# 2009年度 卒業論文

VR技術を用いた3次元可視化プログラムの開発

# 神戸大学工学部情報知能工学科 村田歌織

指導教員 陰山聡

2010年2月23日

## V R技術を用いた3次元可視化プログラムの開発

#### 村田歌織

## 要旨

流れ場を解析するための新しい可視化手法、Frozen-in Line Method (FIL法)を 提案し、バーチャルリアリティ(VR) 技術を使ってそれを実装した。FIL 法は流れ 場に凍り付いて動く曲線、すなわちトレーサー曲線の時間発展を3次元的に追跡 する手法である。この手法の特徴は、ねじれや引き延ばしを伴う流れ場の特徴が よくわかること、そして理想流体中の渦糸や磁力線など、流れ場に凍り付いたべ クトル場の力線の可視化と等価であることである。FIL 法は本質的に3次元的な 可視化手法なので、本研究では VR 装置 CAVE を用いて FIL 法を実装し、それを tubeAdvector プログラムと名付けた。CAVE は、高い立体感と没入感を実現する、 対話的操作に優れた VR 装置である。tubeAdvector プログラムではまず、利用者 が、CAVEのコントローラー "ワンド" を使って1本のトレーサー曲線を3次元的 に描画する。描き終わると同時に、この曲線を初期条件として、流れ場に凍り付 いた曲線の時間的変化を数値的に求める積分計算が自動的に開始される。曲線は 離散点列としてその位置座標がリストに保存される。積分計算によってその座標 が更新され、各離散点を流れに従って(乗って)移動させる。隣り合う離散点の距 離がある長さ以上になった時には、その間に新しい点が挿入される。これによって 曲線の時間的変化をよりなめらかに追跡することができる。この曲線を、OpenGL を用いて細くなめらかなチューブ状の物体として3次元的に描いた。点列の座標 更新と点の挿入、そしてチューブの描写をリアルタイムに行うことにより、流れ 場に凍り付いた曲線の時間発展を可視化する。この tubeAdvector プログラムを、 地球ダイナモのシミュレーションデータと解析的に定義された ABC 流に適用し、 その有効性を確認した。

# 目 次

1	序章	1
2	<ul><li>流れに凍り付いた曲線の可視化</li><li>2.1 FIL 法の基本的な考え方</li></ul>	
3	バーチャルリアリティシステム CAVE	4
	3.1 バーチャルリアリティとは	4
	3.2 CAVE	5
	3.3 pCAVE	5
	3.4 VFIVE	10
4	tubeAdvector プログラム	10
	4.1 プログラムの流れ	10
	4.2 初期位置の決定	10
	4.3 座標の更新と点の補間	11
	4.4 チューブの描画	11
5	応用例	13
	5.1 地球ダイナモ	13
	5.2 ABC 流	16
6	まとめ	18
謝	辞 	18
参考文献		

## 1 序章

自然界には、複雑な流れ場が数多く存在する。例えば、大気や海の流れ、建築物の周囲の風、自動車や飛行機の後方にできる流れ等が挙げられる。近年のコンピュータの進歩のおかげで、このような複雑な流れ場も、コンピュータシミュレーションの手法によって計算機の中に再現できるようになってきた[1]。それらのシミュレーションデータを解析するためには、シミュレーションの結果出力される数値データを目に見える画像に変換するプロセスが不可欠である。このプロセスは可視化と呼ばれる。

複雑な流れ場の可視化は単純なスカラー場の可視化と比べて格段に難しい。それは、流れ場が3次元のベクトル場であるためである。スカラー場の可視化には、等値面、断面、ボリュームレンダリングなど、強力な可視化手法が開発されているが、それと比べるとベクトル場の可視化手法の種類は貧弱である。流れ場の可視化手法としては、流線、矢印、トレーサー粒子などが挙げられる。しかし、これらの手法では、3次元空間中の流れ場の分布を直感的に把握することは難しい。

本研究では、流れ場の可視化における新しい手法 Frozen-in Line Method(FIL法)を提案する。FIL 法はトレーサー曲線の時間発展を 3 次元的に表示する新しい手法である。また、FIL 法は流れに凍り付いたベクトル場の可視化として有効な手段でもある。

