解析力学B

第05回

神戸大 システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

この講義のウェブページ: URL: http://tinyurl.com/kageyama2011

2011.11.17

Table of Contents

今日の内容

連絡

復習

演習１：円上の質点とバネ

演習２：傾いた円上の質点と重力

微少振動と調和振動子について

- 前回のレポート:ほぼ全員ができていた。
- メールへの返信はしていない。
- 模範解答はウェブに掲載。

ラグランジアン L ＝(運動エネルギー K)−(ポテンシャル U)
1次元運動:

$$L = L(s, \dot{s})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

3次元運動:

$$L = L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$$

ラグランジュの運動方程式

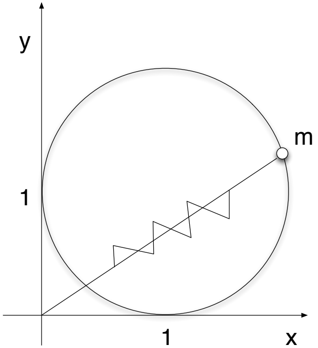
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{for } i = 1, 2, 3)$$

運動方程式を求めよ

質点：質量 m

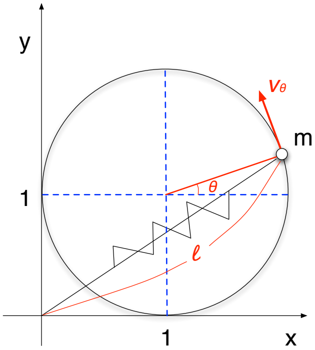
バネ：自然長 ℓ_0 、ばね定数 k

円：$(x-1)^2+(y-1)^2-1=0$



まずはラグランジアンを求めよう。座標の取り方が鍵である。図の θを座標にとる。
θと $\dot{\theta}$の関数としてのラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta}) = K - U$を求めよう。

【演習】



運動エネルギー $K = \frac{m}{2} v_\theta^2 = \frac{m}{2} \dot{\theta}^2$

【図】 円周方向の速度v_θ = 半径 $\times$ 角速度 $\dot{\theta}$

ポテンシャル $U = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta} - \ell_0\right)^2$

【図】 ピタゴラスの定理:

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{(\text{質点のx座標})^2 + (\text{質点のy座標})^2} \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (1+\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta} \end{aligned}$$

結局：

$$L(\theta,\dot{\theta}) = K - U = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{3+2\cos\theta+2\sin\theta} - \ell_0\right)^2$$

では、ラグランジュの運動方程式を求めよう。　【演習】

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k\left(\sqrt{3+2\cos\theta+2\sin\theta} - \ell_0\right) \times \frac{-\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{3+2\cos\theta+2\sin\theta}}$$

以上をラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

に代入して、

$$m\ddot{\theta} + k\left(\sqrt{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta} - \ell_0\right) \times \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta}} = 0$$

が求める運動方程式である。

この式を変形すると

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{\ell(\theta) - \ell_0}{\ell(\theta)}\right)(\sin\theta - \cos\theta)$$

とも書ける。ここで、

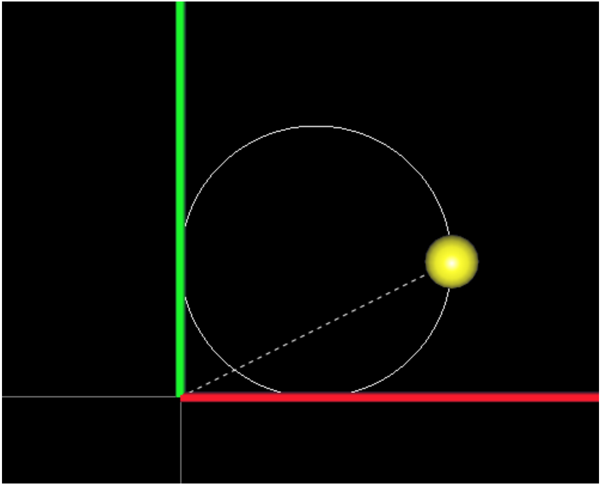
$$\ell(\theta) = \sqrt{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta}$$

である。

シミュレーションコード (particle_on_ring.cpp)

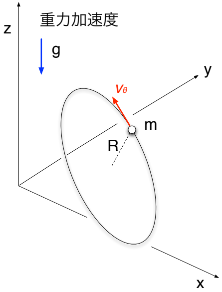
```
void equation_of_motion(double *pos, double *dpos, double dt)
{
  const double L0 = 0.5;
  const double K = 0.2;
  const double M = 1.0;

  double phi = pos[0];
  double psi = pos[1];
  double ell = sqrt( 3 + 2*cos(phi) + 2*sin(phi) );
  dpos[0] = ( psi ) * dt;
  dpos[1] = ( (K/M)*(ell-L0)/ell*(sin(phi)-cos(phi))) * dt;
}
```

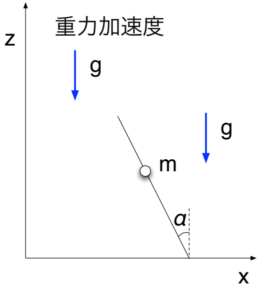
シミュレーションコード(particle_on_ring.cpp)



運動方程式を求めよ

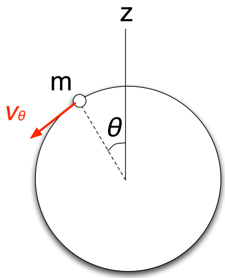
角度 α だけ傾いた半径Rの円上に拘束された質点（質量m）
下向きの重力（重力加速度 g）





ラグランジアン

座標の取り方が鍵である。円（半径R）を正面に見て、質点の位置が$z-x$面となす角度θを座標にとる。



ラグランジュの運動方程式

運動エネルギー $K = \frac{m}{2}v_\theta^2 = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$
ポテンシャル $U = mgz = mg(R + R\cos\theta)\cos\alpha$
ラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta}) = K - U = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgR\cos\alpha(1 + \cos\theta)$
運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

は、次のようになる。

$$\ddot{\theta} - \frac{g\cos\alpha}{R}\sin\theta = 0$$

微少振動

この運動方程式を特別な場合に解く。
質点が円の最下部($\theta = \pi$)の近くにいるときの振動(微少振動)を求めよ。
ヒント:$\theta = \pi + \epsilon$と置き($|\epsilon| \ll 1$)、$\sin\theta = \sin(\pi + \epsilon)$をテーラー展開して$O(\epsilon^2)$を無視する。

$\ddot{\theta} = \ddot{\epsilon}, \quad \sin(\pi + \epsilon) = -\epsilon + O(\epsilon^3)$ から、運動方程式

$$\ddot{\theta} - \frac{g\cos\alpha}{R}\sin\theta = 0$$

は、

$$\ddot{\epsilon} = -\omega^2 \epsilon$$

ここで、$\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{R}}$ は定数。この方程式はすぐに解けて、

$$\epsilon(t) = c_1 \cos(\omega t + c_2)$$

c_1とc_2は積分定数。 $\rightarrow$ 調和振動子。