解析力学B
第10回: 正準変換

神戸大: 陰山 聡

今日の講義ノート: URL:

2011.01.20

復習

ハミルトンの運動方程式(正準運動方程式)

ラグランジアン$L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N) = L(q, \dot{q})$ q_iに共役な運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

ハミルトニアン

$$H(q,p) = p_j \dot{q}_j(q,p) - L(q, \dot{q}(q,p)) \quad \text{(ルジャンドル変換)}$$

$$H(q,p) = p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$$

q_j: 一般化座標　p_j: 一般化運動量
$(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N)$が張る空間: 位相空間（相空間）

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

⇒ これを正準方程式、(q,p)を正準変数という。

ハミルトンの運動方程式(正準方程式)

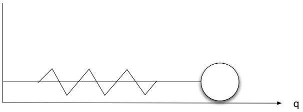
ハミルトニアン$H(q,p)$がわかれば、運動がわかる。
ハミルトンの運動方程式(正準方程式)。

$$\begin{cases} \dot{q}_i & = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i & = & -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

時間に関する一階の微分方程式。

(ラグランジュの運動方程式は、時間に関する二階の微分方程式)

ハミルトニアンの例



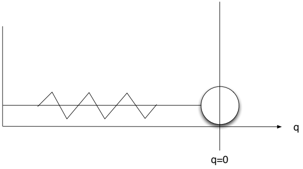
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2$$

$$(p = m\dot{q})$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -k(q - \ell_0) \end{cases}$$

ハミルトニアンの例

座標qのとりかたを工夫すると、少しだけ簡単になる。（ハミルトニアンをもっと劇的に簡単にする方法は、あとで。）



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

$$(p = m\dot{q})$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -k\,q \end{cases}$$

ハミルトニアン

ハミルトニアンとエネルギー

ポテンシャルが、速度に依存しないとき

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - (\text{ポテンシャル})$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$H = p\dot{q} - L = p\frac{p}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + (\text{ポテンシャル})$$

$$H = (\text{運動エネルギー}) + (\text{ポテンシャル}) = (\text{全エネルギー})$$

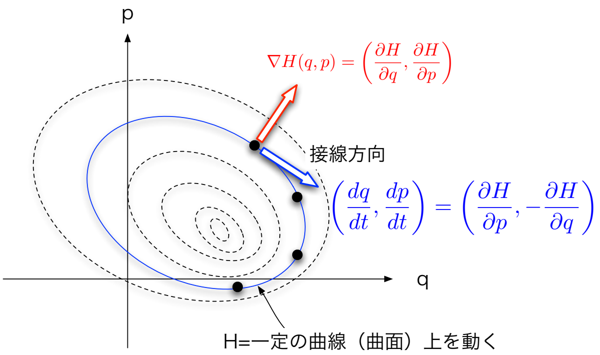
ただし、これは関数の形として等しいという意味である。ハミルトニアン（qとpの関数）と、ジュール単位で測るスカラー値としての系のエネルギーは別物。

正準方程式のイメージ

ハミルトニアン $H(q,p)$ ・・・2N次元位相空間(q,p)の場。

位相空間中の点 (q_0, p_o) ・・・系の状態。

正準方程式 ・・・ 位相空間中の点(状態)の動き方を定める。

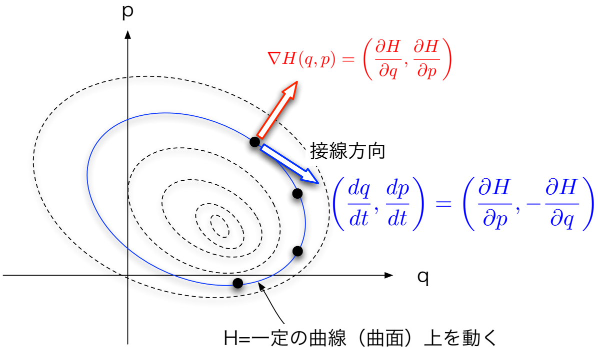


$H(q,p)$の勾配 (gradient)　∇Hとは直角方向に動く。

正準方程式の形からすぐにわかること 1

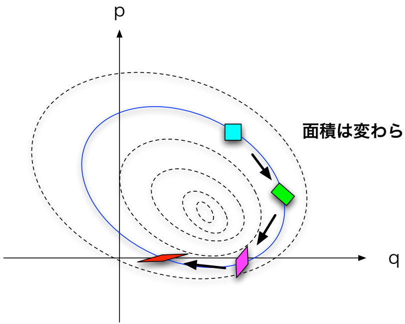
正準方程式 ･･･ 位相空間中の点(状態)の動き方を定める。

Hの値は、変わらない。 ⇒ エネルギー保存則



正準方程式の形からすぐにわかること 2

位相空間中に点がぎっしり無数に分布している様子を思い浮かべよう。・・・まるで水の分子のように。この「水」は流れは非圧縮。　⇒ リウヴィルの定理という。



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_q}{\partial q} + \frac{\partial u_p}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0$$

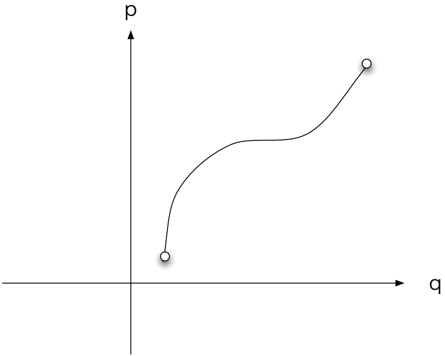
正準形式の変分原理

変分問題

位相空間(q, p)中の極値問題を考える:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \{p\dot{q} - H(q, p, t)\}\, dt = 0$$

端点条件　$q(t_a) = q_a,\ q(t_b) = q_b$



正準形式の変分原理

これは(もうおなじみの)普通の変分問題である。オイラーの方程式を使って、微分方程式に書き換えることができる。

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \{p\dot{q} - H(q,p,t)\}\, dt = \delta \int_{t_a}^{t_b} U(q,p,\dot{q},\dot{p})\, dt = 0$$

$$U(q,p,\dot{q},\dot{p}) = p\dot{q} - H(q,p)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial U}{\partial p} = 0$$

正準形式の変分原理

$U(q,p,\dot{q},\dot{p}) = p\dot{q} - H(q,p)$ なので、単純な計算から、

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{p}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = p$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

これらをオイラー方程式に代入すると、最終的に、

$$\begin{cases} \dot{q} & = & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

つまり正準運動方程式を得る。

多自由度の場合

$2N$次元空間中の変分問題を考える:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \{p_k \dot{q}_k - H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N)\}\, dt = 0$$

簡単に書くと、

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \{p_k \dot{q}_k - H(q, p)\}\, dt = 0$$

端点条件は $q(t_a) = q_a$, $q(t_b) = q_b$とする。オイラー方程式から、正準運動方程式を得る。

$$\begin{cases} \dot{q}_k &= \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

(正準運動方程式は、$2N$次元空間中の変分原理の帰結)

ラグランジュ力学でのハミルトンの原理との違い

ラグランジュ力学で考えた時、ハミルトンの原理

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} L(q_1, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N)\, dt = 0$$

は、N次元空間中の変分原理だった。

いま考えたのは、$2N$次元空間(位相空間)中の変分原理である:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \{p_k \dot{q}_k - H(q, p)\}\, dt = 0$$