FIL 法は本質的に 3 次元的な可視化手法であるため、PC の画面を使った 2 次元的可視化システムでは不十分である。この問題を解決するために、本研究では近年急速に発達したバーチャルリアリティ技術に注目した。様々な種類のバーチャルリアリティ技術の中でも高い立体感と対話的操作に優れた CAVE 装置が本研究の目的には最適であると判断し、これを利用した。

## 2 流れに凍り付いた曲線の可視化

本章では、流れ場を可視化する新しい手法 FIL について説明する。

#### 2.1 FIL 法の基本的な考え方

FIL 法は時間発展するトレーサー曲線によって3次元的な流れを可視化する方法である。トレーサー曲線とは、連続する多数のトレーサー粒子によって定義される曲線である。1つのトレーサー粒子は流れに"乗って"運ばれていく仮想的な粒子である。従ってトレーサー曲線も流れに"乗って"運ばれ、変形していく。この性質により FIL 法は:

- (i)流れ場の特徴がよくわかる,
- (ii) トレーサー曲線が流れ場に凍り付いたベクトル場の力線と等価である, という特徴を持つ。

#### 2.2 力線とトレーサー曲線

一般に、ベクトル場aの力線とは、パラメータsを用いて

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(s)) \tag{1}$$

で定義される曲線  $\mathbf{x}(s)$  である。 $\mathbf{x}(s)$  は 3 次元空間中の位置ベクトルである。 $\mathbf{a}$  が磁場の場合、特に磁力線と呼ばれる。

このようにして定義された力線の運動について以下で述べる。例えば、理想 $^{\mathrm{MHD}}$  流体を考える [2][3][4]。磁場を  $^{\mathrm{B}}$  洗れ場を  $^{\mathrm{C}}$  とすると、 $^{\mathrm{B}}$  の時間発展は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

に従う。

Fig.1 のように流体とともに運動する閉曲線 C と、それに囲まれる曲面 S を考える。この曲面 S を貫く磁束は

$$\phi = \frac{d}{dt} \int_{S_{(t)}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S_{(t)}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{5}$$

は、磁場そのものの時間変化と、二つの時刻における曲面 S(t) と S(t+dt) で囲まれる側面から逃げ出す磁束の和で表される。

したがって、微小時間  $\Delta t$  の間に変化する磁束  $\Delta \phi$  は、

$$\Delta \phi = \int_{S_{(t+dt)}} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_{(t)}} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}$$
 (6)

$$= \Delta t \int_{S_{(t)}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{C_{(t)}} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t)$$
 (7)

$$= \Delta t \int_{S_{(t)}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{C_{(t)}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{I} \Delta t$$
 (8)

$$= \Delta t \int_{S_{(t)}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \Delta t \int_{S_{(t)}} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$
 (9)

これより、

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S_m} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}$$
 (10)

が成立する。このとき、(3) 式から、右辺はどんなSに対しても常に0となる。これは、流体とともに動く任意の閉曲線を貫く磁束が保存されることを意味している。曲面Sを通る磁力線の集合はチューブ状になる。S以外の位置でこのチューブを切る任意の断面S'を貫く磁束は、定義からSを貫く磁束 $\phi$ と等しい (Fig.2)。そして、S'の周囲C'も流れとともに動くとすると式(5)から式(10)が得られたのと同じ論理から曲面S'を貫く磁束は常に $\phi$ である。S'の位置、すなわちチューブ状の磁力線の束を切る断面がどこであってもよいことを考えると、チューブ状の磁力線の束そのものが流れと共に運ばれたと解釈しても矛盾は無い。これを"磁力線は流れに凍り付く"と表現する。すなわち式(2)と式(3)に従うベクトル場Bの磁力線は流れと共に動くトレーサー曲線になっている。

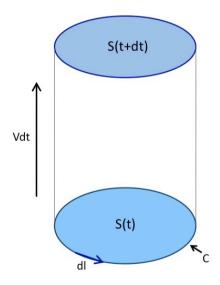


Fig. 1: Magnetic flux through surface S 磁場内に時間変化する閉曲面をとる。下の曲線が微小時間 dt の間に、上へ移動したとき について考える。

