解析力学B（平成22年度後期） 定期試験 解答例

神戸大学 陰山 聡

2011.02.12

問題 1

1-a

$$\frac{\partial L}{\partial r} = r\dot{\phi}^2 + \frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2\dot{\phi}$$

1-b

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) - r^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{r^2} = 0$$

1-c

ラグランジュの運動方程式の ϕ 成分

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

より、

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0$$

従って $\ell = r^2\dot{\phi}$ は保存する。

問題 2

2-a

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

2-b

$$\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

と、

$$\frac{dy}{dx} = x$$

より、

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + x^2}\,\dot{x}$$

2-c

$$L = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)\dot{x}^2 - \frac{g}{2}x^2$$

2-d

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(1 + x^2\right)\dot{x}$$

と

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x\dot{x}^2 - gx$$

から、ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left\{\dot{x}\left(1 + x^2\right)\right\} - x\dot{x}^2 + gx = 0.$$

問題 3

3-a

$$x = \sin\phi, \quad y = \cos\phi.$$

3-b

$$\dot{x} = \cos\phi\,\dot{\phi}, \quad \dot{y} = -\sin\phi\,\dot{\phi}$$

3-c

$$L = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi$$

3-d

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\phi}\right) - mg\sin\phi = 0$$

あるいは

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\right) - g\sin\phi = 0$$

ももちろん OK.

問題 4

4-a

質点 m は原点を中心とする半径 1 の円上にある。質点の座標 $(x, y) = (-\sin\phi, -\cos\phi)$、その速度 $(\dot{x}, \dot{y}) = (-\cos\phi\,\dot{\phi}, \sin\phi\,\dot{\phi})$ より、ラグランジアン L は、$L = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi$. 従って ϕ に共役な正準運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}$ は、

$$p = m\dot{\phi}$$

4-b

$$H = \frac{p^2}{2m} - mg\cos\phi$$

4-c

$$\dot{\phi} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -mg\sin\phi$$

問題 5

円の中心 $(1, 1)$ と質点を結んだ線が x 軸となす角を ϕ し、これを正準座標とする。質点の位置 (x, y) は

$$x = 1 + \cos\phi, \quad y = 1 + \sin\phi,$$

速度は

$$\dot{x} = -\sin\phi\,\dot{\phi}, \quad \dot{y} = \cos\phi\,\dot{\phi},$$

と書けるから、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2.$$

バネの長さは、$\sqrt{x^2+y^2}$ だから、ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{x^2+y^2}-1\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(1+\cos\phi)^2+(1+\sin\phi)^2}-1\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}-1\right)^2 \end{aligned}$$

5-a

$$L = K - U = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}-1\right)^2$$

5-b

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

に代入し整理すると、

$$\ddot{\phi} = \left(\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}-1\right)\frac{\sin\phi-\cos\phi}{\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}}$$

5-c

ϕ に共役な運動量を $p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$ として、

$$H = K + U = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}-1\right)^2$$

5-d

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p, \\ \dot{p} &= \left(\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}-1\right)\frac{\sin\phi-\cos\phi}{\sqrt{3+2\cos\phi+2\sin\phi}} \end{aligned}$$