

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

解析力学B

第08回: ラグランジュ力学: 拘束条件、未定乗数法

神戸大: 陰山 聡

今日の講義ノート: URL:

2010.12.02

質点系

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

複数の質点からなるシステム。

二つの質点。

質点1: 座標 (x_1, y_1, z_1) 質点2: 座標 (x_2, y_2, z_2)

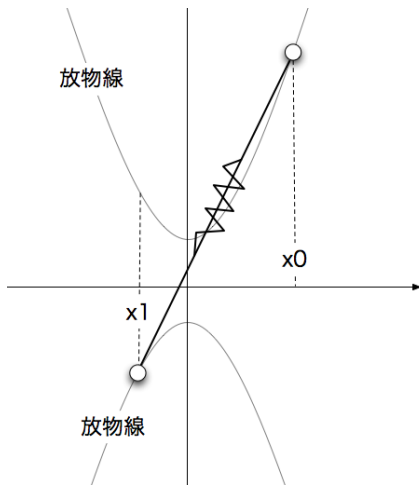
ラグランジアン = (系の運動エネルギー) - (ポテンシャル)

$$L(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_2)$$

ラグランジュの運動方程式 \Rightarrow いつもと同じ。

例：放物線上の2質点

二つの質点がバネでつながっている。それぞれ放物線に拘束されている。 $y = x^2 + 1$ (上側) と $y = -x^2 - 1$ (下側)。



ラグランジアン

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

座標は二つ必要。上の質点の座標 x_0 と、下の質点の座標 x_1 。
ラグランジアンは

$$L(x_0, x_1, \dot{x}_0, \dot{x}_1) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})$$

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \quad U = \frac{k}{2}(s - l_0)^2$$

$$s = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (x_0^2 + x_1^2 + 2)^2}$$

ここで $y_0 = x_0^2 + 1$ と $y_1 = -x_1^2 - 1$ を使った。

ラグランジアン

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$\text{運動エネルギー } K = \frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$$

ここで $y_0 = 2x_0x_1$ 等を使うと、

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + 4x_0^2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2 + 4x_1^2\dot{x}_0^2)$$

結局、ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + 4x_0^2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2 + 4x_1^2\dot{x}_0^2) - \frac{k}{2}(s - l_0)^2$$

$$s = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (x_0^2 + x_1^2 + 2)^2}$$

ラグランジュの運動方程式

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$(1 + 4x_0^2)\ddot{x}_0 = -4x_0\dot{x}_0^2 - \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s - l_0}{s}\right) (\Delta x + 2x_0\Delta y)$$

$$(1 + 4x_1^2)\ddot{x}_1 = -4x_1\dot{x}_1^2 - \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s - l_0}{s}\right) (-\Delta x + 2x_1\Delta y)$$

ここで

$$\Delta x = x_0 - x_1$$

$$\Delta y = x_0^2 + x_1^2 + 2$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

これを少し書き直すと

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$\dot{x}_0 = v_0 \quad (1)$$

$$\dot{v}_0 = -\frac{1}{1+4x_0^2}(4x_0v_0^2 + f_0) \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad (3)$$

$$\dot{v}_1 = -\frac{1}{1+4x_1^2}(4x_1v_1^2 + f_1) \quad (4)$$

ここで

$$f_0 = \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s}{l_0}\right) (\Delta x + 2x_0\Delta y)$$

$$f_1 = \left(\frac{k}{m}\right) \left(\frac{s}{l_0}\right) (-\Delta x + 2x_1\Delta y)$$

シミュレーションコード (two_balls_parabola.cpp)

