解析力学B

第12回
まとめの練習問題

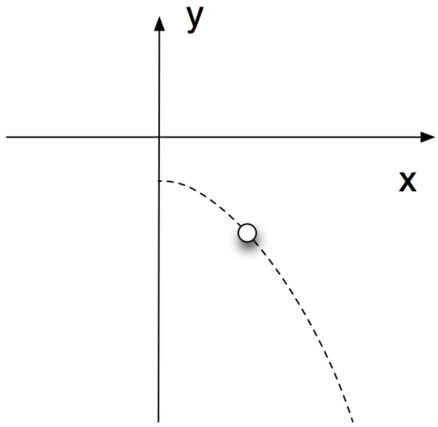
神戸大学システム情報学研究科 計算科学専攻: 陰山 聡

2012.01.26

【問題 1】 x-y平面内の質点の運動を考える。重力は下向き($-y$方向)、重力定数は1とする。質点が関数

$$y = -\cosh x = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

に沿って滑り落ちるときの運動を考える。（ジェットコースターのようなものと考えよ。） 質点の質量はm、摩擦は無視する。



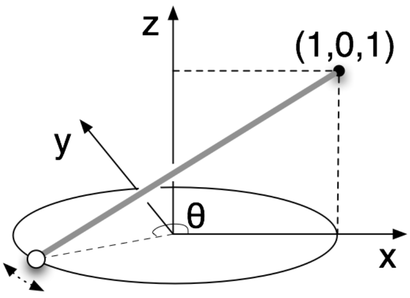
(1) 初期時刻$t = 0$に位置$(x, y) = (0, -1)$にいた質点が、 この「ジェットコースター」の軌道$y = -\cosh x$に沿って長さsだけ滑ったときの位置を(x, y)とする。sをxの関数として書け。（ヒント: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$を$x$について積分すればよい。$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$にも注意。）

(2) yをsの関数として書け。（ヒント: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$）

(3) この系のラグランジアン$L(s, \dot{s})$を書け。

(4) ラグランジュの運動方程式を書け。

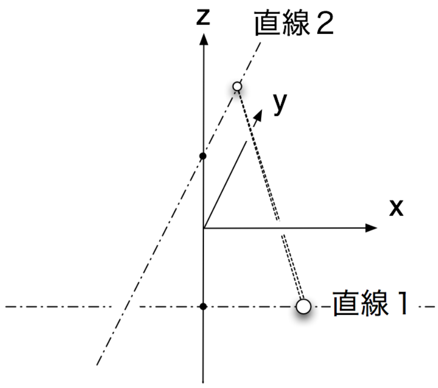
【問題 2】 質量1の質点が、原点を中心とする半径1の円($x^2+y^2=1$)の上を滑る。この質点が、点$(x,y,z)=(1,0,1)$とバネでつながれているときの運動を求める。 重力はなく、摩擦は無視する。バネ定数は1、自然長は0とする。



(1) 図のようにx軸との角度θを一般化座標として、この系のラグランジアン$L(\theta,\dot{\theta})$を求めよ。

(2) ラグランジュの運動方程式を書け。

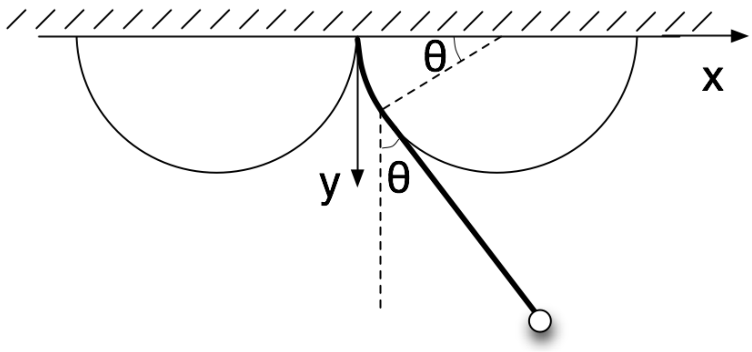
【問題 3】 $z = -1/2$を通り、x軸に平行な直線1と、$z = +1/2$を通り、y軸に平行な直線2がある。（右図参照。）質量mをもつ質点1が直線1の上を、同じ質量mをもつ質点2が直線2の上を摩擦なしに滑る。質点1と質点2の間をバネ（ばね定数k、自然長ℓ_0）がつないでいる。



