# 解答例

## 【例題 1】

**(a)**

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

**(b)**

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + x^2}\,\dot{x}^2$$

**(c)**

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - gy = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)\dot{x}^2 - \frac{g}{2}x^2$$

**(d)**

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\left(1 + q^2\right)\dot{q}^2 - \frac{g}{2}q^2$$

より

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left(1 + q^2\right)\dot{q}$$

**(e)**

$$H = \dot{q}p - L = (1 + q^2)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(1 + q^2)\dot{q}^2 + \frac{g}{2}q^2 = \frac{1}{2}(1 + q^2)\dot{q}^2 + \frac{g}{2}q^2$$

$\dot{q} = p/(1 + q^2)$ より、

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2(1 + q^2)} + \frac{g}{2}q^2$$

**(f)**

$$\begin{cases} \dot{q} &= & \frac{\partial H}{\partial p} &= & \frac{p}{1+q^2} \\ \dot{p} &= & -\frac{\partial H}{\partial q} &= & \frac{gp^2}{(1+q^2)^2} - gq \end{cases}$$

## 【例題 2】

**(a)**

$$x = \sin q, \qquad y = \cos q$$

**(b)**

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - gy = \frac{1}{2}\left\{(\cos q)^2\,\dot{q}^2 + (\sin q)^2\,\dot{q}^2\right\} - g\cos q = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - g\cos q$$

**(c)**

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$$

**(d)**

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\dot{q}^2 + gy = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + g\cos q = \frac{p^2}{2} + g\cos q$$

**(e)**

$$\begin{cases} \dot{q} &= & \frac{\partial H}{\partial p} &= & p \\ \dot{p} &= & -\frac{\partial H}{\partial q} &= & g\sin q \end{cases}$$

## 【例題 3】

質点は原点を中心とする半径 1 の円上にあり、質点の位置 $(x,y)$ は $(x,y)=(-\sin q,-\cos q)$ と書ける。

**(a)** ラグランジアンは

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2+g\cos q$$

だから

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\dot{q}$$

**(b)**

$$H(q,p)=p\dot{q}-L=\frac{p^2}{2}-g\cos q$$

**(c)**

$$\begin{cases} \dot{q} &=& \frac{\partial H}{\partial p} &=& p \\ \dot{p} &=& -\frac{\partial H}{\partial q} &=& -g\sin q \end{cases}$$

**(d)**

$$\begin{cases} \dot{q} &=& p \\ \dot{p} &=& -gq \end{cases}$$

より、

$$\ddot{q}=-gq$$

これを解くと、$c_1$ と $c_2$ を積分定数として、

$$q(t)=c_1\,\cos\left(\sqrt{g}\,t+c_2\right).$$