解析力学B

第02回

神戸大: 陰山 聡

工学部 情報知能工学科 ／ システム情報学研究科 計算科学専攻

2011.10.13

- 数学的準備
- ポテンシャル
- 今日のまとめ
- レポート課題

ベクトルの内積

【二つのベクトルの図】

内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{3} a_j\,b_j \left(= \sum_{i=1}^{3} a_i\,b_i\right) && (2)\\
&= a_j\,b_j && (3)\\
&= a_i\,b_i && (4)
\end{aligned}
$$

繰り返される添え字は和をとる(今の場合は1から3まで)
アインシュタインの規約 (Einstein's convention)

例

質点m
速度$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$
運動エネルギー$K = \frac{m}{2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{3} v_j\, v_j$

$$K = \frac{m}{2} v_j\, v_j$$

例2

$$a_i\,b_i\,c_j = \sum_{i=1}^{3} a_i\,b_i\,c_j = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_j$$

【演習】

$$a_i\,b_j\,c_j\,d_k = \sum_{j=1}^{3} a_i\,b_j\,c_j\,d_k = a_i\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,d_k$$

$$a_\ell\,b_m\,c_\ell\,d_m = \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_\ell\,b_m\,c_\ell\,d_m = \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_\ell\,c_\ell\,b_m\,d_m = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$$

例3

位置座標$\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$
【図】x–y–zでラベル付けされたカーテシアン座標

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_j\,x_j} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j\,x_j} && (5)\\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} && (6)\\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && (7)\\
&= r \quad \text{（原点からの距離）} && (8)
\end{aligned}
$$

例4

【演習】
位置座標$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
原点からの距離r

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= ?? && (9) \\ &= \frac{1}{x_j \, x_j} && (10) \end{aligned}$$

場と偏微分

【電場、磁場、温度場、ポテンシャル場、・・・】
空間の関数$f(x,y,z)$　スカラー場　【室内の温度、圧力等】
$\rightarrow f(x_1,x_2,x_3)$
偏微分

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \tag{12}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \tag{13}$$

偏微分

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

偏微分

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$$

偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

を

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f$$

と書くこともある。【演算子】

例

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2 + (x_3)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2\,x_3 + x_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \quad (15)$$

【演習】$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \quad (16)$$

合成関数の微分

pが(x_1, x_2, x_3)の関数　【室内の圧力分布】
pの関数$f(p)$を考える　【風船の半径】
$f = f(p(x_1, x_2, x_3))$　合成関数
合成関数の微分

$$\frac{\partial f(p(x_1,x_2,x_3))}{\partial x_1} = \frac{df(p)}{dp}\frac{\partial p(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}$$

合成関数の微分2

$$p_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$p_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$p_3(x_1, x_2, x_3)$$
$$f = f(p_1, p_2, p_3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(p_1, p_2, p_3)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1} \frac{\partial p_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} && (17) \\
&\quad + \frac{\partial f(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_2} \frac{\partial p_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} && (18) \\
&\quad + \frac{\partial f(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_3} \frac{\partial p_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} && (19) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{x_1} = \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{x_1} && (20)
\end{aligned}$$

合成関数の微分3

$$p_i = p_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$f = f(p_1, p_2, p_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

テーラー展開

【図】

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}\frac{d}{dx}f(x) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

2次元関数のテーラー展開

【図】
$f(x_1, x_2)$

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n f(x_1, x_2)$$

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^n f(x_1, x_2)$$

3次元関数のテーラー展開

【演習】

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) =?$$

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^n f(x_1, x$$

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{x})$$

ベクトル解析の復習

スカラー場 $f(x_1, x_2, x_3)$の勾配(gradient) 【読み方】

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

例: $f(x_1, x_2, x_3) = r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$ 【原点からの距離の2乗】

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

$$f \longrightarrow \nabla f$$

スカラー $\longrightarrow$ ベクトル

【2次元の図】等高線、山登り、意味:山の「上方向」(山頂の方向に非ず)。矢印は等高線に垂直。
【3次元の場合】等値面、部屋の中の気圧分布の例。面に垂直なベクトル

例2

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 【等値面のイメージ】
$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (?, ?, ?)$【演習】

ポテンシャル

力のベクトル$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$
スカラー場$\phi(x_1, x_2, x_3)$

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = -\nabla\phi(x_1, x_2, x_3)$$

と書けるとき、$\mathbf{F}$は保存力、ϕをポテンシャル(エネルギー)という。
上の式は

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial\phi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

とも書ける。

例

重力

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -mg)$$

【図】カーテシアン座標。質点。下向き重力

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

【このポテンシャルのイメージ】平面。層。上に増大。下に向かって垂直なベクトル。

線形バネ

自然長ℓ_0、ばね定数k

【図】1次元線形バネの図

力は

$$F(x) = -k\left(x - \ell_0\right)$$

ではポテンシャルは？

$$F(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$-k\left(x - \ell_0\right) = -\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = k\left(x - \ell_0\right)$$

を解けばよい。

【演習】$\phi(x)$を求めよ。

万有引力

太陽の質量をM、地球の質量をm、地球にはたらく太陽の重力
$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$
【図】カーテシアン

$$|\mathbf{F}| = \frac{GMm}{r^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

逆自乗力(万有引力)
ベクトル$\mathbf{F}$の向きを$\mathbf{e}$(長さ1のベクトル)とすると、

$$\mathbf{e} = \left(-\frac{x_1}{r}, -\frac{x_2}{r}, -\frac{x_3}{r}\right)$$

【確認(向きは図から明らか)】

$$|\mathbf{e}| = e_j e_j = (-x_j/r)(-x_j/r) = \frac{x_j x_j}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

つまり

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = -GMm\left(\frac{x_1}{r^3}, \frac{x_2}{r^3}, \frac{x_3}{r^3}\right)$$

あるいは簡単に

$$F_i = -GMm\frac{x_i}{r^3}$$

まとめ

- ベクトル v_j
- アインシュタインの規約 $a_j b_j$
- 合成関数の微分 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(p_1, p_2, p_3) = \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$
- スカラー関数の勾配 $\nabla \phi$
- 力とポテンシャル $\mathbf{F} = -\nabla \phi, \quad F_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$