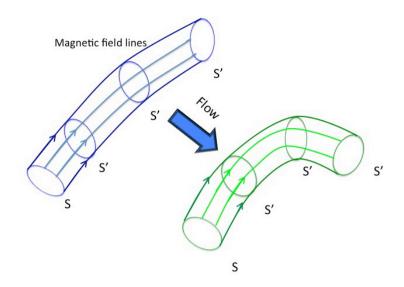


Fig. 2: Frozen-in lines. S が流れに運ばれて動いても磁束は変化しない。

また、非圧縮理想流体の渦度場 $\omega (= \nabla \times \mathbf{v})$ の時間発展は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{12}$$

に従う [5]。これは流れ場  $\mathbf{v}$  の下での磁場の時間発展の式 (2),(3) と同じ形である。したがって、渦度場  $\boldsymbol{\omega}$  の力線 (渦糸と呼ばれる) も流れ場に凍り付いているとみなすことができる。

## $\bf 3$ バーチャルリアリティシステム ${f CAVE}$

ここでは、本研究で利用したバーチャルリアリティシステム CAVE について説明する。

## 3.1 バーチャルリアリティとは

バーチャルリアリティ(VR) 技術とは、コンピュータグラフィックスの手法を用いて仮想的な世界を計算機の中に構成し、それを立体画像投影装置を介して、あ

たかもそれが実在する世界であるかのように提示する技術である。洗練された立体提示装置を用いれば、立体感を伴う高い実在感が得られる。仮想世界が本当にそこに存在するかのように感じるためには、その世界が立体的に見えるだけでは不十分で、観察者がその世界とやりとりできる対話性と、観察者がその世界に入り込んでいるという没入感も重要となる。

#### 3.2 CAVE

本研究で使用した VR 装置、CAVE は、イリノイ大学シカゴ校において開発された。様々な VR 方式の中でも、CAVE は特に高い没入感と現実感を得ることができる。CAVE の中心部分は、大きな立方体の部屋で、その正面、左右の壁面、床が全て1辺が10フィートもしくは3メートルのスクリーンとなっている。そこにステレオプロジェクタで立体映像を投影する。体験者は、立体眼鏡をつけ、ワンドと呼ばれるコントローラを持ってその部屋の中に立つ。眼鏡にはヘッドトラッキングシステムが装着されており、体験者の目の位置と視線の方向がリアルタイムで検出されているため、その情報をもとにスクリーンに投影される画像がリアルタイムに調整される。つまり体験者がCAVEの中を歩き回ってもそれに伴って見ている画像が変化する。

この処理は、CAVELib が行っている。CAVELib とは、ヘッドトラッキングやそれに基づくリアルタイムの投影画像の調整など、VR を実現する上で必要となる最も基本的な処理をする基本ライブラリ (API) である。CAVELib が自動で処理を行っているため、ユーザーはそれらの処理に煩わされることなく仮想世界の構築に専念することができる。

本研究ではCAVELib と、OpenGLを利用してプログラムを開発した。OpenGL[7] とは、コンピュータグラフィクスの標準的な API である。OpenGL を使うことによって、点、線、多角形を組み合わせた 3 次元図形を描くことができる。また、その図形に対して、表面の質感や光源の位置などを設定することができるため、より現実感のあるものを描くことができる。

#### 3.3 pCAVE

本研究で利用した VR 装置は、神戸大学にある一面型の CAVE 装置である。標準的な CAVE 装置とは違い、スクリーン (Fig.3) は正面の一つのみである。そこに画像を投影するステレオプロジェクター (Fig.4) はスクリーンの背後にある。体験者は、立体眼鏡 (Fig.5) をかけ、ワンド (Fig.6) を持ってスクリーンの前に立つ。こ

