解析力学B

第09回

神戸大 システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

この講義のウェブページ: URL: http://tinyurl.com/kageyama2011

2011.12.22

今日の内容

前回の復習

ハミルトン形式

ハミルトンの正準方程式の例

付録: N次元の正準方程式

§ 前回の復習

ハミルトンの原理

【図(1次元質点の投げ上げの軌跡、横軸t、縦軸z)】
ラグランジアン

$$L(q, \dot{q}, t)$$

作用

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

ハミルトンの原理：運動は$q(t_a)$, $q(t_b)$が固定という端点条件の下、作用が極値をとるような運動をとる。

$$\delta S = 0$$

変分法(オイラー＝ラグランジュの方程式)よりラグランジュの運動方程式が導出される。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

§ハミルトン形式

ラグランジュ力学の復習

ラグランジュの運動方程式(1次元)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

時間に関する2階の微分方程式系 これまで見たとおり、数値計算

(ルンゲ=クッタ積分法)でこの方程式を解くときには、2階の微分方程式を解く代わりに二組の1階微分方程式を解いていた。

プログラム例(再掲):
spring_swing_particle.cpp

```
double s, common_factor;

s = sqrt( (x1-x0)*(x1-x0) + (y1-y0)*(y1-y0) + (z1-z0)*(z1-z0) );

common_factor = (K/M) * (s-L0) / L0;

dpos[0] = ( u1 ) * dt;

dpos[1] = ( v1 ) * dt;

dpos[2] = ( w1 ) * dt;

dpos[3] = ( -common_factor*(x1-x0) ) * dt;

dpos[4] = ( -common_factor*(y1-y0) ) * dt;

dpos[5] = ( -common_factor*(z1-z0) - GRAVITY_CONST ) * dt;
```

ラグランジュの運動方程式の「一階微分化」

新しい変数$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$とおけば

$$\begin{cases} \dot{p} & = & \dfrac{\partial L}{\partial q} \\ p & = & \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} \end{cases}$$

という二つの式になるが、下の式は数値計算ではそのまま使えないので式変形が必要であった。左辺が時間微分でないから。（上の式はいい。）

では・・・

$$\dot{q} = ???$$

という形が自然に出てくる力学理論はないであろうか？

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

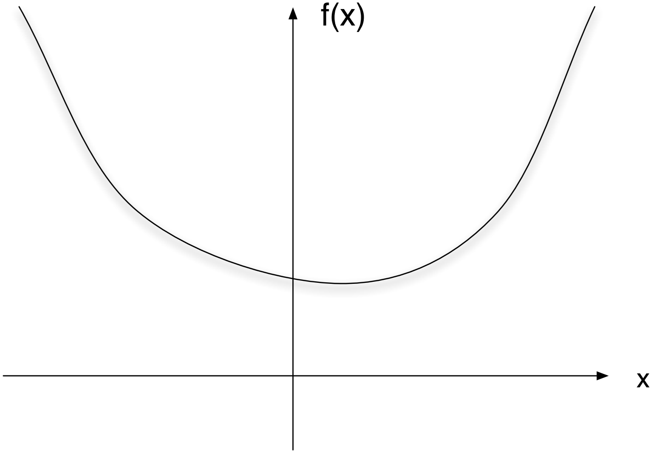
ではなく

$$\dot{q} = \frac{\partial (?)}{\partial p}$$

という形が欲しい。

ルジャンドル変換

xの凸関数$f(x)$



ルジャンドル変換

変数 x の関数 $f(x)$
接線の傾き β を決めれば、x は一意に決まる:

$$\beta = \frac{df(x)}{dx}$$

を解けばよい。

変数変換 $x \to \beta$

ルジャンドル変換

逆に

$$x = \frac{dg(\beta)}{d\beta}$$

となるような変数βの関数$g(\beta)$は何か？

答え：

$$x\,\beta = f + g$$

あるいは

$$g = x\,\beta - f$$

これを$f \to g$のルジャンドル(Legendre)変換という。gも凸関数。

ルジャンドル変換

確認【演習】:

$$g(\beta) = x(\beta)\,\beta - f(x(\beta))$$

$$\frac{dg}{d\beta} = x(\beta) + \beta\,\frac{dx(\beta)}{dx} - \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{d\beta} = x$$