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

```
double x0 = pos[0];
double v0 = pos[1];
double x1 = pos[2];
double v1 = pos[3];

double dx = x0 - x1;
double x0sq = x0*x0, v0sq = v0*v0;
double x1sq = x1*x1, v1sq = v1*v1;
double dy = x0sq + x1sq + 2;
double s = sqrt(dx*dx + dy*dy);

double f0 = (K/M)*(s-L0)/s*( dx+2*x0*dy);
double f1 = (K/M)*(s-L0)/s*(-dx+2*x1*dy);

dpos[0] = ( v0 ) * dt;
dpos[1] = ( -1.0/(1+4*x0sq)*(4*x0*v0sq + f0) ) * dt;
dpos[2] = ( v1 ) * dt;
dpos[3] = ( -1.0/(1+4*x1sq)*(4*x1*v1sq + f1) ) * dt;
```

シミュレーションコード (two_balls_parabola.cpp)

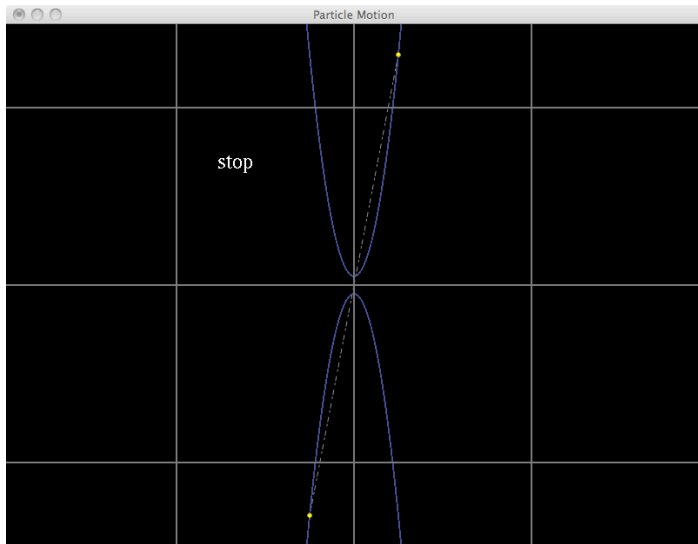
解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件



多自由度の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

系の座標が

$$(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N)$$

と書く。

ラグランジアン

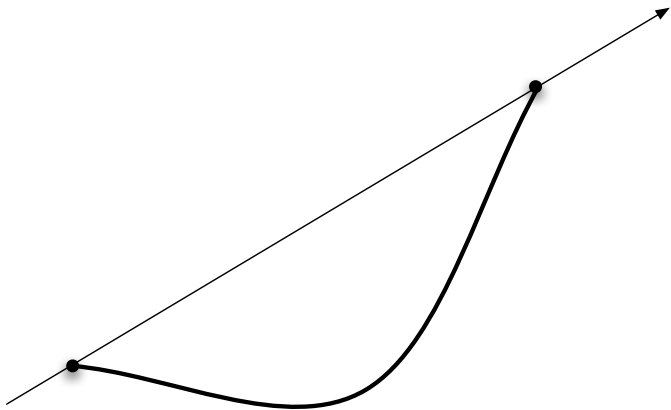
$$L(x, \dot{x}) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$$

多くの場合

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - U(x)$$

ゴムひもの振動

ゴムひもをぶら下げる。両端固定。どう運動するか？バネでつながった質点列とする。



解析力学B

C3-302

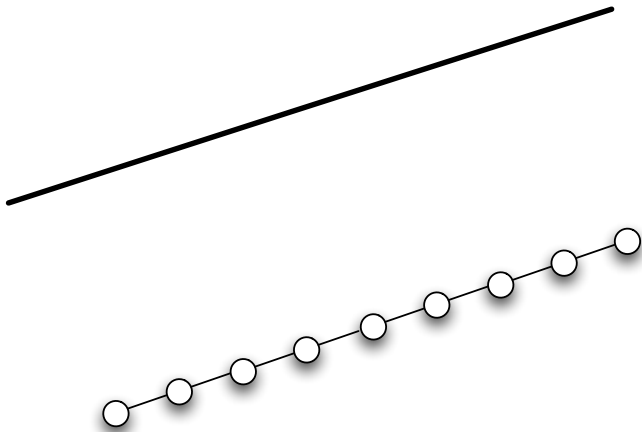
前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

