

解析力学B(平成23年度後期) 定期試験 (2012.02.09)

神戸大学システム情報学研究科(工学部)陰山 聡

【ヒント】 ラグランジアン $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$; ハミルトニアン $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, $H = \dot{q}_j p_j - L$. ラグランジュの運動方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. q_i に共役な運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. 正準運動方程式 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. ポアソン括弧 $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}$.

.....

【問題 1】 ハミルトニアンが $H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \cos q$ で与えられる系を数値的に解く。時間を離散化し、微少な時間刻み幅を ϵ と書くと、正準運動方程式は $(Q, P) = (q + \epsilon p, p + \epsilon \sin q)$ と近似できる。ここで $q = q(t)$, $Q = q(t + \epsilon)$, $p = p(t)$, $P = p(t + \epsilon)$ である。 (q, p) から (Q, P) への変換に対して、ポアソン括弧 $\{Q, P\}$ は1にならない(つまり正準変換でない)ことを示せ。

【問題 2】 ラグランジアンを $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$ とする。

- (1) ラグランジュの運動方程式を $\ddot{q} = \dots$ の形に書け。
- (2) ハミルトニアン $H(q, p)$ を書け。
- (3) 正準運動方程式を書け。(余裕があれば $q(0) = p(0) = 1$ の初期条件の下でそれを解け。)

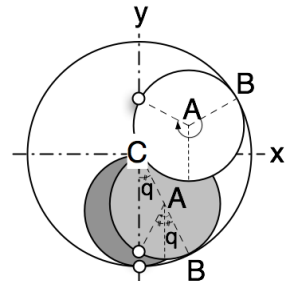
【問題 3】 原点とバネでつながれた質量1の質点が、円: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ の上を摩擦なしに滑る。ばね定数は1、ばねの自然長は0、円の中心(1, 1)と質点を結ぶ直線がx軸となす角度を q とする。(質点の位置は $(x, y) = (1 + \cos q, 1 + \sin q)$ となる。) ラグランジュの運動方程式を $\ddot{q} = \dots$ の形で書け。

【問題 4】 パラメータ q と定数 R を使って定義された螺旋型曲線 $(x(q), y(q), z(q)) = (R \cos q, R \sin q, q)$ の上を滑り落ちる質量 m の質点の運動を考える。重力は下向き($-z$ 方向)で、重力定数を g とする。

- (1) この系のラグランジアン $L(q, \dot{q})$ を書け。
- (2) 運動方程式を $\ddot{q} = \dots$ の形に書け。

【問題 5】 半径1/2の小円があり、その中心をAとする。この小円がx-y平面内で、原点Cを中心とした半径1の大円の内側を転がる。(円形のトンネルの側面を転がる重さのない車輪を考えよ。) 小円が転がるときの摩擦はなく、「スリップ」もしないものとする。小円と大円の接点をBとする。重力は-y方向で、重力定数は1とする。小円上のある点に固着した質量1の質点がある。(車輪の一点に重りがついていると想像せよ。) この質点の運動を考える。小円に固着した質点の位置は、小円が一番下にあるときのBの位置 $(x, y) = (0, -1)$ であるとするとする。(質点は常にy軸上にあることに注意せよ。)

小円が原点Cの周りを回転した角、つまり直線CBが-y方向となす角を q とする。



- (1) 質点のy座標を q で書け。
- (2) この系のラグランジアン $L(q, \dot{q})$ を書け。
- (3) ハミルトニアン $H(q, p)$ を書け。
- (4) 正準運動方程式を書け。

【問題 6】 1次元系のラグランジアン $L(q, \dot{q})$ に対し、 q の任意関数 $W(q)$ の時間微分から作った関数 $V(q, \dot{q}) \equiv \frac{dW(q)}{dq} \dot{q}$ を加えた別のラグランジアン $L'(q, \dot{q}) = L + V$ を考える。

- (1) L' と L は同じ運動方程式を導くことを示せ。
- (2) n 次元系の場合も同様に、 $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ と $L' = L + \frac{dW(q_1, q_2, \dots, q_n)}{dt}$ は同じ運動方程式を導くことを示せ。