解析力学B

第01回

神戸大: 陰山 聡

工学部 情報知能工学科 ／ システム情報学研究科 計算科学専攻

2011.10.06

ベクトル

- カーテシアン座標 (x, y, z)。座標軸の図。
- ベクトル：(A_x, A_y, A_z)（縦に書くことも）
- これを $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と書く。
- ベクトルの表記（太字。手書きの場合の表記。）$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \cdots$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots$

- $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
- これを $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ と書くことがある。(つまり$A_x = A_1$, $\cdots$)
- あるいは $A_j \quad (j = 1, 2, 3)$

- ベクトルの足し算
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
- 【列ベクトルの表現, x,y,z】
- 【列ベクトルの表現, 1,2,3】
- これを$c_j = a_j + b_j \quad (j = 1, 2, 3)$ とかく。
- これを$c_i = a_i + b_i \quad (i = 1, 2, 3)$ とかいても同じこと。
- $m\,\mathbf{a}$の意味。

微分

- 質点(チョーク)の投げ上げ。図(縦のz軸)
- 軌道(t-zグラフ)。軌跡。時間tの関数としての$z(t)$
- $z = x_3$としてもよい。

$$\begin{aligned}
\frac{dz(t)}{dt} &= \frac{dz}{dt} && (1)\\
&= z'(t) && (2)\\
&= z' && (3)\\
&= \dot{z}(t) && (4)\\
&= \dot{z} && (5)
\end{aligned}$$

- 2階微分 $\frac{d^2z}{dt^2} = z'' = \ddot{z}$

- 【図】3次元。下向き重力。斜め(v_x, v_yあり)の軌道
- 時間の関数としての位置ベクトル $x_j(t) \quad j = 1, 2, 3$
- 位置$\mathbf{x}(t)$を時間で微分 → 速度 $\mathbf{v}(t)$
- 速度 <u>V</u>elocity
- $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$
- $v_j = \frac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j = x'_j \quad (j = 1, 2, 3)$

ニュートンの運動方程式

- 力 = 質量 x 加速度 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
- 力 Force, 加速度 acceleration
- $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$
- $= \ddot{\mathbf{x}}$

- 1次元真上への投げ上げ
- 重力 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (0, 0, -m\,g)$【これもニュートン】
- ニュートンの運動方程式(z成分)

$$-m\,g = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

この方程式(微分方程式)を解けば運動がわかる。(軌跡が求まる。)

- 運動方程式を解く。二つに分ける。
- 初期条件: $t = 0$で$z = 0$ (m), $v_z = 1$ (m/s).
- $\frac{dz}{dt} = v_z$
- $\frac{dv_z}{dt} = -m\,g$
- 【小演習】
- 解: $z(t) = t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$

ニュートン力学の復習

- 線形バネ【図】自然長ℓ_0 バネ定数k
- 伸びに比例してかかる(戻ろうとする)力
- $F = -k\,(x - \ell_0)$
- 【線形バネの図】壁//|---O --> x
- 運動方程式 $-k\,(x - \ell_0) = m\,x''$
- 質点の運動 $x(t)$。
- 初期条件(例えば):$x(t=0) = \ell_0,\quad x'(t=0) = 1$
- 【小演習】
- 解: $x(t) = \ell_0 + \sin\,(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$

- ニュートンの運動方程式は位置$\mathbf{x}$に関する2階の微分方程式
- 微分方程式を解けば解(軌道)がわかる。

すぐに解ける微分方程式

(1) $\frac{df}{dt} = t^2, \quad f(0) = 2$

(2) $\frac{df}{dt} = -\sin t, \quad f(0) = 1$

(3) $\frac{df}{dt} = 2f, \quad f(0) = 1$

(4) $\frac{df}{dt} = f \times \cos t \quad f(0) = 1$

解くのが少し大変な微分方程式

$f = f(t)$, $f' = \frac{df}{dt}$ として、

$$f = t\,f' + \left(f'\right)^2$$

$$(1+f')^2 - \left(4 + 2\frac{f}{t}\right)(1+f') + \frac{f^2}{t^2} = 0$$

Ref: 木村俊房「常微分方程式の解法」培風館 p.46, p49

解くのが(たぶん) とても難しい微分方程式

$$\frac{df}{dt} = \cos\left(\pi\left(\cos\left(\pi t\right)\right)\right)$$

$$\frac{df}{dt} = t^2 + f^2$$

心配無用

我々には計算機がある。

- $f' = \cos(\pi(\cos(\pi t)))$の例。
- 微分方程式の解を数値的に求める(積分する)
- 数値積分法(4次精度Runge-Kutta法)
- 参考書:『理工学のための数値計算法 第2版』水島・柳瀬著 数理工学社
- C++ プログラム: src/111006_integration.cpp
- 【実演】

- ニュートンの運動方程式
- 解析的に(紙とペンで)解けない微分方程式になっても心配ない。数値的に解けばよい。
- 真の問題点: そもそも運動方程式を作るのが大変な場合がある。
- 放物線$y=x^2+1$に拘束された質点。一方が原点につながれたバネ。【図】
- 質量m。ばね定数k。自然長1。初期条件:位置が$(x,y)=(1,2)$。速度はなし。
- 演習。ニュートンの運動方程式を立てよ。周りの人と相談しても良い。

- ベクトル、微分の表記法
- ニュートン力学の復習 $\mathbf{F} = m\,\ddot{\mathbf{x}}$
- $\mathbf{F}$によっては複雑な運動方程式になる。
- 解析的に解けなくても数値的に解けばよい。計算機シミュレーション。計算科学。
- だが、運動方程式をたてることが難しい場合がある。座標。拘束条件。
- 解析力学の必要性。運動方程式を簡単に作ることができる。