report111027 解答例

ラグランジアンを定数倍しても運動方程式は変わらないので、元のラグランジアンを $\frac{m\ell_0^2}{2}$ で割った

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta} - \omega^2 \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$$

から出発する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{2\dot{\theta}}{\cos^4\theta}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{2\ddot{\theta}}{\cos^4\theta} + 2\dot{\theta}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos^4\theta}\right) = \frac{2\ddot{\theta}}{\cos^4\theta} + 2\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos^4\theta}\right)\dot{\theta}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\theta}^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos^4\theta}\right) - \omega^2\cdot 2\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\left(+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

これらをラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

に代入すると、

$$\frac{2\ddot{\theta}}{\cos^4\theta} + \dot{\theta}^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos^4\theta}\right) + 2\omega^2\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

左辺第 2 項をさらに変形すると、

$$\frac{2\ddot{\theta}}{\cos^4\theta} + 4\dot{\theta}^2\frac{\sin\theta}{\cos^5\theta} + 2\omega^2\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

全体に $\cos^4\theta/2$ をかけると

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta + \omega^2\left(1 - \cos\theta\right)\sin\theta\cos\theta = 0$$

を得る。