解析力学B

第09回: ハミルトン形式

神戸大: 陰山 聡

今日の講義ノート: URL:

2010.12.16

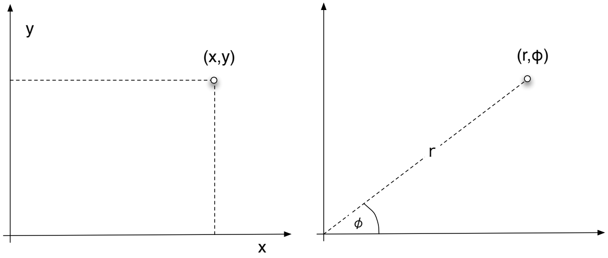
1. 次回 1月13日 休講
2. レポート回収

§ 数学的準備（簡単な復習）

変数変換(まずは簡単な例)

$$\begin{cases} x &= x(r,\phi) &= r\cos\phi \\ y &= y(r,\phi) &= r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r &= r(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \phi(x,y) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$



一般的な変数変換

独立変数 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$
従属変数 $Q = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$

$$\begin{cases} Q_1 & = & Q_1(q_1, \cdots, q_N) \\ Q_2 & = & Q_2(q_1, \cdots, q_N) \\ & \vdots & \\ Q_N & = & Q_N(q_1, \cdots, q_N) \end{cases}$$

変数変換 $q \to Q$

$$\begin{cases} q_1 & = & q_1(Q_1, \cdots, Q_N) \\ q_2 & = & q_2(Q_1, \cdots, Q_N) \\ & \vdots & \\ q_N & = & q_N(Q_1, \cdots, Q_N) \end{cases}$$

アインシュタインの規約

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots a_N\, x_N = \sum_{j=1}^{N} a_j\, x_j = a_j\, x_j$$

アインシュタインの規約

変数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$
定数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N} a_j\, x_j = a_j\, x_j$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(a_j\, x_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots a_N\, x_N) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

一般に:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(a_j\, x_j) = a_k$$

微分

変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$
関数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x)$

$$\Psi = f_1(x)\,x_1 + f_2(x)\,x_2 + \cdots f_N(x)\,x_N$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_j(x)\,x_j\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_1(x)\,x_1 + f_2(x)\,x_2 + \cdots f_N(x)\,x_N\right) \\
&= f_1(x) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,x_2 + \cdots + \frac{\partial f_N}{\partial x_1}\,x_N \\
&= f_1(x) + \frac{\partial f_j(x)}{x_1}\,x_j
\end{aligned}$$

一般に：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_j(x)\,x_k\right) = f_k + \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,x_j$$

§ラグランジアンと保存量

ポテンシャル中の質点の運動

ポテンシャルUが$z = x_3$だけの関数 $U = U(x_3)$の場合を考える。

例: 重力ポテンシャル $U = mgx_3$

ラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j - U(x_3)$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ポテンシャル中の質点の運動

$i = 1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) = 0$$

$i = 2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = 0$$

$i = 3$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_3) - \frac{dU}{dx_3} = 0$$

$m\dot{x}_1$と$m\dot{x}_2$は保存量。（運動量のx, y成分。）

ポテンシャル中の質点の運動

$\dot{x}_1$と$\dot{x}_2$が保存する理由：

ラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j - U(x_3)$$

にx_1とx_2が入っていなかったから。

循環座標

ラグランジアン

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$$

がq_kを含んでいない

$$L(q_1, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N)$$

とき、q_kを循環座標という。このとき、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

つまり $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ は保存量となる。

もう一つの保存量

ポテンシャル$U(x_3)$中の運動にはもう一つ保存量がある。座標変換すれば一目瞭然となる。円筒座標(r, ϕ, z)を使う。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi \\
x_2 &= r\sin\phi \\
x_3 &= z
\end{aligned}
$$

もう一つの保存量

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\,\dot{\phi} \\
\dot{x}_2 &= \dot{r}\sin\phi + r\cos\phi\,\dot{\phi} \\
\dot{x}_3 &= \dot{z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j - U(x_3) \\
&= \frac{m}{2}\left\{\left(\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\phi + r\cos\phi\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right\} - \\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(z)
\end{aligned}
$$

ϕは循環座標。従って、

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}
$$

は保存量

§ラグランジュ形式からハミルトン形式へ

ラグランジュ力学の復習

ラグランジアン

$$L(x,\dot{x}) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

時間に関する2階の微分方程式系

運動方程式の数値積分

時間に関する2階の微分方程式系

$$\ddot{x} = \phi(x, \dot{x})$$

このままでは数値積分で使いにくいので、時間に関する1階の微分方程式系に変えた。（式の数は2倍。）

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \phi(x, v)$$

プログラム例（再掲）:
spring_swing_particle.cpp

```
double s, common_factor;

s = sqrt( (x1-x0)*(x1-x0) + (y1-y0)*(y1-y0) + (z1-z0)*(z1-z0) );

common_factor = (K/M) * (s-L0) / L0;

dpos[0] = ( u1 ) * dt;

dpos[1] = ( v1 ) * dt;

dpos[2] = ( w1 ) * dt;

dpos[3] = ( -common_factor*(x1-x0) ) * dt;

dpos[4] = ( -common_factor*(y1-y0) ) * dt;

dpos[5] = ( -common_factor*(z1-z0) - GRAVITY_CONST ) * dt;
```

