注意： 裏ページもあり

解析力学B(平成22年度後期) 定期試験 (2011.02.10)

神戸大学システム情報学研究科(工学部) 陰山 聡

【ヒント】

変分(極値)問題とオイラーの方程式:

端点条件$x(t_0)$, $x(t_1)$=固定で、 $\delta\int_{t_0}^{t_1} S(x,\dot{x})\,dt = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial S}{\partial x} = 0$

ラグランジアン:

$L(q,\dot{q}) = L(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n) =$ (運動エネルギー) $-$ (ポテンシャル)

ハミルトンの原理:

端点条件 $q_i(t_0)$, $q_i(t_1)$=固定の下、運動は$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$ という変分原理で定まる。

ハミルトニアン:

$H(q,p) =$ (運動エネルギー) $+$ (ポテンシャル)　(q_iと共役な)正準運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

ハミルトンの運動方程式:

ハミルトニアン$H(q,p) = H(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots p_n)$ に対して、$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

質点のポテンシャル:

一様重力 $\Rightarrow$ 質量 $\times$ 重力定数 $\times$ 高さ　バネ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ $\times$ バネ定数 $\times$ (自然長からの変位)^2

【問題1】

質量1の質点の2次元極座標 (r,ϕ)での ラグランジアン$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{r}$ を考える。

(a) 次の4項を計算せよ。

$\frac{\partial L}{\partial r}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$, $\frac{\partial L}{\partial \phi}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$.

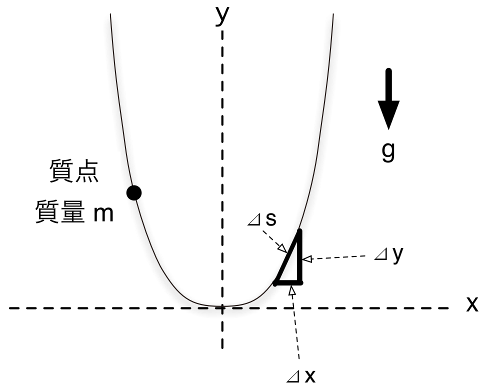
(b) ラグランジュの運動方程式のr成分を $\frac{d}{dt}\left(\boxed{???}\right) + \boxed{???} = 0$

の形で書け。

(c) $\ell \equiv r^2\,\dot{\phi}$は$\phi$方向の角運動量に対応する。 この$\ell$が保存する(時間的に一定である) ことを示せ。

【問題2】

水平方向にx座標、鉛直上向きにy座標をとり、$-y$方向の一様重力(重力定数g) の下、 放物線 $y = x^2/2$ 上に拘束された質点の運動を考える。質点の質量mは1とする。



(a) 質点がこの放物線上を微小時間Δtの間に、微小な距離Δsだけ移動した。 x方向の微小な変位Δxと、y方向の微小な変位Δyを使い、 ΔsをΔxとΔyで書け。

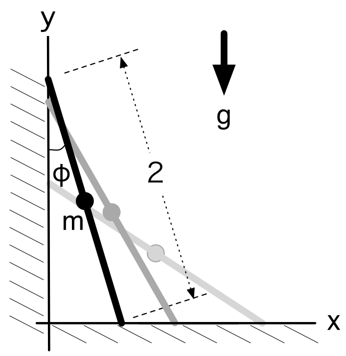
(b) 質点がこの放物線上を滑る速さds/dtを、$\dot{x}(= dx/dt)$とxを使って書け。

(c) この系のラグランジアン$L(x,\dot{x})$を書け。

(d) $x(t)$に対するラグランジュの運動方程式を $\frac{d}{dt}\left(\boxed{???}\right) + \boxed{???} = 0$ の形で書け。

【問題3】

長さ2の重さのない棒の中心に固着した質量mの質点がある。 鉛直下方の一様重力(重力定数g) の下、 この棒を壁に(斜めに) 立て掛けた。 床面に沿ってx軸、壁面に沿ってy軸をとる。 棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないように(摩擦なしで) 滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。 棒と壁のなす角度ϕを座標とし、$\phi(t)$に対する運動方程式を立てる。



(a) 質点mの位置、つまり棒の中心点のx座標とy座標をϕの関数として書け。

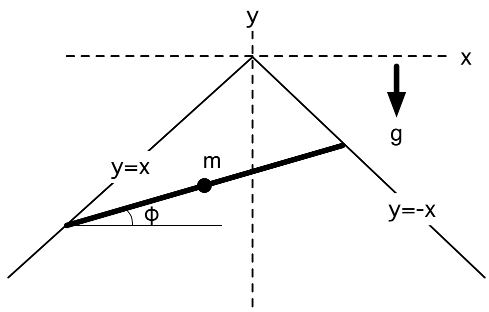
(b) xとyの時間変化$\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$をϕと$\dot{\phi}$で書け。

(c) この系のラグランジアン $L(\phi, \dot{\phi})$を書け。【ヒント：棒には重さがないので、この系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、 質点mだけが持っている。】

(d) ラグランジュの運動方程式を $\frac{d}{dt}\left(\boxed{???}\right) + \boxed{???} = 0$ の形で書け。

【問題4】

上の問題と同じく、中心に質量mの質点が付いた長さ2の重さの無い棒の運動を考える。 今度は棒の両端が、二つの直線(左端は$y = x$、右端は$y = -x$の直線) に拘束され、 この直線上を摩擦なしでなめらかに滑るとする。 重力は$-y$方向、重力定数をgとする。 棒がx軸となす角をϕとする。



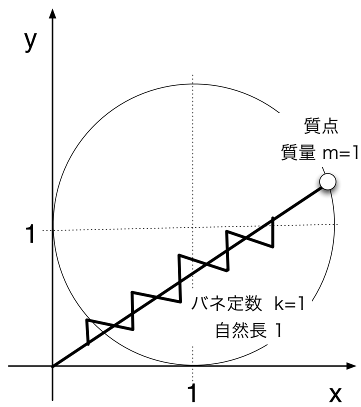
(a) ϕと共役な正準運動量pを求めよ。

(b) この系のハミルトニアン$H(\phi, p)$を書け。

(c) ハミルトンの運動方程式を書け。

【問題5】

中心位置の座標が$(x, y) = (1, 1)$、半径が1の円周上に拘束された質点(質量$m = 1$) の運動を考える。 原点$(x, y) = (0, 0)$と、 この質点が重さの無いバネ(バネ定数$k = 1$、自然長1) でつながれている。 この質点の運動を解くための運動方程式を導く。 座標の取り方は任意だが、できるだけ簡単な運動方程式を導くよう工夫し、 どう座標をとったか明記すること。



(a) この系のラグランジアンを書け。

(b) ラグランジュの運動方程式を書け。

(c) この系のハミルトニアンを書け。

(d) ハミルトンの運動方程式を書け。