

# ハミルトンの正準運動方程式：まとめと例題

解析力学 B (2012.01.12) 陰山 聡

ラグランジアンを  $L(q, \dot{q})$ 、 $q$  に共役な運動量 (正準運動量) を  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  とする。ハミルトニアンは

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (\text{ルジャンドル変換})$$

ハミルトンの正準運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

## 【例題 1】

水平方向に  $x$  座標、鉛直上向きに  $y$  座標をとり、 $-y$  方向の一定重力 (重力定数  $g$ ) の下、放物線  $y = x^2/2$  上に拘束された質点の運動を考える。質点の質量  $m$  は 1 とする。

- 質点がこの放物線上を微小時間  $\Delta t$  の間に、微小な距離  $\Delta s$  だけ移動した。  $x$  方向の微小な変位  $\Delta x$  と、  $y$  方向の微小な変位  $\Delta y$  を使い、  $\Delta s$  を  $\Delta x$  と  $\Delta y$  で書け。
- 質点がこの放物線上を滑る速さ  $ds/dt$  を、  $\dot{x}(= dx/dt)$  と  $x$  を使って書け。
- この系のラグランジアン  $L(x, \dot{x})$  を書け。
- 正準座標  $q$  を  $x$  とする。  $q$  に共役な正準運動量  $p$  を書け。
- この系のハミルトニアン  $H(q, p)$  を書け。
- ハミルトンの運動方程式を書け。

## 【例題 2】

長さ 2 の重さのない棒の中心に固着した質量  $m = 1$  の質点がある。鉛直下方の一定重力 (重力定数  $g$ ) の下、この棒を壁に (斜めに) 立て掛けた。床面に沿って  $x$  軸、壁面に沿って  $y$  軸をとる。棒の両端はそれぞれ壁面と床面から離れないように (摩擦なしで) 滑りながらこの棒が倒れる途中の運動を考える。棒と壁のなす角度  $q$  を座標とする。

- 質点の位置、つまり棒の中心点の  $x$  座標と  $y$  座標を  $q$  の関数として書け。
- この系のラグランジアン  $L(q, \dot{q})$  を書け。【ヒント：棒には重さがないので、この系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、質点  $m$  だけが持っている。】
- $q$  に共役な正準運動量  $p$  を書け。
- この系のハミルトニアン  $H(q, p)$  を書け。
- ハミルトンの運動方程式を書け。

## 【例題 3】

上の問題と同じく、中心に質量  $m = 1$  の質点が付いた長さ 2 の重さの無い棒の運動を考える。今度は棒の両端が、 $y < 0$  で定義された二つの半直線  $y = x$  と  $y = -x$  上に拘束され、この直線上を摩擦なしでなめらかに滑るとする。重力は  $-y$  方向、重力定数を  $g$ 、棒が  $x$  軸となす角を  $q$  とする。

- $q$  と共役な正準運動量  $p$  を書け。
- この系のハミルトニアン  $H(q, p)$  を書け。
- ハミルトンの運動方程式を書け。
- $q$  が小さい時、 $\sin q \sim q$  という近似を適用し、その運動方程式を解け。