(1)　質点1のx座標をq_1、質点2のy座標をq_2としてこの系のラグランジアン $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$を書け。

(2)　ラグランジュの運動方程式を書け。

(3)　自然長ℓ_0が0のときの質点1と2の運動を説明せよ。



【問題 4】 中心の位置が$(x, y) = (-1, 0)$と$(+1, 0)$にある半径1の二つの半円を考える。この円に挟まれた振り子を考える。振り子の支点は原点$(x, y) = (0, 0)$にあり、長さℓの糸の先に質量$m = 1$の質点がついている。重力(下向き)方向を$+y$方向とし、この方向と糸がなす角度をθとする。重力定数は1とする。

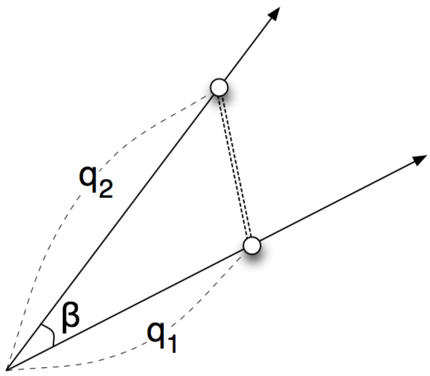
(1) 質点のx, y座標をθで書け。

(2) 質点の速度$\dot{x}, \dot{y}$をθと$\dot{\theta}$で書け。

(3) この系のラグランジアン$L(\theta, \dot{\theta})$を書け。

(4) ラグランジュの運動方程式を書け。

【問題 5】 原点で角度βをもって交差する直線1と直線2がある。質量mをもつ質点1が直線1の上を、同じ質量mをもつ質点2が直線2の上を摩擦なしに滑る。質点1と質点2の間をバネ(ばね定数k、自然長ℓ_0)がつないでいる。

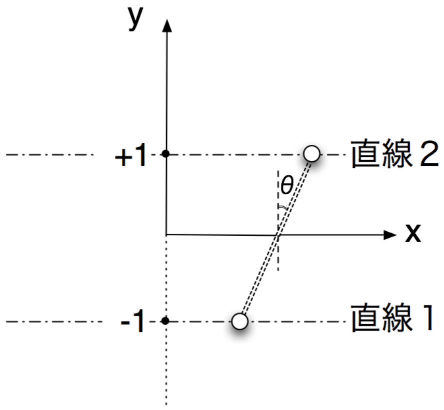


(1) 質点1の(直線1上の)座標をq_1、質点2の(直線上2上の)座標をq_2として、この系のラグランジアン$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$を書け。

(2) ラグランジュの運動方程式を書け。

(3) 自然長ℓ_0が0のときの質点1と2の運動を説明せよ。

【問題 6】 $y = -1$を通り、x軸に平行な直線1と、$y = +1$を通り、やはりx軸に平行な直線2がある。質量mをもつ質点1が直線1の上を、同じ質量mをもつ質点2が直線2の上を摩擦なしに滑る。質点1と質点2の間をバネ(ばね定数k、自然長ℓ_0)がつないでいる。バネの中点のx座標をqとする(y座標は常に0であることはあきらか)。バネとy軸のなす角をθとする。



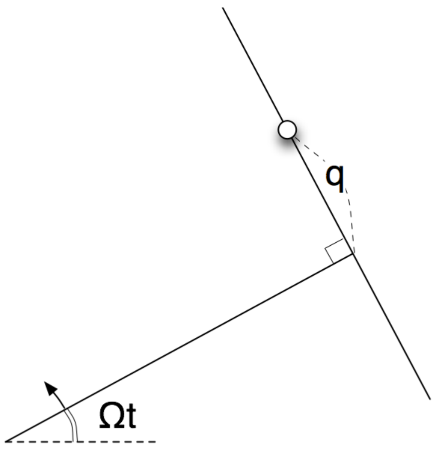
(1) 質点2のx座標をqとθを使って書け。

(2) この系のラグランジアン$L(q, \theta, \dot{q}, \dot{\theta})$を書け。

(3) ラグランジュの運動方程式を書け。

(4) 自然長ℓ_0が0のときの質点1と2の運動を説明せよ。

【問題 7】 原点を中心として長さ1の線分がx–y平面上を一定の角速度Ωで回転している。(つまり1秒あたり¥$Omega$ラジアンの割合で角度が増加する。) この線分の先端(原点の反対側)に、この線分に垂直な方向に直線Lがある。(当然、この直線も回転している。) 直線L上を滑らかに滑る質点(質量$m = 1$)の運動を考える。この質点の直線L上の座標をqとする。