ここで$\frac{df}{dx} = \beta$を使った。

ルジャンドル変換の例

$$f(x) = x^2 \longleftrightarrow g(\beta) = \frac{\beta^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{mx^2}{2} \longleftrightarrow g(\beta) = \frac{\beta^2}{2m}$$

逆変換すると元に戻る。

ラグランジュの運動方程式に戻る

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \to \dot{q} = \frac{\partial (?)}{\partial p}$$

としたい。

$\dot{q} \to p$ に変数変換し、Lをルジャンドル変換する。

$$H = p\,\dot{q} - L$$

すると

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{(望みどおりの形)}$$

になる。

ハミルトニアン

ラグランジアンLをルジャンドル変換した

$$H = p\dot{q} - L$$

をハミルトニアン(Hamiltonian)という。
ハミルトニアンではqとpが独立変数である。
pをqに共役な運動量、あるいは正準運動量という。

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

ハミルトニアン

$\frac{\partial H}{\partial q}$はどうなる？

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}\left(p\dot{q} - L(q, \dot{q}(q,p))\right) \\
&= p\frac{\partial \dot{q}(q,p)}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \\
&\quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \text{ より}\right) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q} \\
&= -\dot{p}
\end{aligned}$$

最後の式は、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

ハミルトン形式の力学

まとめると、ラグランジアン$L(q,\dot{q})$が与えられているとき、qと正準運動量p

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

を独立変数としたハミルトニアン$H(q,p)$を

$$H(q,p) = p\,\dot{q} - L$$

として定義すると、運動方程式は下の形になる。

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

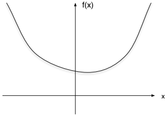
これをハミルトン形式の運動方程式(あるいは正準運動方程式)という。

ハミルトン形式の力学

注意:ハミルトニアンの定義式$H = p\dot{q} - L$の右辺にある$\dot{q}$はq, pの従属変数である。
つまり:

$$H(q,p) = p\,\dot{q}(q,p) - L(q, \dot{q}(q,p))$$

念の為: ルジャンドル変換としての変数の関係



$$
\begin{array}{rcl}
x & \Leftrightarrow & \beta \\
f(x) & \Leftrightarrow & g(\beta) \\
\dfrac{df}{dx} = \beta & \Leftrightarrow & \dfrac{dg}{d\beta} = x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{q} & \Leftrightarrow & p \\
L(\cdots, \dot{q}) & \Leftrightarrow & H(\cdots, p) \\
\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p & \Leftrightarrow & \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}
\end{array}
$$

多次元の場合

【詳細は付録】

ラグランジアン(N次元)

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$$

正準運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \cdots, N)$$

ハミルトニアン

$$H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N) = p_i \dot{q}_i - L(q_1, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N)$$

ハミルトンの運動方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \cdots N)$$

§ 正準方程式の例

ポテンシャル中の質点の運動

【円筒座標(r,ϕ,z)の図】
ラグランジアン

$$L(r,\phi,z,\dot{r},\dot{\phi},\dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$$

正準運動量

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

ハミルトニアン $H(r, \phi, z, p_r, p_\phi, p_z)$

【演習】Hを求めよ

$$
\begin{aligned}
H &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} + p_z\dot{z} - L \\
&= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + V(z) \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} + V(z)
\end{aligned}
$$

ハミルトンの運動方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, & \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, & \frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, & \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{1}{m} p_r$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = 0$$

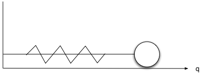
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{mr^2} p_\phi$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -V'(z)$$

正準運動方程式の例: バネ



$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \left(\dot{q} = \frac{p}{m}\right)$$

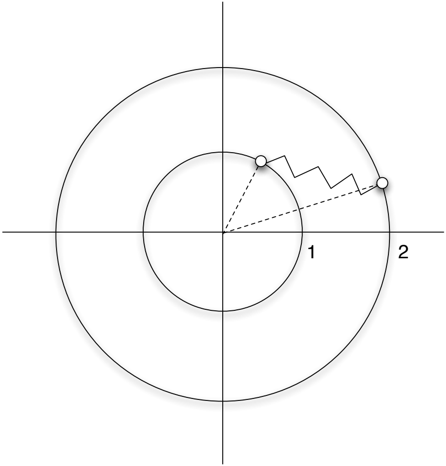
$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L = p\,\frac{p}{m} - \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2\right\} + \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2 \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2 \end{aligned}$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(q - \ell_0)^2$$

