方程式

ハミルトンの原理に対応するオイラー方程式

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{k}{2}(s - l_0)^2,$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

ばね振り子の運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) =$$

sを残して計算すると楽

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x}{s}$$

ばね振り子の運動方程式

ラグランジュの運動方程式のx成分

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

に代入すると

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\frac{s - l_0}{s}x$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

練習問題

ラグランジュの運動方程式のz成分の式を導出せよ。

$$\frac{\partial L}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) =$$

ラグランジュの運動方程式

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}x$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}y$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}z - g$$

$$s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

数値積分による運動方程式の解

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{v} = v$$

$$\dot{w} = w$$

$$\ddot{u} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}x$$

$$\ddot{v} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}y$$

$$\ddot{w} = -\frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}z - g$$

$$s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

数値積分による運動方程式の解

spring_swing_particle.cpp

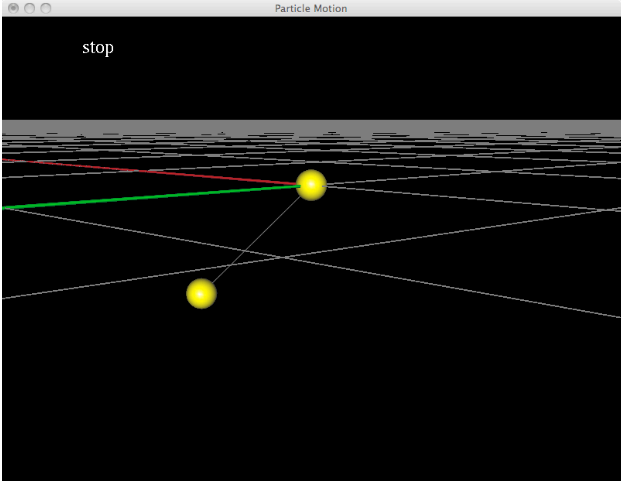
```
double s, common_factor;

s = sqrt( (x1−x0)*(x1−x0) + (y1−y0)*(y1−y0) + (z1−z0)*(z1−z0) );

common_factor = (K/M) * (s−L0) / L0;
dpos[0] = ( u1 ) * dt;
dpos[1] = ( v1 ) * dt;
dpos[2] = ( w1 ) * dt;
dpos[3] = ( −common_factor*(x1−x0) ) * dt;
dpos[4] = ( −common_factor*(y1−y0) ) * dt;
dpos[5] = ( −common_factor*(z1−z0) − GRAVITY_CONST ) * dt;
```

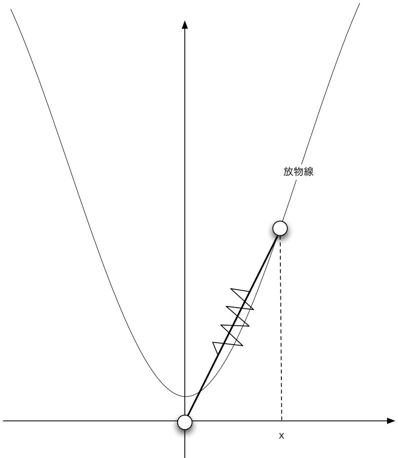
シミュレーション

spring_swing_particle.cpp



放物線$y = x^2 + 1$に拘束された質点の運動

バネ定数 k、質点の質量 m、バネ自然長 l_0、重力は無視。
バネの一端は 原点 $(0, 0, 0)$ に固定
質点の座標 (x)【一つの座標だけで十分】



ラグランジアン

$$L(x,\dot{x}) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})$$

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \quad U = \frac{k}{2}(s - l_0)^2$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^2+1)^2} = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$$

$y = x^2 + 1$ より

$$\text{運動エネルギー} \quad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(1 + 4\,x^2)\,\dot{x}^2$$

ここで $y = x^2 + 1$ より

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

を使った。

ラグランジアン

結局ラグランジアンは

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}(1+4\,x^2)\,\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(s-l_0)^2$$

$$s = \sqrt{x^4+3x^2+1}$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

に代入する。

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(s - l_0)^2 = k\,(s - l_0)\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2x^3 + 3x}{s}$$

に注意すると、

$$\dot{x} = v \tag{1}$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{1 + 4x^2}\left\{4xv^2 + \frac{k}{m}\frac{s - l_0}{s}(2x^3 + 3x)\right\} \tag{2}$$

数値積分による運動方程式の解

one_ball_on_parabola.cpp

```
double x = pos[0];
double xsq = x*x;
double v = pos[1];
double s, factor = K/M;
s = sqrt(xsq*xsq+3*xsq+1.0);
dpos[0] = ( v ) * dt;
dpos[1] = ( -(1.0/(1+4*xsq)*(4*x*vsq + factor*(s-L0)/
s*(2*xsq*x+3*x))) ) * dt;
```

放物線$y = x^2 + 1$に拘束された質点の運動