(1) この質点のx座標とy座標をqを使って書け。

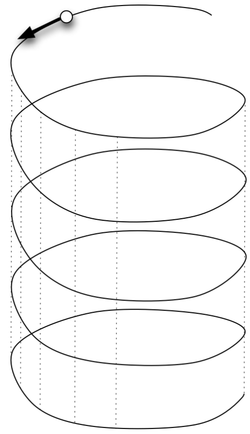
(2) この質点の速度のx成分$\dot{x}$と、y成分$\dot{y}$を書け。

(3) この系のラグランジアン$L(q, \dot{q})$を書け。

(4) 運動方程式を書け。

(5) 質点の運動を説明せよ。

【問題 8】 螺旋曲線の上を滑り落ちる質点(質量$m = 1$)の運動を考える。(螺旋階段の手すりを思い浮かべよ。) 重力は$-z$方向で、重力定数$g = 1$とする。螺旋曲線の方程式は、定数Rとパラメータqを使い



$$\left\{\begin{array}{lcl} x(q) & = & R\cos q \\ y(q) & = & R\sin q \\ z(q) & = & q \end{array}\right.$$

と書ける。

(1) この質点の位置をqで表したとき、 速度のx,y,z成分($\dot{x}$,$\dot{y}$,$\dot{z}$)をqと$\dot{q}$を使って書け。

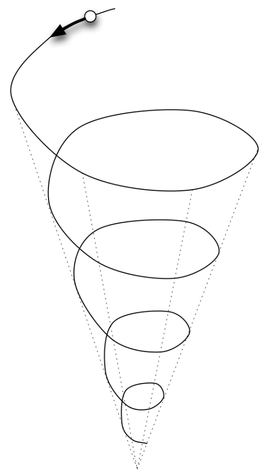
(2) この系のラグランジアン$L(q,\dot{q})$を書け。

(3) 運動方程式を書け。

(4) 質点の運動を説明せよ。

【問題 9】　右図で示した曲線はパラメータqを使って、次の式で書ける。

$$\begin{cases} x(q) &= q\cos q \\ y(q) &= q\sin q \\ z(q) &= q \end{cases}$$



この曲線上を滑り落ちる質点（質量$m = 1$）の運動を考える。重力は$-z$方向で、重力定数$g = 1$とする。

(1)　この質点の位置をパラメータqを使って表したとき、速度のx,y,z成分（ $\dot{x}$,$\dot{y}$,$\dot{z}$）をqと$\dot{q}$を使って書け。

(2)　この系のラグランジアン$L(q, \dot{q})$を書け。

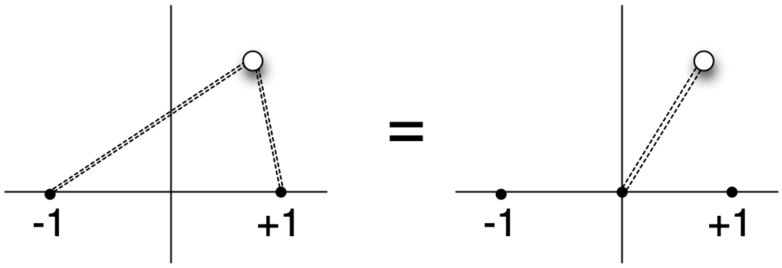
(3)　qに共役な正準運動量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

を書け。

(4)　ハミルトニアン$H(q, p)$を書け。

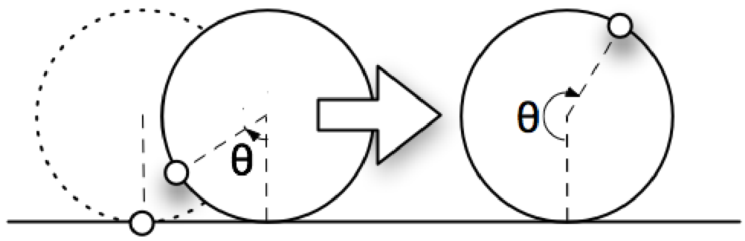
(5)　ハミルトンの正準運動方程式を書け。



【問題 10】　二つのバネにつながれた質点のx-y平面上での運動を考える。質点の質量はmとする。二つのバネのはどちらもバネ定数k、自然長ℓ_0は0である。一方のバネの端はx軸上の点$(x,y)=(-1,0)$に固定されており、もう一方のバネの端は$(x,y)=(+1,0)$に固定されている。

