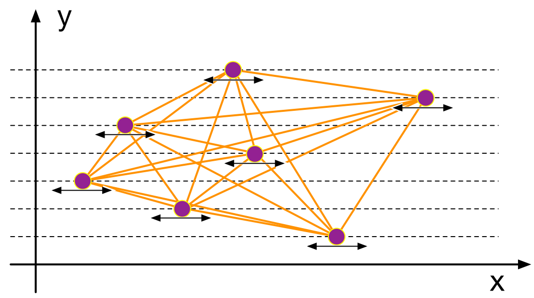
解析力学 B（平成 28 年度後期） 定期試験 (2017.02.02)

神戸大学システム情報学研究科 計算科学専攻 陰山 聡

【問題 1】から【問題 4】までは講義資料参照。

【問題 5】



質点 1 から質点 N までの N 個の質点がある。質量は m（全て同じ）とする。質点 i $(1 \leq i \leq N)$ は x–y 平面上の直線 $y = i$ の上を滑らかに（摩擦なしに）滑る。この N 個の質点の全てのペアがバネ（バネ定数 k、自然長ゼロ）で結ばれている。初期時刻 $t = 0$ における各質点の x 座標 x_i をランダムに配置し、初速度はゼロとする。その後、バネに引かれて全質点はそれぞれの直線上を滑り始める。なお、質点はバネを自由に（抵抗なしに）通り抜けることができるものとする。

（1） $\sum_{i=1}^{N} x_i$ は時間変化しない（つまり定数である）ことを示せ。

（2） 時刻 $t = (\pi/2)\sqrt{m/Nk}$ に全質点が一直線上に乗ることを示せ。

【解答例】（まずは $N = 2$、そして $N = 3$ のときを考えればよい。）

(1) 系のラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\left\{(x_i - x_j)^2 + (i-j)^2\right\} \\
=& \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{(x_i - x_j)^2 + (i-j)^2\right\}
\end{aligned}
$$

定数を無視できるので

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2) \\
=& \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{4}\left(2N\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{j=1}^{N}x_j\right) \\
=& \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i^2 - \frac{k}{2}\left(N\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \left\{\sum_{j=1}^{N}x_i\right\}^2\right)
\end{aligned}
$$

ラグランジュの運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} =& 0 \\
\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) + \frac{k}{2}\left\{2Nx_i - 2\sum_{j=1}^{N}x_j\right\} =& 0 \\
m\ddot{x}_i + k\left(Nx_i - \sum_{j=1}^{N}x_j\right) =& 0
\end{aligned}
$$

i について和をとると

$$m\sum_{i=1}^{N}\ddot{x}_i+k\left(N\sum_{i=1}^{N}x_i-N\sum_{j=1}^{N}x_j\right)=0$$

つまり

$$\sum_{i=1}^{N}\ddot{x}_i=0$$

これを時間積分すると初期条件より

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i=0$$

従って

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=\text{定数}$$

(2) 上の定数を Nc とすると運動方程式は

$$m\ddot{x}_i+Nk\left(x_i-c\right)=0$$

初期条件を考慮してこの微分方程式を解くと、その解は

$$x_i=c+x_{i0}\cos\left(\omega t\right),\quad \omega=\sqrt{\frac{Nk}{m}}$$

である。ここで x_{i0} は質点 i の初期位置。従って時刻

$$t=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\frac{1}{\omega}\quad (n=0,1,2,\dots)$$

には全質点が直線 $x=c$ 上にある。