の立体眼鏡とワンドには超音波センサが組み込まれており、スクリーンの上部と左右に取り付けられた超音波発生装置 (Fig.7) から発せられる超音波を受信することにより、その位置情報を取得できる。また、眼鏡とワンドにはジャイロが組み込まれており、傾き情報も得ることができる。それらの情報は、位置センサー処理用 PC(Fig.8右) によって常に解析され、画像処理用のグラフィックワークステーション (GWS)(Fig.8左) に送られる。GWSでは、その情報を元に、右目用と左目用の画像を作り、それをプロジェクターへ送り、プロジェクターではそれらを交互に高速に切り替えてスクリーンに映し出している。その切り替えに同期して、立体眼鏡では右目と左目に交互にシャッターが下りている。つまり、右目用の画像が表示されているときは右目でしか見えないようになっている。これによって、体験者は立体画像を見ることができる。また、ワンドには5つのボタンとジョイスティックがついており、これを操作することによって映っている画像を操作することもできる。

pCAVEの構成を Table 1 にまとめた。スクリーンの横幅は 325cm、高さは 249cm で、プロジェクターはクリスティ・デジタル・システムズ社製の「Mirage S+4K」1 台、GWS は日本 SGI 社製の「Asterism Deskside ADT08C」、さらに、Intersence 社製の超音波位置センサ、液晶シャッター眼鏡、ワンドから構成されている。

Projector	Mirage S+4K
Tracking System	IS900
	Computer
PC	Asterism Deskside ADT08C
CPU	Quad-Core AMD Opteron 2350 x1
Memory	4GB (DDR2-667 Registered ECC DIMM x4)
HDD	500GB
GPU	NVIDIA Quadro FX4600 x1

Table 1: Specification of pCAVE



Fig. 3: The screen of pCAVE 立体画像を映し出すスクリーン。高さ約 2.6m



Fig. 4: Stereo projector of pCAVE 右目用と左目用の画像を高速に切り替えて立体画像を映し出す。



Fig. 5: Liquid crystal shutter glasses. 両目部分にシャッターがあり、プロジェクターと同期してシャッターを下ろす。



Fig. 6: Wand, a potable controller. ワンドと呼ばれるコントローラ。5つのボタンと1つのジョイスティックがある。



Fig. 7: Ultrasonic speaker for the tracking system. トラッキング用の超音波を出す装置。スクリーンの左右と上部に取り付けられている。



Fig. 8: Computers for pCAVE. 左が画像処理用の GWS。右がトラッキング情報処理用の HP Workstations xw4400。

#### 3.4 VFIVE

VFIVE[8]とは、CAVE装置を利用した可視化ソフトウェアで、複雑な3次元構造を持つ一般的なスカラー・ベクトル場を解析するための汎用ツールである。VFIVEには、CAVE装置の機能を用いたメニュー画面やワンド操作の関数等が存在する。それを利用すればユーザーインターフェース等についてプログラムの作成がしやすい。そこで、本研究で開発したプログラムは、このVFIVEのフレームワークに組み込んだ。

## 4 tubeAdvector プログラム

本研究では前章で述べた OpenGL と CAVE Lib を用いて、FIL 法に基づいて流れ場の可視化を行う tubeAdvector プログラムを開発した。tubeAdvector は流れに凍り付いた曲線 (トレーサー曲線) を有限の断面積を持つチューブで表現する。

#### 4.1 プログラムの流れ

最初に、プログラムの流れについて説明する。プログラムは、大きく分けて3つに分けることができる。

まず、

(a) 利用者が決めた初期位置に点を置く

次に

(b) 点の座標の更新とその補間を行う

そして

(c) チューブを描画する

#### 4.2 初期位置の決定

まず、(a) について説明する。利用者は、ワンドを使って、スクリーン上の任意の場所に曲線を描いて、トレーサー曲線の初期位置を決定する。ボタンを押している間に、ワンドの先から出たビームの先の座標を取得し、そのビームの指す座標が前に取得した点から一定の距離より離れると新しい点として座標が保存される。このように点をボタンを押している間に決め、それらを上の(c)の処理でつないだものが初期条件のチューブとなる。

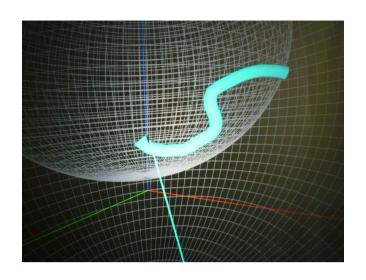


Fig. 9: Drawing step of the initial tube.

