解析力学B

第04回

神戸大 システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

この講義のウェブページ: URL: http://tinyurl.com/kageyama2011

2011.10.27

- 連絡
- 先週の復習(ラグランジュの運動方程式)
- 座標系
- 運動方程式の数値解
- ニュートン v.s. ラグランジュ
- レポート課題

- 来週12月3日は文化の日
- その次の週12月10日は休講
- 先々週のレポート:T君？

ラグランジアン L ＝(運動エネルギー K)−(ポテンシャル U)
1次元運動:

$$L = L(s, \dot{s})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

3次元運動:

$$L = L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3)$$

バネ振動

質点 m　ばね定数 k　自然長 ℓ_0　【図】
運動エネルギー $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2$
ポテンシャル $U = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$
ラグランジアン

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

左辺の$\frac{d}{dt}$のかかっている括弧の中を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}) = m\dot{x}$$

これの$\frac{d}{dt}$は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) = m\ddot{x}$$

次にの左辺第二項を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{k}{2}(x-\ell_0)^2\right) = -k(x-\ell_0)$$

結局、この系のラグランジュの運動方程式は、

$$m\ddot{x} - (-k(x-\ell_0)) = 0$$

つまり

$$m\ddot{x} + k(x-\ell_0) = 0$$

あるいは

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x-\ell_0)$$

微分方程式

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - \ell_0)$$

を解くには、

$$s = x - \ell_0$$

を定義する。明らかに

$$\dot{s} = \dot{x}, \qquad \ddot{s} = \ddot{x}$$

すると

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s$$

答えは

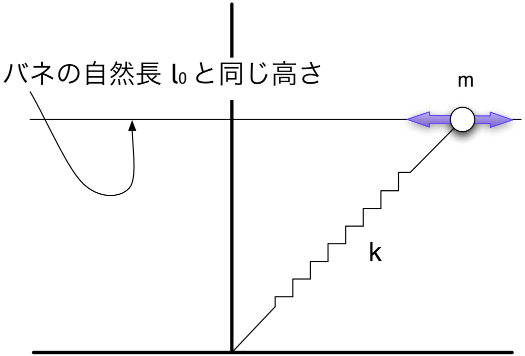
$$s(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2\right) \quad c_1, c_2 \text{は積分定数}$$

ラグランジュ力学の特徴は座標系を自由にとれること。
バネ振動の問題にもどる。【図】
はじめから$s = x - \ell_0$（つまりバネの伸び）を座標にとれば簡単だった。
運動エネルギー $K = \frac{m}{2}\dot{s}^2$
ポテンシャル $U = \frac{k}{2}s^2$
ラグランジアン $L(s, \dot{s}) = K - U = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{k}{2}s^2$
ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

からsに対する方程式を作ってみよう【演習】

例1：直線上に拘束されたバネ・質点系の振動



運動エネルギー $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2$
バネ全体の長さ$\ell = \sqrt{x^2 + \ell_0^2}$
ポテンシャル $U = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2 + 2\ell_0^2 - 2\ell_0\sqrt{x^2 + \ell_0^2}\right)$
ラグランジアン
$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(x^2 + 2\ell_0^2 - 2\ell_0\sqrt{x^2 + \ell_0^2}\right)$
【演習】ラグランジュの運動方程式をつくれ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx + \frac{k\ell_0 x}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}}$$

ラグランジュの運動方程式は、

$$m\ddot{x} + kx - \frac{k\ell_0 x}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}} = 0$$

$k/m \equiv \omega^2$ (定数) として、

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}}\right)$$

これは簡単には解けそうにないので、計算機 (数値積分) を使う。
$v = \dot{x}$ という変数 (速度) を定義すれば、連立 (1階) 常微分方程式系を得る:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}}\right) \end{aligned}$$

これを解くC++プログラム: `one_ball_in_horizontal_line.cpp`
(OpenGLによる可視化機能つき)

one_ball_in_horizontal_line.cpp

コンパイル方法:コメントの最初にある。

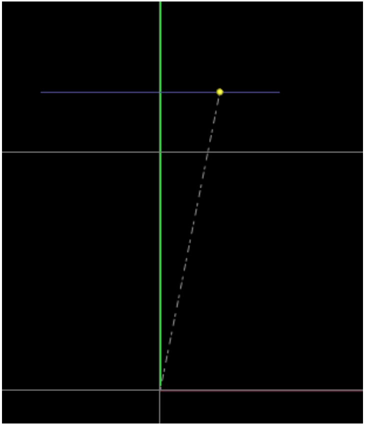
g++ -Rb -lm one_ball_in_line.cpp -framework GLUT -framework OpenGL -framework Foundation