ゴムひもの振動

ゴムひもをぶら下げる。両端固定。どう運動するか？バネでつながった質点列とする。



解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

拘束条件

解析力学B

C3-302

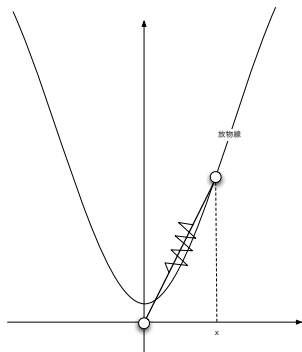
前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

放物線 $y = x^2 + 1$ の上に拘束されている質点の運動。簡単にできた。

$$y = x^2, \dot{y} = 2x\dot{x}$$



拘束条件

解析力学B

C3-302

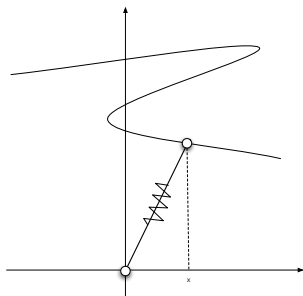
前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

こういうのはどうすればいい？

$y = ?$, $\dot{y} = ???$

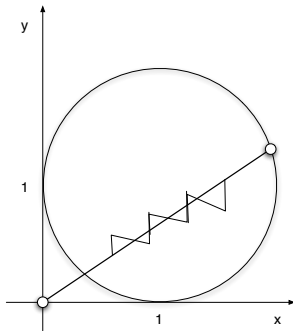


拘束条件

一般に2次元の場合、拘束条件は

$$f(x, y) = 0$$

と書ける。例: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$



運動方程式はどうすれば導けるか？

拘束条件

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

先に結論を述べる。

拘束条件

$$f(x, y) = 0$$

がある場合のラグランジュの運動方程式の出し方。

ラグランジュの未定乗数法

ラグランジアンを

$$L = (\text{拘束条件がない時のラグランジアン}) - \lambda f(x, y)$$

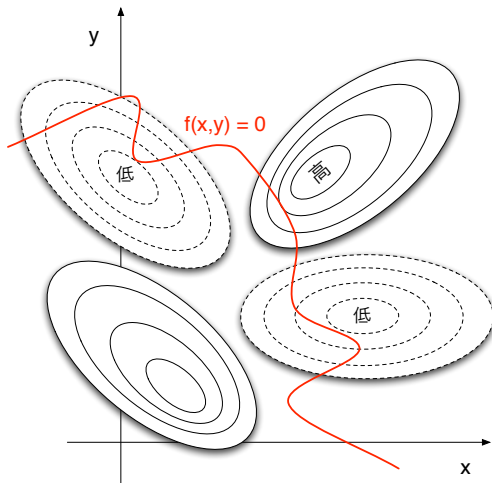
$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル}) - \lambda f(x, y)$$

とする。

拘束条件付きの極値問題：関数の場合

関数の例:

$f(x, y) = 0$ という条件のもとで $\phi(x, y)$ が極値をとる点を求める。



拘束条件付きの極値問題：関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$f(x, y) = 0$ は曲線。

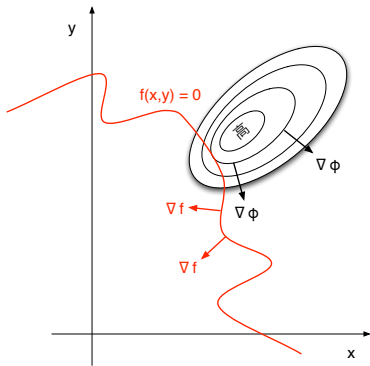
$\phi(x, y)$ の極値を探すために、単純に $\nabla\phi = 0$