この質点の運動は、端が原点$(0,0)$に固定された一つのバネにつながれたときの運動と等しいことを示せ。また、そのばね定数はいくらか？

【問題 11】 半径1の円がある。この円がx-y平面内でx軸の上を転がっていく。(重さのない自転車の車輪のようなものを考えればよい。) 円が転がるときの摩擦はなく、「スリップ」もしないものとする。以下、重力は$-y$方向で、重力定数は$g = 1$とする。この円上のある点に固着した質量1の質点がある。(自転車の車輪(チューブ内)に重りがついていると想像せよ。) 初期時刻$t = 0$に質点は地面と接触していた。このときのx座標を原点$x = 0$とし、円の中心と質点を結ぶ直線が$-y$方向となす角度をθとする。



(1) 円の中心のx座標をθで書け。

(2) 質点のx,y座標をθで書け。

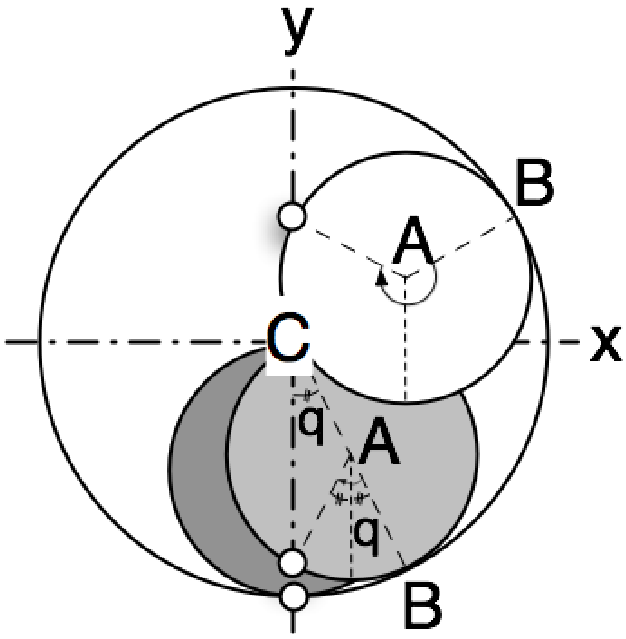
(3) 質点の速度のx,y成分($\dot{x}$,$\dot{y}$)を書け。

(4) この系のラグランジアン$L(\theta, \dot{\theta})$を書け。

(5) θに共役な正準運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ を書け。

(6) ハミルトニアン$H(\theta, p)$を書け。

(7) ハミルトンの正準運動方程式を書け。



【問題 12】 半径1の円1があり、その中心をAとする。この円1がx–y平面内で、原点Cを中心とした半径2の円2の内側を転がる。（重さのない自転車の車輪が円筒形の部屋の壁面上を転がる様子を思い浮かべよ。）円1が転がるときの摩擦はなく、「スリップ」もしないものとする。円1と円2の接点をBとする。以下、重力は$-y$方向で、重力定数は$g = 1$とする。円1上のある点に固着した質量1の質点がある。（自転車の車輪（チューブ内）に重りがついていると想像せよ。）この質点の運動を考える。

円1に固着した質点の位置が、円1が一番下にあるときのBの位置($x = 0, y = -2$)であるとする。円1がCの周りを回転した角度、つまり直線CBが$-y$方向となす角度をqとする。（なお、質点は常にy軸上にあることに注意せよ。）