運動方程式の数値積分

変数（式）を2倍増やして時間に関する1階の微分方程式系にした。

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \phi(x, v)$$

・・・なんとも不自然。はじめから1階の微分方程式系を導く力学理論はできないか？ $\Rightarrow$ ハミルトン（Hamilton）形式

§ ハミルトン形式

ラグランジュの運動方程式の「一階微分化」

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

新しい変数$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$とおけば

$$\begin{cases} \dot{p} & = & \frac{\partial L}{\partial x} \\ p & = & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \end{cases}$$

という二つの式になるが、下の式は数値計算ではそのまま使えない。左辺が時間微分でないから。上の式はいい。

$$\dot{x} = ???$$

という形が自然に出てくる力学理論はないか？

ラグランジュの運動方程式の「一階微分化」

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

ではなく

$$\dot{x} = \frac{\partial (?)}{\partial p}$$

という形が欲しい。

ルジャンドル変換

解析力学B

C3-302

連絡事項

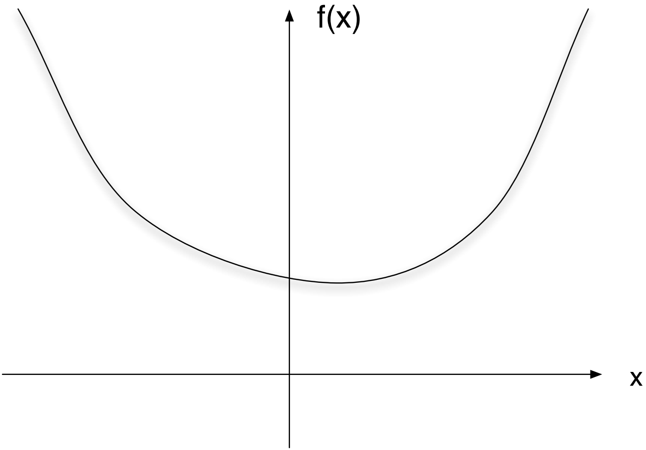
数学的準備（簡単な復習）

ラグランジアンと保存則

ラグランジュ形式からハミルトン形式へ

ハミルトン形式

xの凸関数$f(x)$



ルジャンドル変換

変数 x の関数 $f(x)$
接線の傾き β を決めれば、x は一意に決まる:

$$\beta = \frac{df}{dx}(x)$$

を解けばよい。

変数変換 $x \to \beta$

ルジャンドル変換

逆に

$$x = \frac{dg}{d\beta}(\beta)$$

となるような変数βの関数$g(\beta)$は何か？

答え：

$$x\,\beta = f + g$$

あるいは

$$g = x\,\beta - f$$

これを$f \to g$のルジャンドル(Legendre)変換という。gも凸関数。

ルジャンドル変換

確認：

$$g(\beta) = x(\beta)\,\beta - f(x(\beta))$$

$$\frac{dg}{d\beta} = x(\beta) + \beta\,\frac{dx(\beta)}{dx} - \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{d\beta} = x$$

ここで$\frac{df}{dx} = \beta$を使った。

ルジャンドル変換の例

$$f(x) = x^2 \longleftrightarrow g(\beta) = \frac{\beta^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{mx^2}{2} \longleftrightarrow g(\beta) = \frac{\beta^2}{2m}$$

逆変換すると元に戻る。

ラグランジュの運動方程式に戻る

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \to \dot{x} = \frac{\partial (?)}{\partial p}$$

としたい。

$\dot{x} \to p$ に変数変換し、Lをルジャンドル変換する。

$$H = p\,\dot{x} - L$$

すると

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{(望みどおりの形)}$$

になる。

ハミルトニアン

ラグランジアンLをルジャンドル変換した

$$H = p\,\dot{x} - L$$

をハミルトニアン(Hamiltonian)という。
ハミルトニアンではxとpが独立変数である。
pをxに共役な運動量、あるいは正準運動量という。

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

ハミルトニアン

$\frac{\partial H}{\partial x}$はどうなる？

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(p\dot{x} - L(x, \dot{x}(x,p))\right) \\
&= p\frac{\partial \dot{x}(x,p)}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \\
&\quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p \text{ より}\right) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial x} \\
&= -\dot{p}
\end{aligned}
$$

最後の式は、ラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}
$$

による。

ハミルトン形式の力学

まとめると、ラグランジアン$L(q,\dot{q})$が与えられているとき、qと正準運動量p

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

を独立変数としたハミルトニアン$H(q,p)$を

$$H(q,p) = p\,\dot{q} - L$$

として定義すると、運動方程式は下の形になる。

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

これをハミルトン形式の運動方程式（あるいは正準運動方程式）という。

ハミルトン形式の力学

注意：ハミルトニアンの定義式$H = p\dot{q} - L$の右辺にある$\dot{x}$はx, pの従属変数である。
つまり：

$$H(x, p) = p\,\dot{x}(x, p) - L(x, \dot{x}(x, p))$$

多自由度系の場合

これまでは1次元自由度のみ考えていた。多自由度系の場合も同じ。

ある力学系がN個の変数$q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$の ラグランジアン

$$L = L(q, \dot{q})$$

で記述されているとする。
q_iに共役な運動量（一般化運動量）p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

