解析力学B

第06回

神戸大 システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

この講義のウェブページ: URL: http://tinyurl.com/kageyama2011

2011.11.24

Table of Contents

次週

- 『解析力学から天体物理へ：計算機シミュレーションの世界』
- 政田洋平先生

質点の2次元運動

質点の位置が二つの座標(r,ϕ)で決まるとき、ラグランジアンは

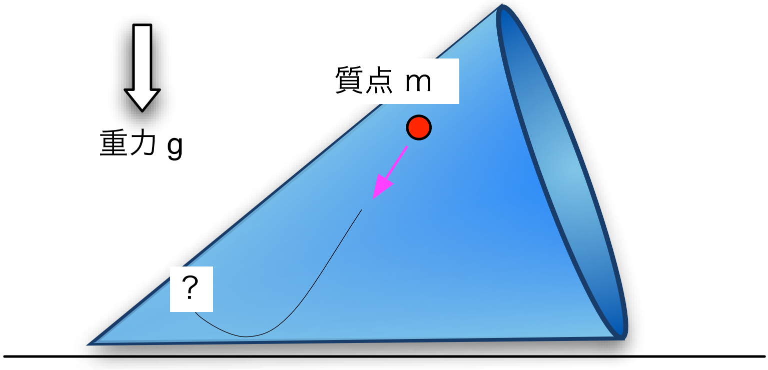
$$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi})$$

ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0,$$

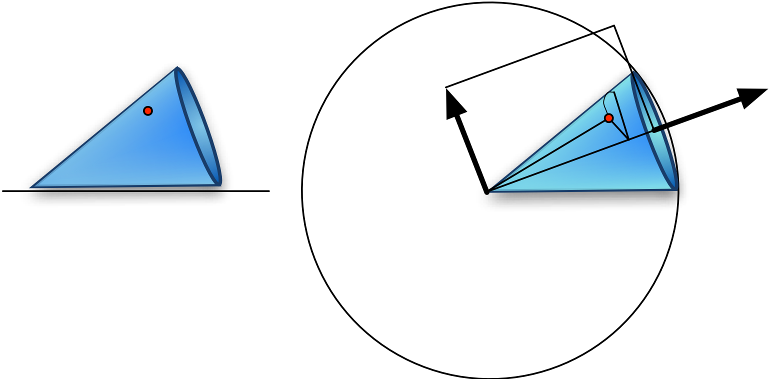
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0,$$

