解析力学B

第03回

神戸大: 陰山 聡

工学部 情報知能工学科 ／ システム情報学研究科 計算科学専攻

2011.10.20

- 先週のレポートについてのコメント
- ラグランジュの運動方程式
- ニュートン力学 vs ラグランジュ力学

- 提出者(44名)全員にコメントをつけて返信した。
- 1名pdf形式以外(psd)で送ってきた人がいたので、再送するように。
- メールタイトルの日付は「レポート課題を出した日」(提出締め切り日に非ず)。
- A4の紙をスキャンして添付する時は縦置き(縦長の長方形)になるようにしてください。

偏微分

成分(添え字)毎に場合分けして計算する必要はない。

$$r^2 = x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 = x_jx_j = x_ix_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r^2 = 2x_i$$

合成関数の微分法

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r^2 = \frac{d}{dr}\left(r^2\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} = 2r\frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r^n = \frac{d}{dr}\left(r^n\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = nr^{n-2}x_i$$

$$\left(\text{最後に } \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \text{ を使った。}\right)$$

重力場のポテンシャル

万有引力(逆自乗力) 【ポテンシャルの図。原点に引き込まれる。】

$$F_i = -GMm\frac{x_i}{r^3}$$

ポテンシャルの定義:

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\phi$$

$$\phi = -GMm\frac{1}{r}$$

が正解。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}r^n = nr^{n-2}\frac{x_i}{r}$$

の$n = -1$の場合である。

惑星の軌道

太陽の質量をM。惑星の質量をm。($M \gg m$) 惑星の位置を$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$とする。 【座標の図。**F**と位置座標(x_1, x_2, x_3)】
ニュートンの運動方程式
(質量)x (加速度ベクトル) = (力ベクトル)

$$m\frac{d^2x_i(t)}{dt^2} = -GMm\frac{x_i(t)}{r(t)^3}$$

$$\frac{d^2x_i(t)}{dt^2} = -GM\frac{x_i(t)}{r(t)^3}$$

この微分方程式を解けばいい。→ 楕円軌道の解。ケプラーの法則。

座標系

この方程式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -GM\frac{x_i}{r^3}$$

は結構複雑。なぜなら

$$r = \sqrt{x_j\, x_j} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3}$$

例えばx_1座標に対する式に、その他(x_2とx_3)の座標が入り交じっている。

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -GM\frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3}}$$

座標の取り方を工夫して、もっと単純な(解きやすい)運動方程式が作れないか? → ラグランジュの運動方程式

ラグランジアン

唐突に感じるであろうが、以下の「関数」を定義し、これをラグランジアンLと呼ぶ。

$$\text{ラグランジアン} = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$$

$$L = K - U$$

L: ラグランジアン
K: 運動エネルギー
U: ポテンシャル

例 1

質量mの質点の投げ上げ　【図】z座標(上方)
運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

ポテンシャル

$$U = mgz$$

従って、この系のラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

例2

線形バネ(自然長ℓ_0, バネ定数k)の振動　【図】右方向x軸
運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

ポテンシャル

$$U = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

従って、この系のラグランジアンLは

$$L(x, \dot{x}) = 【演習】= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

例3

万有引力(逆自乗力)の運動　【図】3次元(x_1, x_2, x_3)座標
運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j$$

ポテンシャル

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}$$

従って、この系のラグランジアンLは

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 【演習】 = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j + \frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}$$

ラグランジュの運動方程式(1次元)

ラグランジアン$L(x, \dot{x})$に対して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

ラグランジュの運動方程式(3次元)

ラグランジアン$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$に対して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

--- これはもちろん下の3行の式と同じ意味。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0$$

例1:質点の投げ上げ

質量mの質点の投げ上げ。ラグランジアンLは

$$L(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

ラグランジュの運動方程式(1)は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

まず式(1)左辺の$\frac{d}{dt}$のかかっている括弧の中を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}L(z,\dot{z}) = m\dot{z}$$

これの$\frac{d}{dt}$は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$$

例1：質点の投げ上げ

次に(1)式の左辺第二項を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} - mgz = -mg$$

式(1)に代入すると、この系におけるラグランジュの運動方程式を得る：

$$m\ddot{z} + mg = 0$$

-- ちなみに、このラグランジュの運動方程式を変形すると

$$m\ddot{z} = -mg$$

となる。これはニュートンの運動方程式

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

に他ならない。

例2：バネ振動

線形バネ(自然長ℓ_0, バネ定数k)のラグランジアンLは

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x-\ell_0)^2$$

ラグランジュの運動方程式(1)は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

まず式(1)の左辺の$\frac{d}{dt}$のかかっている括弧の中を計算する。【演習】

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x,\dot{x}) = m\dot{x}$$

これの$\frac{d}{dt}$は【演習】

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

例2：バネ振動

次に式(1)の左辺第二項を計算する。【演習】

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{k}{2}(x-\ell_0)^2\right) = -k(x-\ell_0)$$

式(1)に代入すると、この系のラグランジュの運動方程式を得る：

$$m\ddot{x} - (-k(x-\ell_0)) = 0$$

-- ちなみに、この式を変形すると

$$m\ddot{x} = -k(x-\ell_0)$$

となる。これはまたしてもこれはニュートンの運動方程式と同じである。

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

例3：万有引力

万有引力（逆自乗力）の下での質点の運動。この系のラグランジアンLは

$$L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)=\frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j+\frac{GMm}{\sqrt{x_jx_j}}$$

ラグランジュの運動方程式(2)は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \quad (\text{for } i=1,2,3)$$

まず式(2)の左辺の$\frac{d}{dt}$のかかっている括弧の中を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}_j\dot{x}_j)\right)=\frac{m}{2}(2\dot{x}_i)=m\dot{x}_i \quad 【演習】$$

（今日冒頭で復習したことを思い出すこと。）

これの$\frac{d}{dt}$を計算すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_i\right) = m\ddot{x}_i$$

次に式(2)の左辺第二項を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{GMm}{\sqrt{x_j x_j}}\right) = GMm\frac{\partial}{\partial x_i}\left(r^{-1}\right) = -GMm\frac{x_i}{r^3}$$

すると、式(2)に代入して、この系のラグランジュの運動方程式を次の形で得る:

$$m\ddot{x}_i - \left(-GMm\frac{x_i}{r^3}\right) = 0$$

–– ちなみにこれを変形すると、また

$$m\ddot{x}_i = -GMm\frac{x_i}{r^3}$$

これは先週復習したニュートンの運動方程式そのものである。