とハミルトニアンHを

$$H(p, q) = p_j \, \dot{q}_j - L$$

と定義する。（多次元関数のルジャンドル変換。）

多自由度系の場合

連立方程式

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$$

を解いて、

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \cdots, q_N, p_1, p_2, \cdots, p_N)$$

とする。

ハミルトニアンを

$$H(q, p) = p_j \dot{q}_j - L$$

と定義する。
ここで右辺は$\dot{q}$とラグランジアン

$$L = L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$$

は、$\dot{q}_i(q, p)$を通じた合成関数である。

多自由度系の場合

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k}(p_j \dot{q}_j) - \frac{\partial}{\partial p_k} L(q, p) \\
&= \dot{q}_k + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} \\
& \quad \left(p_\ell \text{ の定義 } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} = p_\ell \right) \text{ より} \\
&= \dot{q}_k + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} \\
&= \dot{q}_k
\end{aligned}
$$

多自由度系の場合

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}(p_j\dot{q}_j) - \frac{\partial}{\partial q_k}L(q,\dot{q}) \\
&= p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\right) \\
&= p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_k} \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \quad \text{（ラグランジュの運動方程式より）} \\
&= -\frac{d}{dt}p_k \\
&= -\dot{p}_k
\end{aligned}
$$

多自由度系の正準運動方程式

まとめ:

$q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$と $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$の ラグランジアン $L(q, \dot{q})$から、正準運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots N)$$

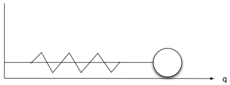
及び、q_iとp_iを独立変数としたハミルトニアン

$$H(q, p) = p_j \, \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$$

を作る。すると正準運動方程式は:

$$\begin{cases} \dot{q}_k &= \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

正準運動方程式の例: バネ



$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q-\ell_0)^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \left(\dot{q} = \frac{p}{m}\right)$$

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L = p\,\frac{p}{m} - \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2\right\} + \frac{k}{2}(q-\ell_0)^2 \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q-\ell_0)^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q-\ell_0)^2 \end{aligned}$$

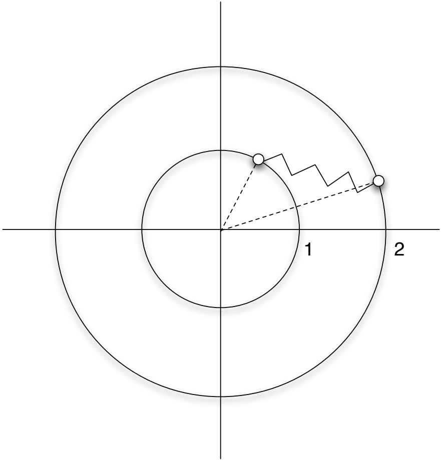
正準運動方程式の例: バネ

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q-\ell_0)^2$$

正準運動方程式

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -k\left(q-\ell_0\right) \end{cases}$$

正準運動方程式の例: もう少し面白い例



正準運動方程式の例: もう少し面白い例

原点を中心とした$x-y$平面上の二つの円(半径1と2)の上を動く二つの質点を考える。二つの質点はバネ(定数k、自然長ℓ_0)で結ばれている。
二つの質点間の距離ℓは

$$\ell = \sqrt{5 - 4\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

である。
ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\phi}_1^2 + 4\dot{\phi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos(\phi_1 - \phi_2)} - \ell_0\right)^2$$

正準運動方程式の例: もう少し面白い例

正準運動量

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi_1} = m\dot\phi_1 \quad (\dot\phi_1 = p_1/m)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi_2} = 4m\dot\phi_2 \quad (\dot\phi_1 = p_1/4m)$$

ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot\phi_1 + p_2\dot\phi_2 - L \\ &= p_1 \cdot \frac{p_1}{m} + p_2 \cdot \frac{p_2}{4m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_1^2}{m^2} + 4\cdot\frac{p_2^2}{16m^2}\right) \\ &\quad -\frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)} - \ell_0\right)^2 \\ &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} + \frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)} - \ell_0\right)^2 \end{aligned}$$

正準運動方程式の例: もう少し面白い例

正準運動方程式

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_1}{4m}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \phi_1} = 2k\Lambda \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi_2} = -2k\Lambda \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

ここで $\Lambda = 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{5-4\cos(\phi_1-\phi_2)}}$ あとはこの微分方程式系を数値的に積分すれば良い。

まとめ

- ハミルトンの運動方程式（正準運動方程式）
- qとpの関数
- ハミルトニアンHがわかれば運動がわかる

次回（1/13）休講。
定期試験は2/10。