例：水平面に置かれた円錐面上を滑る質点と重力



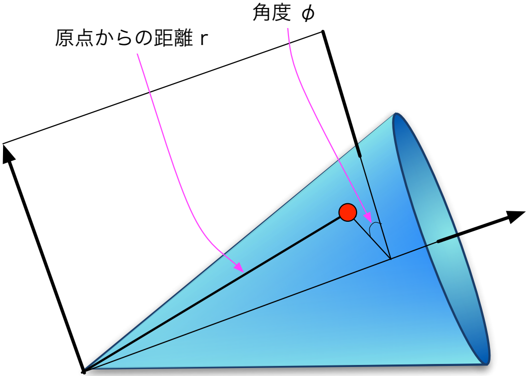
座標の取り方

- 座標の取り方はなんでもいいが、ラグランジアンLを計算しやすいようにとるのがコツ。



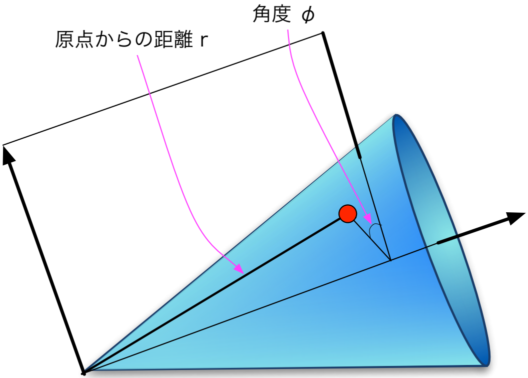
座標の取り方

- 原点からの距離rと、円錐の中心軸の周りの角度ϕの二つを使う。
- 質点の位置は、(r, ϕ)で決まる。



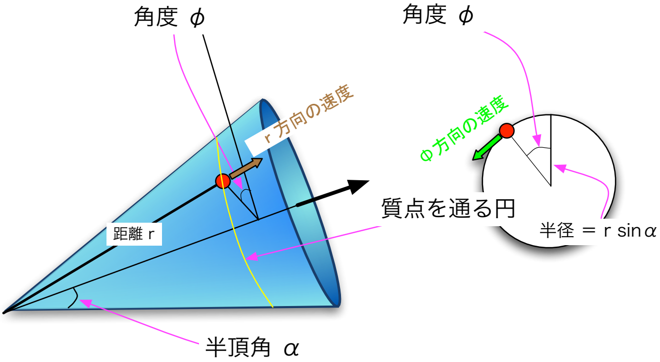
座標の取り方

- 質点の運動は、時間tの関数としての$(r(t), \phi(t))$。
  $\Rightarrow$ 今求めたいのは、この二つの関数$r(t)$と$\phi(t)$。



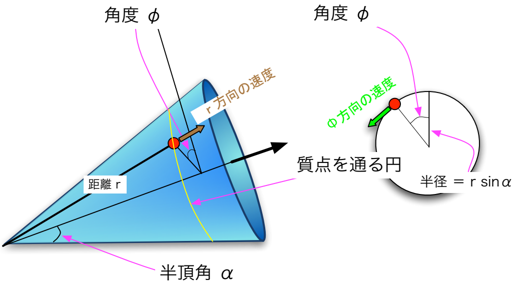
ラグランジアンの計算

- ラグランジアン $L =$ (運動エネルギー) $-$ (ポテンシャル)
- 運動エネルギー
  $\frac{m}{2}$ 速度^2 $= \frac{m}{2}$ (r方向の速度^2 $+ \phi$方向の速度^2)



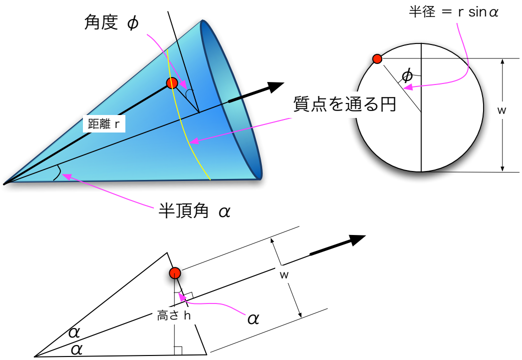
運動エネルギー

- r方向の速度 $= \dfrac{dr(t)}{dt} = \dot{r}$
- ϕ方向の速度 $=$ (円の半径) $\times \dfrac{d\phi(t)}{dt} = r\sin\alpha\,\dot{\phi}$
- 運動エネルギー$= \dfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + \left(r\sin\alpha\,\dot{\phi}\right)^2\right\}$



ポテンシャル

- 床からの高さ $h = w \cos\alpha$
- $w = r \sin\alpha(1 + \cos\phi)$
- 従ってポテンシャル $= mgh = mgr \cos\alpha \sin\alpha(1 + \cos\phi)$



ラグランジアンが求まった

$$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2\right) - mgr\cos\alpha\sin\alpha(1+\cos\phi)$$

ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

ラグランジュの運動方程式を作る(r成分)

$$L(r,\phi,\dot r,\dot\phi)=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\sin^2\alpha\,\dot\phi^2\right)-mgr\cos\alpha\sin\alpha(1+\cos\phi)$$

を使い、機械的に計算する:

$$\frac{\partial L}{\partial r}=m\,r\,\sin^2\alpha\,\dot\phi^2-m\,g\,\cos\alpha\sin\alpha(1+\cos\phi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r}=m\,\dot r,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)=m\,\ddot r.$$

ラグランジュの運動方程式のr成分 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$ に代入すると

$$m\,\ddot r-m\,r\,\sin^2\alpha\,\dot\phi^2+m\,g\,\cos\alpha\sin\alpha\,(1+\cos\phi)=0$$

ラグランジュの運動方程式を作る(ϕ成分)