(1) 質点のy座標をqで書け。

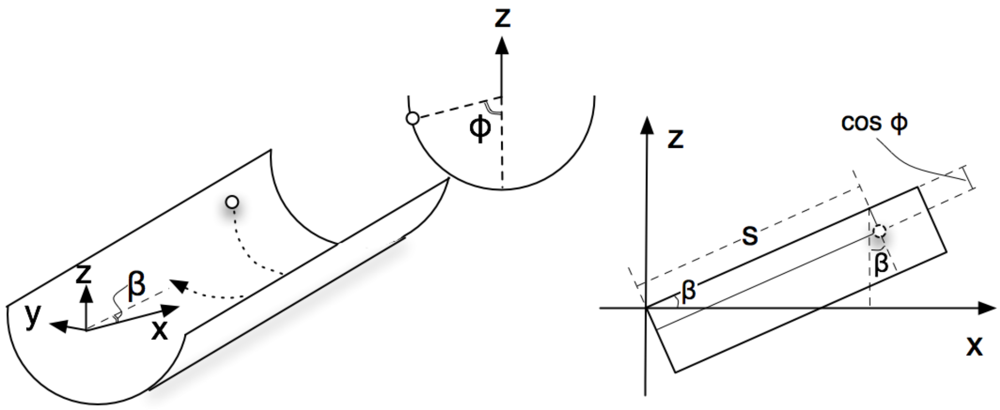
(2) この系のラグランジアン$L(q, \dot{q})$を書け。

(3) qに共役な正準運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を書け。

(4) ハミルトニアン$H(q, p)$を書け。

(5) ハミルトンの正準運動方程式を書け。

【問題 13】 スノーボードのハーフパイプに似た問題を考える。半径1の円筒が水平面x-y面に対して角度βだけ傾いて置かれている。この円筒面上を滑る質点（質量1）の運動を考える。以下、重力は$-z$方向で、重力定数は$g = 1$とする。質点は円筒面上に拘束されていて、この面から離れることはない。摩擦は無視する。



（1） 円筒の軸がx-z面上になるようx軸をとり、原点は図のようにとる。（この図には円筒の下半分だけ描いてある。）円筒座標(ϕ, s)を使って質点の位置を書け。（$\phi = 0$の方向はx-z面内にとる。）

（2） 質点の速度$(\dot{\phi}, \dot{s})$を書け。

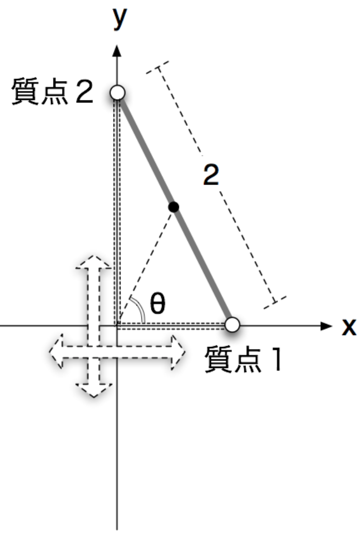
（3） この系のラグランジアン$L(\phi, s, \dot{\phi}, \dot{s})$を書け。

（4） ϕとsに共役な正準運動量、p_ϕとp_sを書け。（ヒント：$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$）

（5） ハミルトニアン$H(\phi, s, p_\phi, p_s)$を書け。

（6） ハミルトンの正準運動方程式を書け。

【問題 14】 長さ2の棒があり、その両端に質点1と質点2が固定されている。質点1はx軸上に拘束されていて、この軸上を滑らかに滑り、質点2も同様にy軸上を滑らかに滑るものとする。（棒の重さと質点の摩擦は無視する。）質点1と質点2はどちらも原点とバネでつながれている。（質点1につながったバネはx軸上にあり、質点2につながったバネはy軸上にある。）二つのバネのバネ定数はどちらも1、自然長は0する。



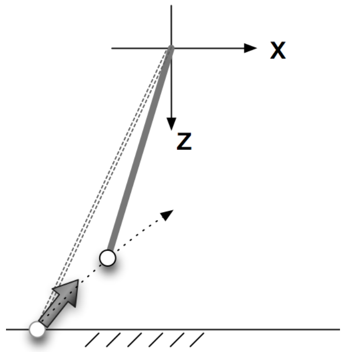
(1)　棒の中点とx軸がなす角度をθとして、質点1のx座標と質点2のy座標をθで書け。

(2)　この系のラグランジアン$L(\theta, \dot{\theta})$を書け。

(3)　ラグランジュの運動方程式を書け。

(4)　時刻$t = 0$の時の質点1と質点の2の位置がそれぞれ$x = 2$, $y = 0$、また、それぞれの速度が$\dot{x} = 0$, $\dot{y} = +1$であった。このとき棒の中点の軌跡を説明せよ。

【問題 15】「逆バンジージャンプ」のような系を考える。以下、x-z平面内の運動とする。原点とバネでつながれた質点（質量$m = 1$）が初期時刻$t = 0$に地面$z = 2$, $x = -1$に固定されている。バネ定数kは1、自然長ℓ_0は1とする。重力定数1の重力が$+z$方向にあるとする。