$$\nabla\phi = (\partial_x\phi, \partial_y\phi) = 0$$

としてはだめ。

拘束条件付きの極値問題：関数の場合

その点で、 $f(x, y) = 0$ $\phi(x, y) = \phi_0$ という曲線がぴったり接触している。



拘束条件付きの極値問題：関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

その点で ∇f と $\nabla\phi$ が平行。

$$\nabla\phi = (\text{定数}) \times \nabla f$$

$$\nabla(\phi - \lambda f) = 0$$

$\lambda =$ 未定乗数

拘束条件付きの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$f(x, \dot{x}) = 0$$

という条件が満たされるという拘束条件の下で

$$I[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$$

が極値をとる関数の求め方。(つまり $\delta I = 0$ の解き方。)

拘束条件付きの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$\delta I_f = \delta \int_{t_a}^{t_b} (L(x, \dot{x}, t) - \lambda(t) f(x, \dot{x})) dt = 0$$

を解けば良い。

拘束条件つきの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

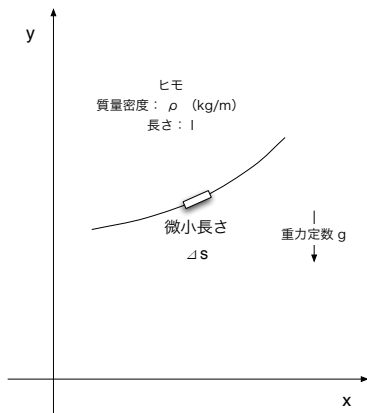
C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

例：カタナリー（懸垂線）



拘束条件付きの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

例：カタナリー（懸垂線）

線素 Δs のポテンシャルエネルギー

$$\Delta U = \rho g y, \Delta s$$

ひも全体のエネルギー

$$U = \int \Delta U \quad (5)$$

$$= \int \rho g y ds \quad (6)$$

ひもの全長

$$L = \int ds$$

は一定。

拘束条件付きの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

ラグランジュの未定乗数法により

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int (\rho g y ds - \lambda ds) \\ &= \delta \int (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx = 0\end{aligned}$$

$$L = (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

オイラー方程式

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

に代入。

拘束条件つきの極値問題：汎関数の場合

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$\frac{y - \frac{\lambda}{\rho g}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.}$$

$$\left(y - \frac{\lambda}{\rho g}\right)^2 = \text{const.} \times (1 + y'^2)$$

この解:

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) + \frac{\lambda}{\rho g}$$

⇒ カテナリー (懸垂線)

運動方程式への応用

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

ハミルトンの原理:

$$f(x, \dot{x}) = 0$$

という拘束条件の下で、作用積分

$$I[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$$

が極値をとる。⇒ ラグランジュの未定乗数法により

$$\delta I_f = \delta \int_{t_a}^{t_b} (L(x, \dot{x}, \lambda) \lambda f) dt = 0$$

従って、

$$L_f = L(x, \dot{x}, t) - \lambda(t) f(x, \dot{x})$$

対してオイラーの方程式を立て、拘束条件 $f = 0$ と連立させて解けばよい。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_f}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_f}{\partial x} = 0$$

拘束条件

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

2次元の場合、拘束条件

$$f(x, y) = 0$$

がある場合のラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_f}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_f}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L_f}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$f(x, y) = 0 \quad (9)$$

例題

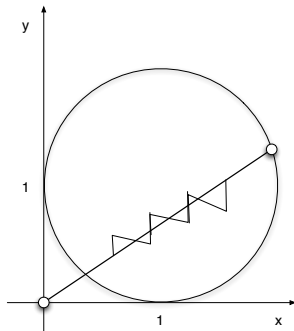
解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件



例題

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

拘束条件

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

ラグランジュの未定乗数法 λ を使うと、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(s - l_0)^2 - \lambda \{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1\}$$

ここで

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

例題

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$f(x, y) = 0 \quad (12)$$

に代入すると

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + k(s - l_0) \frac{x}{s} + 2\lambda(x - 1) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) + k(s - l_0) \frac{y}{s} + 2\lambda(y - 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