ϕ成分も機械的に計算する:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m\,g\,r\,\cos\alpha\sin\alpha\,\sin\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\,r^2\,\sin^2\alpha\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 2\,m\,r\,\dot{r}\,\sin^2\alpha\,\dot{\phi} + m\,r^2\,\sin^2\alpha\,\ddot{\phi}$$

ラグランジュの運動方程式のϕ成分 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$に代入すると

$$m\,r^2\,\sin^2\alpha\,\ddot{\phi} + 2\,m\,r\,\dot{r}\,\sin^2\alpha\,\dot{\phi} - m\,g\,r\,\cos\alpha\sin\alpha\,\sin\phi = 0.$$

ラグランジュの運動方程式が求まった

求まった二つ運動方程式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} - r\,\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2 + g\,\cos\alpha\sin\alpha\,(1+\cos\phi) &= 0, \\
r\,\sin^2\alpha\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{r}\,\sin^2\alpha\,\dot{\phi} - g\,\cos\alpha\sin\alpha\,\sin\phi &= 0.
\end{aligned}
$$

未知関数$r(t)$と$\phi(t)$を決める2階の微分方程式が二組。

解析的に解くのは大変だが、計算機(数値積分法)を使えば簡単に解ける。

ラグランジュの運動方程式をちょっと書き換える

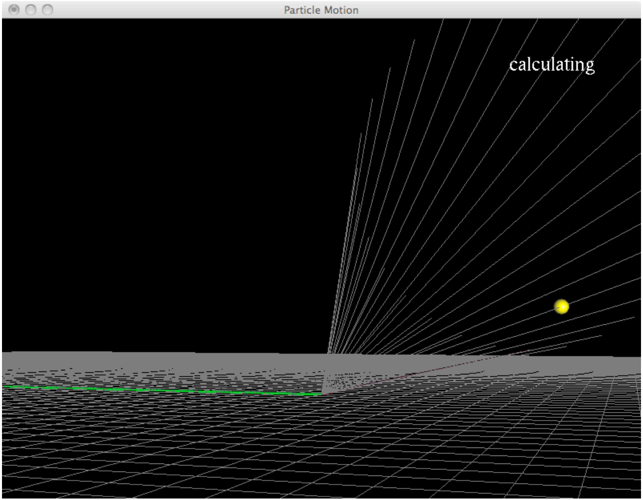
$u=\dot{r}$ と $v=\dot{\phi}$という新しい量を二つ導入し、整理するとさきほどの運動方程式は次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= u, && (1)\\
\dot{\phi} &= v, && (2)\\
\dot{u} &= r\,\sin^2\alpha\,v^2 - g\,\cos\alpha\sin\alpha\,(1+\cos\phi)\,, && (3)\\
\dot{v} &= -2\,u\,v/r + \frac{g\cos\alpha\sin\phi}{r\sin\alpha}. && (4)
\end{aligned}
$$

未知関数$u(t), v(t), r(t), \phi(t)$を決める1階の微分方程式が4つ。

これを計算機に解かせる。

シミュレーションコード: particle_on_cone.cpp



ラグランジュの方法の便利さ

- 1次元自由度のラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta})$
- 2次元運動のラグランジアン $L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$
- ラグランジアンの作り方と運動方程式は自由度がいくつでも同じ

自由度２の系

- 一つの質点の位置が二つの座標で決まる
- 二つの質点の位置がそれぞれ一つの座標で決まる

どちらも自由度2の系。ラグランジュの運動方程式の作り方は同じ。

レポート（report 111124）

二つの放物線 $y = x^2 + 1$ と $y = -x^2 - 1$ 上に拘束された質点aと質点b(どちらも質量m) があり、二つの質点は線形バネ(ばね定数k、自然長ℓ_0)で連結されている。二つの質点の位置 x^a, x^b が従う運動方程式を下の形で求めよ。