固定されていた質点が$t = 0$に瞬間的に放たれると、この質点は上方に持ち上げられ、その後、重力のため落下して再び地面$z = 2$に近づくであろう。

(1) 質点の座標を(x, z)とし、この系のラグランジアン$L(x, z, \dot{x}, \dot{z})$を書け。

(2) ラグランジュの運動方程式を書け。

【問題 16】 同じ(ラグランジュの)運動方程式を導くラグランジアン$L(q,\dot{q})$は一つだけではない。(ここでは簡単のため1次元問題を考える。)

(1) Lに定数を足しても同じ運動方程式になることを示せ。

(2) Lを定数倍しても同じ運動方程式になることを示せ。

(3) $V(q) = q^2$を時間で微分した関数$\dot{V} \equiv dV/dt = 2q\dot{q}$をもとの$L$に足しても同じ運動方程式になることを示せ。

(4) 一般にqの関数$W(q)$を時間で微分した$\dot{W} \equiv dW/dt$をもとのLに足しても同じ運動方程式になることを示せ。

【問題 17】 ハミルトニアンが $H(q,p)=\frac{p^2}{2}+\cos q$ の系の正準運動方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} &= p \\ \frac{dp}{dt} &= \sin q \end{cases}$$

である。この正準運動方程式を数値的に積分することを考える。時間刻み幅Δtをϵと書くと、上の微分方程式は次の差分方程式で近似できる。

$$\begin{cases} \frac{Q-q}{\epsilon} &= p \\ \frac{P-p}{\epsilon} &= \sin q \end{cases}$$

これを書き直すと

$$\begin{cases} Q &= q+\epsilon\, p \\ P &= p+\epsilon\, \sin q \end{cases}$$

となる。ここで$q=q(t)$, $Q=q(t+\epsilon)$, $p=p(t)$, $P=p(t+\epsilon)$である。この$(q,p)\to(Q,P)$という変換は正準変換ではない。これはポアッソン括弧

$$\{Q,P\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}$$

を計算することで確認できる。

(1) $\{Q,P\}\neq 1$を示せ。

(2) 上の変換を少し改良したシンプレクティック積分法

$$\begin{cases} Q &= q+\epsilon\, p \\ P &= p+\epsilon\, \sin(q+\epsilon\, p) \end{cases}$$

では、$\{Q,P\}=1$となることを示せ。

【問題 18】 正準座標(q_1, q_2, p_1, p_2)から、別の座標(Q_1, Q_2, P_1, P_2)への変換が次式で定義されている。（これは極座標からカーテシアン座標への座標変換に対応する。）

$$\begin{cases} Q_1 &= q_1 \cos q_2 \\ Q_2 &= q_1 \sin q_2 \\ P_1 &= p_1 \cos q_2 - \frac{p_2}{q_1} \sin q_2 \\ P_2 &= p_1 \sin q_2 + \frac{p_2}{q_1} \cos q_2 \end{cases}$$

この変換が正準変換かどうかを調べるためにはポアッソン括弧

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \right)$$

を計算すればよい。 全ての関係を確認するのは大変なので、下の二つだけ計算せよ。

(1) $\{Q_1, P_1\}$ を計算せよ。

(2) $\{Q_1, P_2\}$ を計算せよ。

【問題 19】 ここでは簡単のため、2次元の位相空間(q, p)を考える。

正準変数qとpの関数$f(q, p)$と$g(q, p)$のポアッソン括弧

$$\{f, q\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}$$

を使うと（時間に陽には依存しない）任意の関数$a(q, p)$の時間微分は

$$\frac{da}{dt} = \{a, H\} \tag{1}$$

で与えられる。ここで$H(q, p)$はハミルトニアンである。この式(1)を出発点とし（講義での論理展開を逆にたどって）ラグランジュの運動方程式を導こう。

(1) $a(q, p) = q$、および$a(q, p) = p$とすることで、式(1)からハミルトンの正準運動方程式を導け。

(2) ルジャンドル変換（講義の時の変換の逆ルジャンドル変換）によって、独立変数をpから$\dot{q}$に変更し、ハミルトニアンHからラグランジアンLを作る。

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}\,p - H(q, p)$$

この右辺のpはqと$\dot{q}$の関数である。つまり、

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}\,p(q, \dot{q}) - H(q, p(q, \dot{q}))$$

である。ハミルトンの正準方程式を使い、$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}$ を示せ。

(3) 同様に $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を計算し、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

を導出せよ。