# 解析力学B

## 第08回

神戸大 システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

この講義のウェブページ: URL: http://tinyurl.com/kageyama2011

2011.12.08

# Table of Contents

# 次週

- 来週休講(出張のため)
- 次回は12/22
- 定期試験は2/9

自由度が $N$ の系(系の状態が$N$個の座標 $(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ で指定される)

ラグランジアン

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

# 汎関数

関数 $f(x)$: 数 $x \to$ 数 $f(x)$ 【図:入力→ブラックボックス→出力】

汎関数: 関数$f(x) \to$ 数 $F[f]$ 【図】

# 例1

曲線 $y = y(x) \ \ (0 \leq x \leq a)$ を$x$軸のまわりに回転してできる曲面の面積 $S[y]$

【図】

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= 2\pi y \times \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
&= 2\pi y \times \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x \\
&= 2\pi y \times \sqrt{1 + (y')^2}\,\Delta x
\end{aligned}
$$

従って

$$
S = 2\pi \int_0^a y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx
$$

【クイズ】$S[y]$を極小にする関数形$y(x)$何だろうか？ ただし$y(0)$と$y(a)$は固定。（極小曲面）

# 例2

重力の下、坂道$y(x)$を滑る質点が滑り落ちるのにかかる時間$T[y]$。

【図 : $x$軸右向き、$y$軸下向き。左上端原点O、右下端A】

運動エネルギー$(\frac{m}{2}v^2)$ ＋ ポテンシャル$(-mgy)$ = 一定 = 0

（ただし、時刻$t=0$で質点は停止とする。）

$$\frac{m}{2}v^2 - mgy = 0$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

微少な距離$\Delta s$を通過するのにかかる微少時間$\Delta t$　【図】

$$
\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{\Delta s}{v} \\
&= \frac{\Delta s}{\sqrt{2gy}} \\
&= \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{2gy}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Delta x^2}}{\sqrt{2gy}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} \Delta x
\end{aligned}
$$

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$T[y]$を極小にする関数形$y(x)$を最速降下線と言う。ただし、$y(0)$と$y(a)$は固定。
【クイズ：最速降下線を推測せよ。】

# 例3

重力の下、ヒモをぶら下げる。【図：二つの鉄塔の間の電線。右x軸。上y軸】
ヒモの長さ$\ell[y]$

$$
\begin{aligned}
\ell[y] &= \int ds \\
&= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
&= \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx
\end{aligned}
$$

ヒモの質量密度を $\rho$とする。微少な長さ$\Delta s$のヒモの質量$\rho\Delta s$。ヒモ全体のポテンシャルエネルギー $E[y]$

$$E[y] = \int \rho g y \, ds = \int_0^a \rho g y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

ヒモをぶら下げると(平衡状態になると)、長さ$\ell$を一定に保ちつつ、$E[y]$を最小にする関数形$y(x)$をとる。その時汎関数

$$I[y] = \int_0^a \left(\rho g y - \lambda\right) \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

が最小となる。$\lambda$は定数(ラグランジュの未定乗数法)。これをカテナリー(懸垂曲線)という。

【クイズ:懸垂曲線を推測せよ。】

# 変分法

これまで挙げた例は全て、次のような「汎関数の極値」を求める問題であった。
定数倍は無関係なので、除くと、

極小曲面: $S[y] = \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

最速降下線: $T[y] = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$

懸垂曲線:$I[y] = \int_0^a (\rho g y - \lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$

# 変分法

関数$y(x)$が極値をとる$x$の値を求める方法：微分法

汎関数$I[y]$が極値をとる $y(x)$を求める方法：変分法

# 微分

テーラー展開。

$$y(x_0+\epsilon) = y(x_0) + y'(x_0)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\Delta y = y(x_0+\epsilon) - y(x_0) = y'(x_0)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

関数$y(x)$が$x_0$で極値 $\rightarrow$ $x_0$で微分$y'$がゼロ

# 変分

汎関数$I[y]$が関数$y_0(x)$で極値をとる → 関数$y_0(x)$を少しだけ変化させても汎関数$I$の値は変わらない。

$$I[y_0(x)+\epsilon\eta(x)]-I[y_0(x)]=\epsilon\delta I+O(\epsilon^2)$$

$\delta I$を変分という。

汎関数$I[y]$が$y_0(x)$で極値をとる → $y_0(x)$で変分$\delta I$がゼロ。

【図】

$\epsilon$は小さい数。$\eta(x)$は任意の関数。ただし、端点条件

$$\eta(a)=\eta(b)=0$$

を満たす。

$$I[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x), x)dx$$

のとき、$y(x)$を

$$y(x) \to y(x) + \epsilon\, \eta(x)$$

と変えたときの汎関数$I$

$$I[y(x) + \epsilon\eta(x)] = \int_a^b L(y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x), x)dx$$

被積分関数をテーラー展開する。

$$L(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x) = L(y, y', x) + \frac{\partial L}{\partial y}\epsilon\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}\epsilon\eta'(x) + O(\epsilon^2)$$

$$
\begin{aligned}
I[y+\epsilon\eta] &= \int_a^b L(y,y',x)dx + \epsilon \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x)\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + O(\epsilon^2) \\
&= I[y] + \epsilon\,\delta I[y] + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \delta \int_a^b L(y, y', x) dx \\
&= \int_a^b \left( \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\int_a^b \eta'(x) \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx = \left[ \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right]_a^b - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx
$$

端点条件$\eta(a) = \eta(b) = 0$より、右辺第一項はゼロ。

従って

$$\delta I = \delta \int_a^b L(y, y', x)dx = \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{\partial L}{\partial y} \right\} \eta(x)dx$$

任意の$\eta(x)$に対して変分$\delta I = 0$なら、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

が成り立つ。これを オイラー=ラグランジュの方程式という。

$y(a)$と$y(b)$が固定という端点条件の下、汎関数$I[y]=\int_a^b L(y,y',x)dx$が極値をとる関数$y(x)$は、オイラーラグランジュの方程式を満たす。

関数が$N$個、$y_i(x) \quad (i=1,\cdots,N)$あるとき: 関数$y_i(a)$と$y_i(b)$が固定という端点条件の下、汎関数$I[y_1,y_2,\cdots,y_N]=\int_a^b L(y_1,y_2,\cdots,y_N,y_1',y_2',\cdots,y_N',x)dx$が極値をとる関数$y_i(x)$は、オイラーラグランジュの方程式を満たす。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_i}=0 \quad (i=1,\cdots,N)$$

# 変分原理(ハミルトンの原理)

$N$次元運動を考える。時間$t$、座標$q_i$、グラジアン$L(q_1, \cdots q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t)$のとき、

作用$S$を

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q_1, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t)dt$$

と定義すると、運動$q_i(t)$は、作用が極値をとるように実現される。

これを変分原理(ハミルトンの原理)と言う。

ハミルトンの原理が成り立つなら、変分法により、$q_i(t)$はオイラー=ラグランジュの運動の方程式を満たす。つまり、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N)$$

これはラグランジュの運動方程式に他ならない！