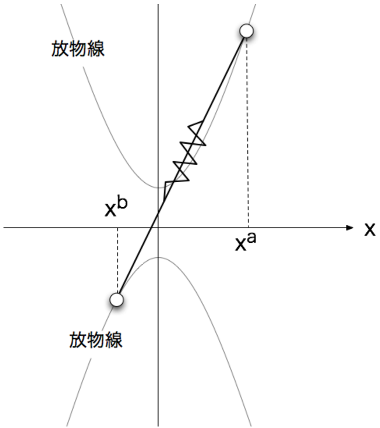
$$\left\{1 + 4(x^a)^2\right\} \ddot{x}^a = ???$$

$$\left\{1 + 4(x^b)^2\right\} \ddot{x}^b = ???$$

ただし、右辺は $\Delta x = x^a - x^b$, $\Delta y = (x^a)^2 + (x^b)^2 + 2$, $s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ を使ってできるだけ簡潔に書くこと。

メール。レポートタイトル 111124
締めきり:12/5(月曜日)

２質点系（それぞれの自由度は１）



質点a: 座標 (x^a)
質点b: 座標 (x^b)

ラグランジアン = (運動エネルギー) ー (ポテンシャル)

$$L(x^a, x^b, \dot{x}^a, \dot{x}^b)$$

ポテンシャル

$$U = \frac{k}{2}(s - l_0)^2$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x^a - x^b)^2 + (y^a - y^b)^2} \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

ここで

$$\Delta x \equiv x^a - x^b$$

$$\Delta y = y^a - y^b = (x^a)^2 + (x^b)^2 + 2$$

運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}\left\{(\dot{x}^a)^2 + (\dot{y}^a)^2 + (\dot{x}^b)^2 + (\dot{y}^b)^2\right\}$$

$\dot{y}^a = 2x^a\dot{x}^a, \quad \dot{y}^b = -2x^b\dot{x}^b$ を代入して、

$$K = \frac{m}{2}\left\{(\dot{x}^a)^2 + 4(x^a)^2(\dot{x}^a)^2 + (\dot{x}^b)^2 + 4(x^b)^2(\dot{x}^b)^2\right\}$$

ラグランジアン

$$
\begin{aligned}
L(x^a, \dot{x}^a, x^b, \dot{x}^b) &= \frac{m}{2}\left\{(\dot{x}^a)^2 + 4(x^a)^2(\dot{x}^a)^2 + (\dot{x}^b)^2 + 4(x^b)^2(\dot{x}^b)^2\right\} \\
&\quad -\frac{k}{2}(s - l_0)^2
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
s = \sqrt{(x^a - x^b)^2 + \{(x^a)^2 + (x^b)^2 + 2\}^2}
$$

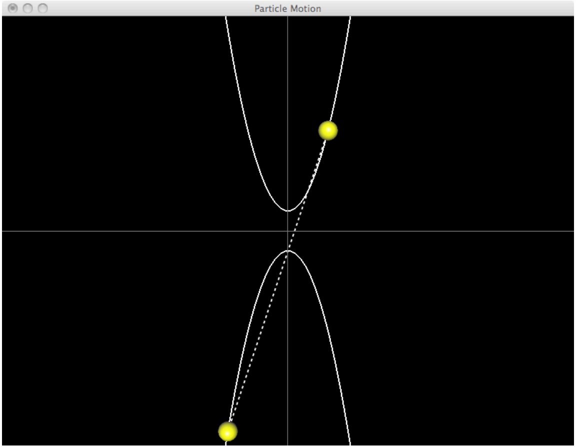
ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^b}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^b} = 0$$

【あとは自動的(レポート解答)】

シミュレーションコード: two_particles_parabola.cpp



6自由度系

質点a：座標 (x_1^a, x_2^a, x_3^a) （カーテシアンとは限らない）
質点b：座標 (x_1^b, x_2^b, x_3^b)

ラグランジアン = (運動エネルギー) ー (ポテンシャル)

$$L(x_1^a, x_2^a, x_3^a, x_1^b, x_2^b, x_3^b, \dot{x}_1^a, \dot{x}_2^a, \dot{x}_3^a, \dot{x}_1^b, \dot{x}_2^b, \dot{x}_3^b)$$

ラグランジュの運動方程式 ⇒ いつもと同じ。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i^a} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^b}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i^b} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

自由度が Nとは:系の状態がN個の座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ で指定される。ラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_N)$$

作り方$(L = K - U)$は同じ。ラグランジュの運動方程式は簡単に:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$