正準運動方程式

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k\,(q - \ell_0) \end{cases}$$

正準運動方程式の例: もう少し面白い例



正準運動方程式の例: もう少し面白い例

原点を中心とした$x-y$平面上の二つの円(半径1と2)の上を動く二つの質点を考える。二つの質点はバネ(定数k、自然長ℓ_0)で結ばれている。
二つの質点間の距離ℓは

$$\ell = \sqrt{5 - 4\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)}$$

である。
ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\phi}_1^2 + 4\dot{\phi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)} - \ell_0\right)^2$$

正準運動量

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = m\dot{\phi}_1 \quad (\dot{\phi}_1 = p_1/m)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = 4m\dot{\phi}_2 \quad (\dot{\phi}_1 = p_1/4m)$$

ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot{\phi}_1 + p_2\dot{\phi}_2 - L \\ &= p_1\frac{p_1}{m} + p_2\frac{p_2}{4m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_1^2}{m^2} + 4\frac{p_2^2}{16m^2}\right) \\ &\quad -\frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos(\phi_1 - \phi_2)} - \ell_0\right)^2 \\ &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{8m} + \frac{k}{2}\left(\sqrt{5 - 4\cos(\phi_1 - \phi_2)} - \ell_0\right)^2 \end{aligned}$$

結局、正準運動方程式は以下の4式:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_1}{4m}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \phi_1} = 2k\Lambda \sin\left(\phi_1 - \phi_2\right)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi_2} = -2k\Lambda \sin\left(\phi_1 - \phi_2\right)$$

ここで $\Lambda = 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{5-4\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)}}$ あとはこの微分方程式系を数値的に積分すれば良い。(式変形の必要がなく、このままプログラムできることに注意!)

§付録: 多自由度系の正準方程式

多自由度系の場合

ある力学系がN個の変数$q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$の ラグランジアン

$$L = L(q, \dot{q})$$

で記述されているとする。
q_iに共役な運動量(一般化運動量)p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

とハミルトニアンHを

$$H(p, q) = p_j \dot{q}_j - L$$

と定義する。(多次元関数のルジャンドル変換。)

連立方程式

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$$

を解いて、

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \cdots, q_N, p_1, p_2, \cdots, p_N)$$

とする。

ハミルトニアンを

$$H(q, p) = p_j \dot{q}_j - L$$

と定義する。
ここで右辺は$\dot{q}$とラグランジアン

$$L = L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$$

は、$\dot{q}_i(q, p)$を通じた合成関数である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k}(p_j \dot{q}_j) - \frac{\partial}{\partial p_k} L(q, p) \\
&= \dot{q}_k + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} \\
&\quad \left(p_\ell \text{ の定義 } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} = p_\ell \right) \text{ より} \\
&= \dot{q}_k + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - p_\ell \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_k} \\
&= \dot{q}_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}(p_j \dot{q}_j) - \frac{\partial}{\partial q_k} L(q, \dot{q}) \\
&= p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \right) \\
&= p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_k} \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad \text{(ラグランジュの運動方程式より)} \\
&= -\frac{d}{dt} p_k \\
&= -\dot{p}_k
\end{aligned}
$$

まとめ:

$q = (q_1, q_2, \cdots, q_N)$と $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$の ラグランジアン $L(q, \dot{q})$から、正準運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots N)$$

及び、q_iとp_iを独立変数としたハミルトニアン

$$H(q, p) = p_j\, \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$$

を作る。すると正準運動方程式は:

$$\begin{cases} \dot{q}_k &= \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

まとめ

- ニュートンの運動方程式(時間2階の微分方程式)
- ラグランジュの運動方程式(時間2階の微分方程式)
- ハミルトンの原理(変分原理)
- 新しい運動方程式: ハミルトン形の運動方程式(時間一階の微分方程式)

次回は1月12日。
定期試験は2月9日。