解析力学B（平成23年度後期） 定期試験 解答

神戸大学 陰山 聡

2012.02.10

問題 1

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \times 1 - \epsilon \cos q \times \epsilon \neq 1$$

問題 2

(1)

$$\ddot{q} = q$$

(2)

$$H = \frac{p^2}{2} - qp$$

(3)

$$\begin{cases} \dot{q} &= p - q, \\ \dot{p} &= p. \end{cases}$$

指定された初期条件の下での解は

$$\begin{cases} q(t) &= \cosh t, \\ p(t) &= e^t. \end{cases}$$

問題 3

質点の速度は、

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sin q\, \dot{q}, \\ \dot{y} &= \cos q\, \dot{q}, \end{cases}$$

従ってラグランジアンは

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\dot{q}^2}{2} - \left(\cos q + \sin q + \frac{3}{2}\right)$$

だから運動方程式は、

$$\ddot{q} = \sin q - \cos q.$$

問題 4

(1)

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2 + 1\right)\dot{q}^2 - mgq$$

(2)

$$\ddot{q} = -\frac{g}{R^2+1}$$

問題 5

(1)

$$y = -\cos q$$

(2)

$$L = \frac{1}{2}\sin^2 q\,\dot{q}^2 + \cos q$$

(3)

$$H = \frac{p^2}{2\,\sin^2 q} - \cos q$$

(4)

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \dot{q} & = & \frac{p}{\sin^2 q}, \\ \dot{p} & = & \frac{\cos q}{\sin^3 q}p^2 - \sin q. \end{array} \right.$$

問題 6

(1)

$$V = \frac{dW(q)}{dt}$$

とすると $L' = L + V$ である。L と L' による運動方程式の差は、

$$D \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}$$

である。

$$V(q, \dot{q}) = \frac{dW(q)}{dt} = \frac{dW}{dq}\dot{q}$$

より

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = \frac{dW}{dq}.$$

また、

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{d^2W}{dq^2}\dot{q}.$$

従って

$$D = \frac{d}{dt}\left(\frac{dW}{dq}\right) - \frac{d^2W}{dq^2}\dot{q} = \frac{d^2W}{dq^2}\dot{q} - \frac{d^2W}{dq^2}\dot{q} = 0.$$

従って L と L' は同じ運動方程式を導く。

(2)

同様に

$$V = \frac{dW(q_1, q_2, \cdots, q_n)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

とすると、i 成分の運動方程式について、L と L' が導く方程式の差は

$$D_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

である。ここで

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

また、

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j.$$

従って

$$D_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = 0.$$

従って L と L' は同じ運動方程式を導く。