初期チューブを描いている。細い線はビーム。ビームを動かすと、その動きを追うように チューブが描かれる。

#### 4.3 座標の更新と点の補間

次に、(b)のステップについて説明する。あらかじめ与えられている現在の位置の流れ場の速さの情報を元に、時間経過後の座標を計算し、その座標を点の新しい座標として保存する。また、もしも隣り合う二つの点の距離がある長さより以上になった時、その二つの点の間に新しい点を補間する。これは、なめらかな曲線を描くために必要な処理である。

各点の速度はユーザがあらかじめ指定した入力流れ場のデータから空間3次精度の補間によって求める。速度の時間積分には6次精度のルンゲ・クッタ法を用いる。入力データの読み込み、空間補間、時間積分はすべてVFIVEが自動的に処理する。

#### 4.4 チューブの描画

(c) のステップでは、すべての隣り合う点の間に円柱を描く。それがつながっていくことによって全体をみるとチューブのように見える。その円柱の描き方を説明する。OpenGLには、多角形の頂点で法線を指定すると、その多角形上の他の場所での法線は自動的に補間するという機能がある。[6](Fig.(10)) これを利用して、多角柱を描き、その頂点に中心から放射状に伸びる法線ベクトルを指定する

と、平面の側面を円柱のように見せることができる。つまり、円柱を描くには多 角柱を作成すればよい。

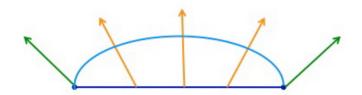


Fig. 10: Automatic interpolation of normal vectors by OpenGL 両端の点に緑の矢印の方向に法線ベクトルを設定すると、点の間に黄色の矢印のように補間する。そうすると、青の平面が水色のように曲面に見える。

Fig.11 のように、点 M,N,Pをとる。この 3 点は隣り合っていて、いまから M と N の間に多角柱を描くとする。まず、N 点のまわりに、多角柱の頂点を作る。多角柱を描くために必要なのは、多角柱の頂点の座標と、その頂点の法線ベクトルである。まず、点 N を起点に、点 M から点 P への方向に向かうベクトル (黄色の矢印)を求める。次に、それと垂直になるような 2本の互いに垂直なベクトル u と  $\mathbf{v}$ (緑の矢印 2 本)を設定する。そのベクトル 2 本のベクトルと、 $\theta = 2*\pi/n$ (n は 多角柱の底面の頂点の数)を用いて、

$$a_x = \cos(i * \theta) * u_x + \sin(i * \theta) * v_x \tag{13}$$

$$a_{y} = \cos(i * \theta) * u_{y} + \sin(i * \theta) * v_{y} \tag{14}$$

$$a_z = \cos(i * \theta) * u_z + \sin(i * \theta) * v_z \tag{15}$$

と表せるベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{i}$ 個とる。 $\mathbf{i}$ は $1 \le i \le n$ となる整数である。これが、多角柱の各頂点での垂直ベクトルとなる。

そして、点Nの座標に求めたaを加えると、頂点の座標が求められる。それらの点と、前の段階で保存しておいた点Mの周りの頂点をつないで、円柱を描く。これを、全ての点について行うことにより、チューブを構成する。

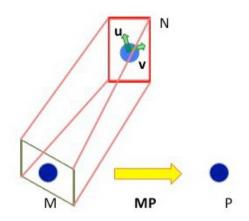


Fig. 11: The algorithm for a tube generation, in case of n=4. 多角柱を作る。ベクトル **MP** を求め、それに垂直なベクトルを 2 本求める。そこから多 角形の底面をつくる。

## 5 応用例

本章では tubeAdvector の応用例を示す。

#### 5.1 地球ダイナモ

地球ダイナモ [9] とは、地球の核内部での液体鉄の対流運動によって大規模な磁場を作り出す現象のことである。地球ダイナモの解明を目指して、スーパーコンピュータを使った大規模なシミュレーション研究が近年盛んに行われている [10][11]。計算機シミュレーションで求められた地球の核内での流体金属の流れ場に対して、tubeAdvector プログラムを実行した。

Fig.12 と Fig.13 は同じデータに対する FIL 法による可視化である。それぞれ (a)  $\sim$ (f) にかけて 1 本の同じ線の時間発展を示している。