例題

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

$$x = 1 + \cos \phi$$

$$y = 1 + \sin \phi$$

とおくと上の3つの式のうち最後の式は常に成り立つ。

$$\dot{x} = -\sin \phi \dot{\phi}$$

$$\ddot{x} = -\cos \phi \dot{\phi}^2 - \sin \phi \ddot{\phi}$$

$$\dot{y} = \cos \phi \dot{\phi}$$

$$\ddot{y} = -\sin \phi \dot{\phi}^2 + \cos \phi \ddot{\phi}$$

例題

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

上の二つの式に代入すると

$$m(-\cos \phi \dot{\phi}^2 - \sin \phi \ddot{\phi}) + k \frac{s - l_0}{s} (1 + \cos \phi) \quad (13)$$

$$+ 2\lambda \cos \phi = 0 \quad (14)$$

$$m(-\sin \phi \dot{\phi}^2 + \cos \phi \ddot{\phi}) + k \frac{s - l_0}{s} (1 + \sin \phi) \quad (15)$$

$$+ 2\lambda \sin \phi = 0 \quad (16)$$

この二つの式から λ を消去して整理すると求めていた運動方程式

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{k}{m} \right) \left(\frac{s - l_0}{s} \right) (\sin \phi - \cos \phi)$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 2 \cos \phi + 2 \sin \phi}$$

を得る。変数 ϕ は、この方法では、座標という意味はなく、単に3つの連立方程式を解くために導入された変数であったことに注意。

シミュレーションコード (one_ball_on_parabola_LagMulti.cpp)

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

```
void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
{
    const double L0 = 0.5;
    const double K = 0.2;
    const double M = 1.0;

    double phi = pos[0];
    double psi = pos[1];
    double s = sqrt( 3 + 2*cos(phi) + 2*sin(phi) );
    dpos[0] = ( psi ) * dt;
    dpos[1] = ( (K/M)*(s-L0)/s*(sin(phi)-cos(phi))) * dt;
}
```

シミュレーションコード (one_ball_on_parabola_LagMulti.cpp)

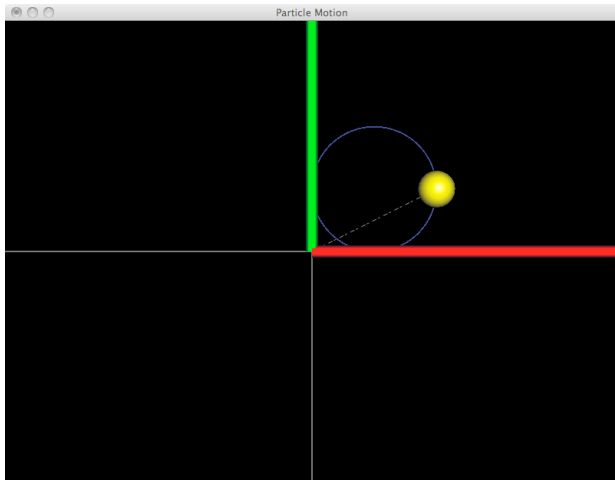
解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件



まとめ

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

- 多自由度系 \Rightarrow 簡単。自由度が N ならば、 N 次元の座標系をとり、系全体の運動エネルギーとポテンシャルからラグランジアンを作ればよい。
- 拘束条件付きの問題 \Rightarrow ラグランジュの未定乗数法

レポート課題

解析力学B

C3-302

前回の復習

多自由度の場合

拘束条件

次回休講

$(x, y) = (0, 2)$ を原点とする半径1の円周上に拘束された質点(質量 m)を考える。

重力は無視する。この質点は、原点 $(0, 0)$ とバネ定数 k 、自然長 l_0 のバネでむすばれているとする。

ラグランジュの未定乗数法を用いて質点の運動方程式を立てよ。

提出: 次回講義(12/16)にて。