実行方法:　./a.out

ソースコードは本講義のウェブページに載せる。

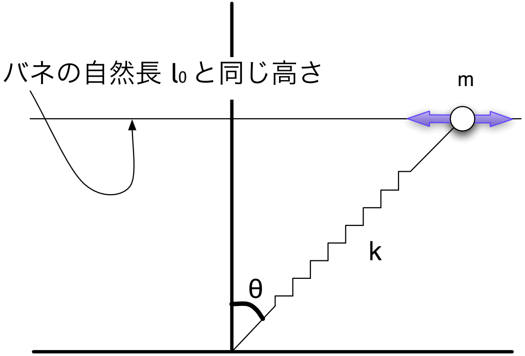
演習室のMacで動くはず。

直線上に拘束されたバネ・質点系のシミュレーション



別の座標

ラグランジアン $L = K - U$ はどんな座標系で作っても良い。



角度θを座標にとる。

$$x = \ell_0 \tan\theta$$

$$\ell = \frac{\ell_0}{\cos\theta}$$

だから運動エネルギーKとポテンシャルLは　【演習】

$$\dot{x} = \frac{\ell_0 \dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

より

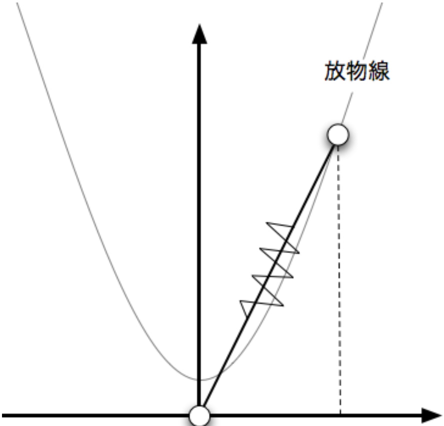
$$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m\ell_0^2}{2}\frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta}$$

$$U = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 = \frac{k\ell_0^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m\ell_0^2}{2}\frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta} - \frac{k\ell_0^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2 \tag{1}$$

例2：放物線$y = x^2 + 1$に拘束された質点の運動

バネ定数 k、質点の質量 m、バネ自然長 l_0。（重力は無視。）
バネの一端は 原点 $(0, 0, 0)$ に固定
質点の座標 (x)



ラグランジアン

$$L(x,\dot{x}) = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})$$

$$\text{ポテンシャルエネルギー}\quad U = \frac{k}{2}(s-l_0)^2$$

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(x^2+1)^2} = \sqrt{x^4+3x^2+1}$$

$y = x^2 + 1$ より

$$\text{運動エネルギー}\quad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}(1+4\,x^2)\,\dot{x}^2$$

ここで $y = x^2 + 1$ より

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

を使った。

ラグランジアン

結局ラグランジアンは

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}(1+4\,x^2)\,\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(s(x)-l_0)^2$$

$$s(x) = \sqrt{x^4+3x^2+1}$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

に代入する。 【演習】

ヒント:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(s - l_0)^2 = (s - l_0)\frac{ds}{dx},$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x^3 + 3x}{s}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{1+4x^2}\left\{4xv^2 + \frac{k}{m}\frac{s-l_0}{s}(2x^3+3x)\right\} \end{aligned}$$

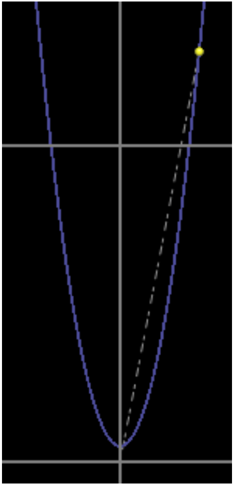
one_ball_on_parabola.cpp

これもウェブページに載せる。

主要部分:

```
double x = pos[0];
double xsq = x*x;
double v = pos[1];
double s, osq = K/M;
s = sqrt(xsq*xsq+3*xsq+1.0);
dpos[0] = ( v ) * dt;
dpos[1] = ( -(1.0/(1+4*xsq)*(4*x*vsq + osq*(s-L0)/s*(2*xsq*x
+3*x))) ) * dt;
```

放物線$y = x^2 + 1$に拘束された質点の運動



ニュートン力学

1. 力の式を求める。
2. 加速度の式を求める。
3. ニュートンの運動方程式 $F_i = mx_i$ に代入する。

ラグランジュ力学

1. 運動エネルギーの式を求める。
2. ポテンシャルの式を求める。
3. ラグランジアン L =(運動エネルギー)− (ポテンシャル)を作る。
4. ラグランジュの運動方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$に代入する。

ニュートン力学 vs ラグランジュ力学

- どちらも結局同じ運動方程式を導く。
- 方程式の数も同じ(3次元空間中の質点の運動なら3つ)。
- もちろん答えも同じ。(当然)

なぜ同じ方程式になるか?

これまで紹介した例は、運動方程式

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = K - U$$

$K = K(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j, \quad U = U(x_1, x_2, x_3)$

【ラグランジュの運動方程式をもう一度書く】

左辺第一項

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}(mx_i) = m\ddot{x}$$

左辺第二項

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

従って

$$m\ddot{x}_i = F_i$$

ニュートン力学 vs ラグランジュ力学

では、なぜラグランジアンなど考える必要がある？

- 力（ベクトル）や加速度（ベクトル）を求めるよりも運動エネルギー（スカラー）とポテンシャル（スカラー）を求める方が簡単。
- ベクトルの成分は座標によって変化する。スカラーは不変。
- ニュートンの運動方程式（ベクトル）は座標変換によって形を変えるが、ラグランジアンは不変。
- ラグランジアンをもとめるための座標は自由自在に設定できる。
- ラグランジュの方法の方が一般的。便利。

レポート: 提出締めきり11月15日火曜日午前9時 メールで提出

ラグランジアン 式(1)

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{m\ell_0^2}{2}\frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta} - \frac{k\ell_0^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$$

から導かれるラグランジュの運動方程式が

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta + \omega^2(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta = 0$$

であることを示せ。(ただし$\omega^2 = k/m$とした)