Fig.12 は渦を巻いている流れである。トレーサー曲線が流れに凍り付いて渦を巻いているのがよくわかる。また、Fig.13 では短いトレーサー曲線が流れに乗って伸びていく様子がわかる。

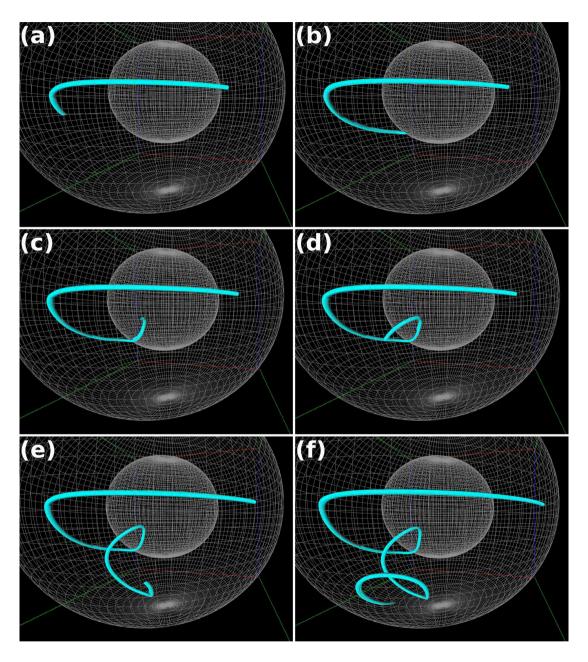


Fig. 12: Snapshots of geodynamo simulation data visualized by tubeAdvector. 1本のトレーサー曲線が引き延ばされていく様子。渦を巻く流れがよくわかる。

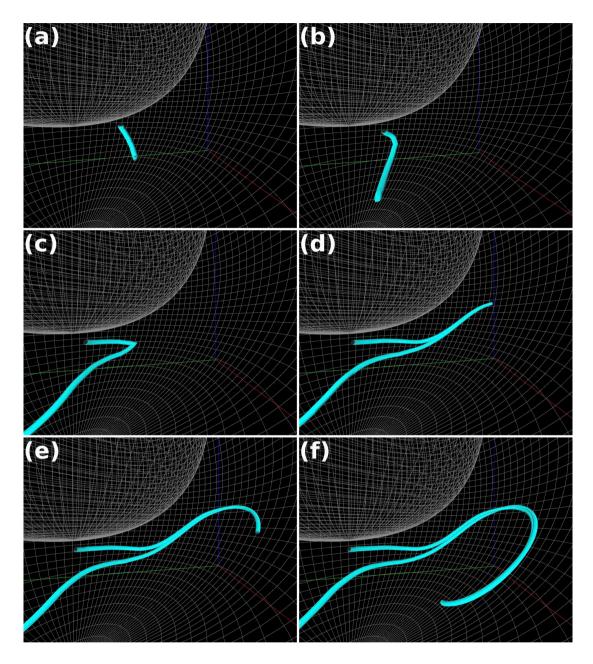


Fig. 13: Another sequence of snapshots of geodynamo simulation data visualized by tubeAdvector.

短いトレーサー曲線が伸びていくようすがわかる。

## 5.2 ABC 流

ABC 流 [12] とは、

$$v_x = B\cos y + C\sin z \tag{16}$$

$$v_y = C\cos z + A\sin x \tag{17}$$

$$v_z = A\cos x + B\sin y \tag{18}$$

の 3 つの式で定義された速度  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  の流れ場である。この流れ場に対して、tubeAdvector プログラムを実行した。

Fig.14(a)~(f) は1本のトレーサー曲線の時間発展を連続して撮ったものである。 はじめは短かかったトレーサー曲線が、急速に引き延ばされていく様子が分かる。

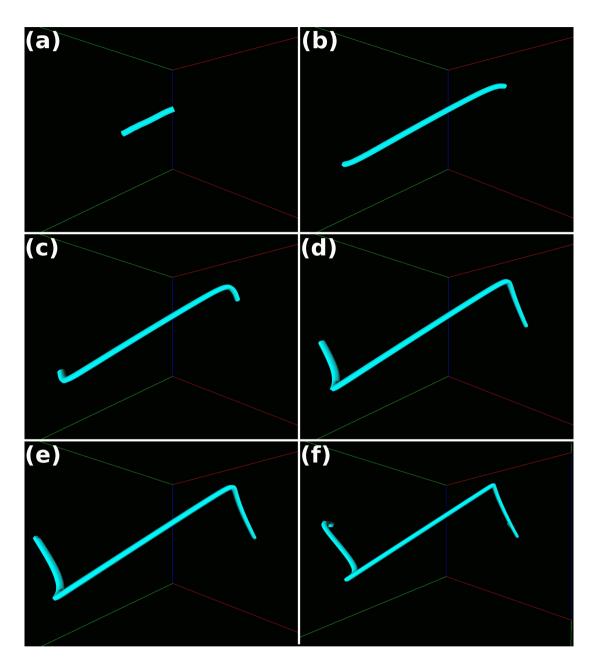


Fig. 14: Snapshots of ABC flow visualization by tubeAdvector. 短い線が伸びていくようすがわかる。

#### 6 まとめ

本研究では、流れ場の新しい3次元可視化手法FIL法を提案した。また、それに基づいてCAVEのVR空間中で流れ場を可視化するプログラムtubeAdvectorを開発し、トレーサー曲線の可視化を可能にした。そして、実際に地球ダイナモとABC流についてこのプログラムを適用し、磁力線やトレーサー曲線の動きを可視化した。

このプログラムでは、流れが進み、チューブが長くなるにつれて、膨大な量の点のリストをたどらなければ表示できなくなるため、動作がかなり鈍くなってしまうという問題点がある。これを解決するためのプログラムの並列処理化は今後の課題である。さらに、点が増えてしまうという問題点に対して、例えば隣り合う点が近すぎるときにどちらかの点を減らす、というような無駄な点を減らす関数を作るという改良点もある。また、現在のtubeAdvectorはトレーサー曲線の大局的な構造とその時間発展を示すには十分な機能を持っているが、局所的な伸びや縮みはわかりにくい。今後はトレーサー曲線の各線要素の伸縮状態を色等を使いわかりやすく可視化する手法を開発したい。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた陰山 聡教授に感謝致します。

## 参考文献

- [1] J.H. ファーツィガー,M. ペリッチ"コンピュータによる流体力学",シュプリンガー・フェアラーク東京,(2003),pp.21-38.
- [2] 今井 功,"流体力学(前編)",裳華房,(1973),pp.70-73.
- [3] 田中 基彦 西川恭治,"高温プラズマの物理学", 丸善株式会社,(1991),pp.210-212.
- [4] P.A.DAVIDSON, "An Introduction to Magnetohydrodynamics", Cambridge University Press, (2001), pp. 40-45.
- [5] 今井功,"流体力学",岩波書店,(1970),pp.28-34,pp.96-98.
- [6] Jackie Neider Tom Davis Mason Woo, "OpenGL Programming Guide The Official Guide to Learning OpenGL, Release 1(日本語版)", Addison-Wesley Publishing Company, (1993), pp. 52-62.

- [7] 床井 浩平, "GLUT による OpenGL 入門", 工学社,(2005),pp.8-11.
- [8] 陰山 聡 大野 暢亮, "バーチャルリアリティを用いた対話的 3 次元可視化ソフトウェアの開発とその応用", プラズマ・核融合学会誌, Vol.84, No.11, pp.834-843, (2008)
- [9] 陰山 聡, "コンパスはなぜ北を指すのか?", 科学, Vol. 77, No. 5, pp. 532-538, (2007)
- [10] Akira Kageyama, Takehiro Miyagoshi, Tetsuya Sato, "Formation of current coils in geodynamo simulations", *Nature*, Vol. 454, pp. 1106-1109, (2008)
- [11] Takehiro Miyagoshi, Akira Kageyama, Tetsuya Sato, "Zonal flow formation in the Earth's outer core", *Nature*, vol. 463, pp.. 793-796 (2010)
- [12] 吉田 善章, "MHD の数理", プラズマ・核融合学会誌, Vol.71, No.4, pp.309-320, (1995)